

V Pospíšil

Anwendungen

der

FESTIGKEITS-LEHRE

auf den

Maschinenbau.

Eine systematisch geordnete

Sammlung von Aufgaben mit ausführlichen, wissenschaftlich begründeten Auflösungen.

Uebungsbuch zum Selbstunterrichte

für

Studirende des Maschinenbaues, sowie auch zum Gebrauche für praktisch thätige Maschinentechniker;

bearbeitet von

S. GRAF,

Ingenieur und Lehrer an der k. k. mechan.-techn. Lehrwerkstätte (Maschinenbaufachschule) in Komotau,
beeideter gerichtlicher Sachverständiger für Maschinenwesen.

Mit 170 Abbildungen.

WIEN 1885.

SPIELHAGEN & SCHURICH

Verlagsbuchhandlung

I. Kumpfgasse 7.

VORWORT.

Unsere heutige Einrichtung der Maschinenbaufachschulen (maschinentechnische Fachabtheilungen) an den Gewerbe- und technischen Hochschulen bringt es mit sich, dass der „Festigkeitslehre“ als Unterrichtsgegenstand verhältnissmässig wenig Zeit gewidmet wird, so, dass der Studirende des Maschinenbaues genöthigt ist, behufs Befestigung, weiterer Verarbeitung und Vertiefung der in der Schule gehörten Festigkeitstheorien, durch Anwendung derselben auf praktische Beispiele aus dem Maschinenbau, zum Privatstudium zu greifen. Ihn in diesem Studium durch ein geeignetes Hilfs- und Uebungsbuch zu unterstützen, ist der Zweck der vorliegenden Aufgabensammlung. Da es sich in derselben, wie schon angedeutet, um weitere Verarbeitung und Vertiefung der Festigkeitstheorie in Form von praktischen Anwendungen derselben auf den Maschinenbau handelt, so wurden sämmtliche Auflösungen der Aufgaben wissenschaftlich begründet, daher die Constructionsformeln, die beim Entwerfen von Maschinen und Maschinentheilen zur Berechnung von Festigkeitsdimensionen und hier zur Auflösung von Aufgaben gebraucht werden, wissenschaftlich abgeleitet, dieselben erweitert und neue Formeln zur Dimensionsberechnung verschiedener Körper entwickelt; immer unter Zugrundelegung der einfachsten Festigkeitsformeln, deren Verständniss und Herleitung, daher die allgemeine Festigkeitstheorie überhaupt bei dem Leser dieses Buches vorausgesetzt wird. Die Aufgaben selbst sind nach Capiteln der Festigkeitslehre in der üblichen Reihenfolge (Zug-, Druck-, Scheer-, Biegungs-, Zerknickungs- und zusammengesetzte Festigkeit), vom Leichteren zum Schwereren allmälig fortschreitend, systematisch geordnet, theils in allgemeinen, theils in numerischen Grössen gegeben, und bedingen zu ihrem Verständniss im Allgemeinen, dass der

Leser mit der Elementarmathematik und den Grundlehren der Statik fester Körper vertraut sei. Es wurden jedoch auch im Interesse der mathematisch weiter gebildeten Leser behufs strengerer wissenschaftlicher Ableitung und der dadurch erzielten Vereinfachungen in den mathematischen Entwicklungen einige wenige Aufgaben mit Anwendung höherer Mathematik behandelt, weshalb alle Jene, deren mathematische Vorbildung nicht so weit reicht, die bezüglichen Entwicklungen überschlagen und nur die Resultate beachten mögen. Es ist selbstverständlich, dass bei der Ableitung der Constructionsformeln zur Dimensionsberechnung, da, wo es nöthig erschien, jene praktischen Erfahrungsresultate zu Hilfe genommen wurden, deren sich der Maschinenbau im Allgemeinen bedient und dass bei allen Aufgaben auch die praktische Seite derselben in Bezug auf den Maschinenbau gebührend hervorgehoben wurde. Da ich während meiner vieljährigen Thätigkeit als technischer Lehrer an Maschinenbaufachschulen den Mangel einer geeigneten reichhaltigen Sammlung von Festigkeitsaufgaben mit Auflösungen oft unangenehm empfand, entschloss ich mich, im Interesse der Fachgenossen und der Studirenden des Maschinenbaues das im Laufe der Jahre angesammelte Aufgabenmaterial in Form eines Buches der Oeffentlichkeit zu übergeben *). Ich empfehle daher den Herren Professoren und Lehrern der Mechanik und des Maschinenbaues die vorliegende Arbeit zur gefälligen Benutzung für die Studirenden ihrer Lehranstalten. Gleichzeitig bitte ich die genannten Herren vom Fache, mich auf etwaige in diesem Werke vorkommenden Mängel gefälligst aufmerksam machen zu wollen; diesbezügliche Hinweisungen werde ich jederzeit mit grösstem Danke entgegennehmen.

Komotau, den 1. November 1884.

S. Graf.

---

*) Es ist dies der erste Theil meiner Aufgabensammlung, dem ich, falls er eine günstige Aufnahme findet, den zweiten Theil, der jetzt von mir bearbeitet und der Hauptsache nach Festigkeitsberechnungen von Krahnen, Schiebebühnen und Drehscheiben enthalten wird, folgen lassen würde.

INHALTS-VERZEICHNISS.

Einleitung.

Aufgabensammlung.

I. ABSCHNITT.

Anwendungsbeispiele aus der Lehre von der Zug-, Druck- und Scheerfestigkeit.

II. ABSCHNITT.

Anwendungsbeispiele aus der Lehre von der Biegungsfestigkeit.

III. ABSCHNITT.

Anwendungsbeispiele aus der Lehre von der Torsionsfestigkeit.

Nummer des Beispiels | Seite

IV. ABSCHNITT.

Aufgaben aus der Lehre von der Zerknickungs- und zusammengesetzten Festigkeit

Literatur-Nachweis.

Grashof, Festigkeitslehre.

Hart, Werkzeugmaschinenbau.

Keller, Triebwerke.

Müller, Festigkeitslehre.

v. Ott, Baumechanik.

Reuleaux, Constructionslehre, Constructeur, Berechnung der wichtigsten Federarten.

Weissbach, Der Ingenieur (Formelbuch).

Weitzel, Unterrichtshefte für den Maschinenbau.

Wernicke A., Lehrbuch der Mechanik.

Der Leser wird ersucht, vor dem Gebrauche dieses Buches die am Ende desselben angegebenen Berichtigungen zur Kenntniss zu nehmen.

Einleitung.

Die Maschinenfabrikation unserer Tage beruht bekanntlich fast in allen Ländern, die überhaupt Maschinen produciren, auf wissenschaftlicher Grundlage und praktischen Erfahrungsresultaten. Bevor eine Maschine gebaut, d. i. also in der Werkstatt praktisch ausgeführt wird, muss von derselben auf Grund einer vorangegangenen Berechnung eine Constructionszeichnung angefertigt, die Maschine muss also vorher construirt werden. Zur Construction eines Maschinentheils oder einer Maschine benützen wir aber die mit Hilfe der Mechanik, Mathematik und Physik ausgerechneten Dimensionen und Grössenverhältnisse der einzelnen Theile der Maschine, indem wir die Gesetze der genannten Wissenschaften auf den Maschinenbau anwenden.

Von einer richtig construirten und gut ausgeführten Maschine verlangt man, dass sie bei den möglichst geringsten Herstellungskosten ihrem Zwecke möglichst vollkommen entsprechen, beim Betriebe nur einer geringen Abnützung und Reparatur unterworfen, und endlich entsprechend fest und dauerhaft gebaut sein solle; wie diese Bedingungen bei der Construction und Ausführung der Maschine erfüllt werden können, lehrt im Allgemeinen der theoretische Maschinenbau mit allen seinen Hilfswissenschaften, in geeigneter Verbindung mit den einschlägigen praktischen Erfahrungsresultaten; dass auch ein rationeller Geschäftsbetrieb hier ein wesentlich mitwirkender Factor ist, versteht sich wohl von selbst. Was nun die möglichst geringsten Herstellungskosten, die Abnützung, die Festigkeit und Dauerhaftigkeit der Maschine betrifft, so ist einleuchtend, dass im Allgemeinen die Erfüllung dieser Bedingungen zum grössten Theile von den den einzelnen Theilen der Maschine zu gebenden Dimensionen und der dadurch bedingten, zur Herstellung gebrauchten Materialmenge abhängig sein wird; wie diese Dimensionen zu finden sind, zeigt uns die Festigkeitslehre.

Wenn eine Maschine die ersten drei der oben angeführten Bedingungen unvollkommen erfüllt, jedoch genügend fest und dauerhaft gebaut ist, so ist sie immerhin noch betriebsfähig, also brauchbar; erfüllt sie jedoch die ersten drei Bedingungen, aber nicht die vierte, so ist sie aus sehr nahe liegenden Gründen nicht brauchbar, weil

nicht betriebsfähig. Hieraus geht hervor, dass eine Maschine vor allen Dingen genügend fest und dauerhaft gebaut sein muss und die anderen drei Bedingungen erst in zweiter Reihe kommen.

Da nun die Festigkeit der einzelnen Theile der Maschine den Bestand dieser selbst, deren grössere oder geringere Abnützung, sowie deren Herstellungskosten, also auch ihren Verkaufspreis zum grossen Theile bedingt; da ferner durch nicht genügende Beachtung der Regeln der Festigkeitslehre bei Aufstellung und Inbetriebsetzung von Maschinen, oder Aufstellung von Gerüsten u. dgl. leicht Unglücksfälle von grosser Tragweite eintreten können, wie die Erfahrung dies leider schon oft bewiesen hat, so kann man wohl mit Recht sagen:

Die Festigkeitslehre ist der Grundstein des Maschinenbaues. Wer ein solides Gebäude aufführen will, muss einen guten Grund legen; wer Maschinenbau mit dem rechten Nutzen betreiben will, muss vorher Festigkeitslehre gründlich studiren. Aufgabe dieser letzteren ist es nun, wie bereits oben bemerkt, die Dimensionen der einzelnen Theile einer Maschine oder irgend eines anderen von äusseren Kräften angegriffenen physischen Körpers derart zu finden, dass die zur Herstellung benöthigte Materialmenge ein Minimum, die Abnützung möglichst klein und die Festigkeit möglichst gross sei.

Allgemeine Principien, nach denen die Berechnung der Dimensionen von Maschinentheilen und Maschinen zu geschehen hat, sind folgende:

Da eine Maschine stets zur Leistung oder Uebertragung einer Arbeit verwendet wird und diese letztere nur durch Aufwendung von gewissen Kräften oder Pressungen erzielt werden kann, so folgt daraus, dass die Maschine, deren Festigkeit jene Kräfte in Anspruch nehmen, den auf sie wirkenden Maximalpressungen entsprechend gebaut und daher in allen ihren Theilen ganz bestimmte Dimensionen haben muss. Sämmtliche Dimensionen, welche man zur Construction einer Maschine zu wissen nöthig hat, lassen sich in folgende zwei allgemeine Abtheilungen bringen:

a) Festigkeitsdimensionen, das sind solche, welche aus den auf die Maschinentheile wirkenden Maximalkräften bestimmt werden, wobei die theoretischen Regeln und Formeln der Festigkeitslehre, zuweilen corrigirt durch praktische Erfahrungsresultate oder andere zu berücksichtigende Umstände, zur Anwendung kommen.

Die Maximalkräfte, aus welchen die Festigkeitsdimensionen bestimmt werden, rühren von der zu leistenden oder zu übertragenden Arbeit der Maschine und dem Gewichte der Maschinentheile selbst her. Solche Festigkeitsdimensionen sind z. B. die Stärke der Zähne eines Zahnrades, die Durchmesser von Zapfen, Axen, Wellen u. s. w.

b) Empirische Dimensionen, das sind solche, welche nicht durch directe Anwendung der theoretischen Festigkeitsformeln,

sondern in der Hauptsache mit Hilfe von praktischen Erfahrungsresultaten bestimmt werden. Dimensionen, welche durch die Anordnung der einzelnen Theile einer Maschine, oder durch die gewünschte Form derselben, oder durch die Rücksichten auf Herstellung und Betrieb bedingt werden, endlich jene Dimensionen, welche durch die Vorkehrungen gegen Abnützung der Maschinentheile hervorgerufen werden; alle diese Dimensionen rechnen wir ebenfalls zu den empirischen.

Es gibt jedoch noch eine Anzahl von Dimensionen, welche durch die gleichzeitige Einwirkung mehrerer äusserer Einflüsse bedingt werden; in diesem Falle ist bei Feststellung einer Abmessung darauf zu sehen, dass keiner jener zusammenwirkenden Einflüsse unberücksichtigt bleibe.

Zur Bestimmung der Festigkeitsdimensionen eines Maschinentheiles muss man immer die auf denselben wirkenden Maximalkräfte kennen, da, wie bereits bemerkt wurde, nur aus diesen die Festigkeitsdimensionen bestimmt werden dürfen. Die streng mathematische Lösung der Aufgabe, diese Maximalkräfte zu finden, ist jedoch häufig mit bedeutenden Schwierigkeiten verbunden. Denn in dem Falle z. B., dass die Kraft von den Dimensionen und den dadurch bedingten Gewichten und Massen der bewegten Theile und auch von dem Bewegungszustande der ganzen Maschine (ob sich dieselbe im Beharrungszustande, Anlauf oder Endlauf befindet) abhängt, ist es gar nicht möglich, jene Aufgabe direct zu lösen. Man schlägt in diesem Falle folgendes Annäherungsverfahren ein, welches die streng richtige Lösung in einer für die Praxis genügenden Weise ersetzt:

Man bestimmt die auf den Maschinentheil einwirkenden Maximalpressungen vorerst so, als ob diese von dem Bewegungszustande der Maschine unabhängig wären. Diese Maximalpressungen sind entweder direct durch die Leistung einer Arbeit gegeben, resp. durch die dabei zu überwindenden Widerstände, oder sie lassen sich aus der zu übertragenden Arbeit ermitteln. Diese so erhaltenen Kräfte müssen jedoch, weil sie kleiner als die wirklichen Maximalkräfte sind, denen der Maschinentheil infolge des Bewegungszustandes der Maschine zu widerstehen hat, corrigirt werden, und dies geschieht in manchen Fällen durch Rechnung, in den meisten jedoch auf praktischem Wege. Die Kräfte, die von den Gewichten der Maschinentheile herrühren, sind sehr häufig im Verhältniss zu den Kräften, welche von der Arbeitsleistung herrühren, sehr klein und werden dann bei Bestimmung von Festigkeitsdimensionen nicht berücksichtigt. Sind jedoch jene Gewichte wegen ihrer Grösse nicht zu vernachlässigen, so bestimme man, um complicirtere Rechnungen zu umgehen, zuerst die Dimensionen des Maschinentheils ohne Rücksicht auf sein Eigengewicht, berechne dann aus den so gefundenen Abmessungen das Gewicht und bestimme jetzt die Festigkeitsdimen-

sionen des Maschinentheils noch einmal mit Rücksicht auf das eben gefundene Gewicht. Auf diese Weise gelangt man in der Regel zu einem für die Praxis genügend genauen Resultate. Will man dieses jedoch noch genauer haben, so wiederhole man die Rechnung noch einmal in der eben gezeigten Weise, indem man aus den nun zum zweitenmale bestimmten Dimensionen neuerdings das Gewicht berechnet und nun die Dimensionen des Maschinentheils mit Rücksicht auf das zuletzt gefundene Eigengewicht zum drittenmale bestimmt.

Man sieht leicht ein, dass man auf diese Weise die Rechnung bis zu einem beliebigen Grade der Genauigkeit fortführen kann. Hat man die auf einen Maschinentheil wirkenden Maximalkräfte gefunden, so hat man zu untersuchen, in welcher Weise die Kräfte die Festigkeit des Theiles beanspruchen.

Hierauf bestimme man mit Hilfe der in der Festigkeitslehre aufgestellten Formeln und Regeln die Festigkeitsdimensionen des Theiles selbst; hierbei muss selbstverständlich die der Festigkeitslehre entlehnte Formel der Art und Weise, in welcher die Kräfte den Maschinentheil beanspruchen, angepasst sein, d. h. dem betreffenden, vorliegenden Belastungs- und Unterstützungsfall entsprechen. Es ist sehr wichtig, die zu verwendenden Maschinentheile nicht so stark zu belasten, dass die hervorgerufenen Formänderungen die Elasticitätsgrenze erreichen oder gar überschreiten; sie dürfen nur durch einen gewissen Theil jener Kraft angegriffen werden, welche eine Beanspruchung bis zur Elasticitätsgrenze hervorrufen würde.

Für gewöhnliche Fälle im Maschinenbau genügt es, wenn man die ruhig zu belastenden Maschinentheile mit einer 6- bis 8fachen Bruchsicherheit construirt, wenn sie aus Gusseisen, mit einer 4- bis 6fachen Sicherheit, wenn sie aus Schmiedeisen, mit einer 10- bis 12fachen Sicherheit, wenn sie aus Holz sind.

Hat man es mit der Ausführung grösserer Objecte, die zu ihrer Herstellung viel Material bedürfen, zu thun, so ist es besser, sich erst durch eigens anzustellende Versuche von der Festigkeit der zu verwendenden Materialien zu überzeugen, resp. deren Bruch- und Tragmoduli zu bestimmen, als sich auf die in den Tabellen über Festigkeits-Coëfficienten angegebenen Mittelwerthe zu verlassen. Durch die oben gemachten Angaben über den Grad der Sicherheit, mit welchem Maschinentheile construirt werden sollen, ist zwar die zulässige stärkste in die Rechnung einzuführende Materialfaseranspannung (Beanspruchung der Festigkeit der Faser, ausgedrückt durch die die Faser spannende Kraft, bezogen auf die Querschnittseinheit), auch kurz nur Spannung genannt, im Allgemeinen bestimmt; allein in vielen Fällen muss bei verschiedenen Maschinentheilen, die gleich stark belastet werden und aus demselben Materiale hergestellt sind, der Grad der Sicherheit mit Rücksicht auf die zulässigen Formänderungen, etwaigen, bei der Bewegung auftretenden

Stössen und Vibrationen, mit Rücksicht auf den Materialverbrauch, die Abnützung und andere äussere Zufälligkeiten verschieden sein. Der durch diese Umstände bedingte Sicherheitsgrad kann nicht durch Rechnung gefunden werden, sondern man muss ihn auf praktischem Wege ermitteln; dadurch gelangt man zu sogenannten Corrections-Coëfficienten, welche nur der Erfahrung entnommen werden können. Diese Corrections-Coëfficienten werden in die theoretischen Formeln der Festigkeitslehre ihren numerischen Werthen nach eingeführt und dadurch die in der theoretischen Formel etwa enthaltenen Constanten ihren Werthen nach geändert, wobei jedoch die ganze Form der Formel ungeändert bleibt. Wie bei Berechnung von Festigkeitsdimensionen die Formänderungen der Maschinentheile, die Einwirkung von Stössen und Vibrationen zu berücksichtigen sind, kann nur die Praxis lehren.

Die Rücksicht, die man bei der Bestimmung von Festigkeitsdimensionen auf den Materialverbrauch zu nehmen hat, besteht in Folgendem:

Da die von einer Maschine zu leistende Arbeit von dem Producte aus der Kraft in dem von ihr zurückgelegten Weg abhängt, und die Festigkeitsdimensionen der Maschinentheile nur von der Grösse der auf sie wirkenden Kräfte abhängig sind, so sehe man bei der Anordnung einer Maschine immer darauf, dass die Geschwindigkeiten der bewegten Theile möglichst gross, d. h. die auf die Maschinentheile wirkenden Kräfte möglichst klein ausfallen, da dadurch die Dimensionen kleiner werden, also auch der Materialverbrauch sich verringert. Diese Verringerung des Materialverbrauches durch Vergrösserung der Geschwindigkeit der bewegten Theile hat jedoch eine durch die Erfahrung bestimmte Grenze. Diese wird dadurch bedingt, dass mit der Zunahme der Geschwindigkeit auch die den Maschinentheil beanspruchenden Kräfte selbst wachsen, was also wieder eine Vermehrung des Materialaufwandes zur Folge hat; ausserdem treten auch bei rasch bewegten Theilen sehr leicht Stösse und Vibrationen ein, welche auch den Materialverbrauch vergrössern; daher kann bei der Annahme der zweckmässigen oberen Grenze der Geschwindigkeit der bewegten Maschinentheile am besten nur die Erfahrung massgebend sein. Aber auch durch eine geeignete Wahl und Anordnung der Querschnitte für die zu verwendenden Körper kann man in sehr vielen Fällen, wie die Festigkeitslehre dies zeigt, den Materialverbrauch bedeutend einschränken. Was die Bestimmung der empirischen Dimensionen der Maschinentheile betrifft, so sei Folgendes bemerkt: Bei der Mehrzahl der empirischen Dimensionen treten die Rücksichten auf Festigkeit so sehr zurück, dass man zu theoretischen Formeln gar nicht mehr gelangt. Solche Dimensionen hat der Constructeur nach dem Gefühl, das er nur durch praktische Erfahrungen erlangen und ausbilden kann, zu bestimmen.

Das constructive Gefühl, das durch dauernde Uebung sehr ausgebildet werden kann, leistet beim Entwerfen von Maschinen sehr gute Dienste, ja es ist geradezu für Bestimmung empirischer Dimensionen, bei denen die Theorie nichts ausrichten kann, unentbehrlich.

Um die Arbeit bei der Bestimmung der Dimensionen zu erleichtern, bedient man sich sogenannter Verhältnisswerthe, das sind allgemeine Relationen zwischen den Dimensionen einer Maschine. Hat man eine oder mehrere Dimensionen der Maschine aus den in derselben wirkenden Kräften mit Hilfe einer theoretischen Formel gefunden und die Verhältnisswerthe aller übrigen Dimensionen festgestellt, so lassen sich aus den absoluten, berechneten Dimensionen mit Hilfe der Verhältnisswerthe alle übrigen Dimensionen der Maschine ermitteln. Die Anzahl der Festigkeitsdimensionen, die an einem Maschinentheil vorkommen, ist gewöhnlich nicht gross, daher würde das Verfahren der Anwendung der Verhältnisswerthe bei Bestimmung von Festigkeitsdimensionen keine bedeutende Erleichterung der Arbeit gewähren, gegen das Verfahren der directen Bestimmung der Festigkeitsdimensionen aus den auf den Maschinentheil wirkenden Kräften. Das letztere Verfahren ist in vielen Fällen auch dem ersteren vorzuziehen, da es genauere Resultate als das Verfahren der Anwendung der Verhältnisswerthe liefert. Hingegen bedient man sich mit entschiedenem Vortheil der Verhältnisswerthe bei Bestimmung der empirischen Dimensionen. Diese bilden die bei weitem grösste Zahl der Abmessungen der Maschinentheile, und deren Bestimmung kann, wie bereits erwähnt, nicht auf theoretischem Wege geschehen. Man kann jedoch für die empirischen Dimensionen der Maschinentheile gewisse Relationen derselben zu einer oder der anderen Festigkeitsdimension aufstellen. Dass dieses Verfahren für die Praxis zulässig ist, haben deren Ausführungen schon zur Genüge bestätigt. Diese Relationen zwischen den empirischen Dimensionen und der einen oder anderen Festigkeitsdimension des Maschinentheiles sind Formeln, durch welche man die Verhältnisswerthe der empirischen Dimensionen ausdrückt. Diese Formeln haben keine theoretische Ableitung, sondern werden ihrer Form nach willkürlich, jedoch zweckentsprechend in möglichst einfacher Gestalt aufgestellt. Bei der Feststellung der Form einer Formel zur Berechnung einer empirischen Dimension genügt es in den meisten Fällen, wenn man ein einfaches Multiplicationsverhältniss mit einer constanten Grösse durch Addition verbindet, wodurch man zu einer Formel von der Form

$$x = a + b\,n$$

gelangt. In dieser Formel bedeuten: x die zu findende empirische Dimension, n die ausgerechnete Festigkeitsdimension, a die Additionalconstante, b ein Coëfficient. Es ist unzulässig, die Relation, die

zwischen x und n durch obige Gleichung ausgedrückt ist, durch ein Multiplicationsverhältniss allein darzustellen. Denn die Anwendung von reinen Multiplicationsverhältnissen zur Bestimmung der empirischen Dimensionen würde bedingen, dass Maschinen gleicher Art, jedoch von verschiedenen, absoluten Grössen, in ihren Formen streng geometrisch ähnlich ausgeführt würden, dies würde aber, wie die Praxis zeigt, zu unpraktischen Resultaten führen; denn gute Ausführungen der Praxis zeigen, dass die empirischen Dimensionen nicht in gleichem Verhältnisse mit jenen Dimensionen wachsen, auf welche sie in der betreffenden empirischen Formel bezogen sind. Obige allgemeine Formel zur Bestimmung von empirischen Dimensionen liefert jedoch nur dann brauchbare Werthe von x, wenn der Werth von n zwischen einer oberen und einer unteren Grenze liegt, welche Grenzen bei der Aufstellung der Formel festgesetzt werden, also bekannt sein müssen. Man sieht aus der Formel, dass der Einfluss der Additionalconstante a auf den Werth von x mit der Abnahme der Variablen n zunimmt und mit dem Wachsen von n immer kleiner wird. Uebrigens hat man es in der Gewalt, durch ein geeignetes Verhältniss von a zu b das langsamere oder raschere Wachsen von x mit der Zunahme von n zu bewirken. Wenn man richtig construirte empirische Formeln anwendet, so braucht man sich bei Bestimmung der empirischen Dimensionen nicht mehr auf das constructive Gefühl allein zu verlassen. Eine weitere Erleichterung der Arbeit bei Bestimmung der empirischen Dimensionen eines Maschinentheiles besteht noch darin, dass man, wo es angeht, für die auf eine Festigkeitsdimension bezogenen Dimensionen eine gemeinschaftliche Einheit aufstellt, die durch eine Formel von der Form $e = a + b\,n$ ausgedrückt wird; e bedeutet die Einheit, a eine Additionalconstante, n eine Festigkeitsdimension und b einen Coëfficienten. Durch Benutzung einer solchen Einheit fällt dann in der Formel zur Berechnung der empirischen Dimension die Additionalconstante wieder fort.

Es ist bereits gesagt worden, dass die auf theoretischem Wege erhaltenen Formeln zur Berechnung der Festigkeitsdimensionen durch Corrections-Coëfficienten, die der Praxis zu entnehmen sind, corrigirt werden müssen. Um zu diesen Coëfficienten zu gelangen, hat man mit der grössten Genauigkeit Versuche anzustellen, bei denen man allen einwirkenden Umständen gewissenhaft Rechnung tragen muss, um zu zuverlässigen Resultaten zu gelangen. Zur Prüfung und Berichtigung der zur Berechnung der empirischen wie Festigkeitsdimensionen eines Maschinentheiles dienenden Formeln durch genaue, der Praxis entnommene Beobachtungen dient nachstehendes Verfahren:

Die Formeln zur Dimensionsberechnung haben allgemein die Form:

$$m = x + y\,n^{r}$$

In dieser Formel bezeichnen:

m und n^v zwei bekannte Grössen, deren Abhängigkeit durch die Gleichung ausgedrückt ist,

x die Summe sämmtlicher Additionalconstanten, die in der Gleichung vorkommen,

y das Product aus sämmtlichen Multiplicationsconstanten, die mit der Grösse n^v verbunden sind, und dem der Praxis zu entnehmenden Corrections-Coëfficienten.

Hat man nun durch Beobachtungen in der Praxis zwei Werthe für m, z. B. m_1 und m_2 und die zugehörigen entsprechenden Werthe von n^v, z. B. n_1^v und n_2^v gefunden, so kann man die Werthe der Additionalconstante x und der Multiplicationsconstante y in folgender Weise finden:

Aus der Gleichung $m = x + y n^v$ ergibt sich

$$x = m - y n^v$$

$$y = \frac{m - x}{n^v}$$

daher entsprechen den Beobachtungswerthen m_1, m_2, n_1^v und n_2^v folgende Gleichungen:

$$x = m_1 - y n_1^v = m_2 - y n_2^v$$

$$y = \frac{m_1 - x}{n_1^v} = \frac{m_2 - x}{n_2^v}$$

$$\text{daher } m_1 - y n_1^v = m_2 - y n_2^v$$

$$\text{und } \frac{m_1 - x}{n_1^v} = \frac{m_2 - x}{n_2^v}.$$

Diese beiden Gleichungen nach y und x aufgelöst, geben:

$$(a) \quad \ldots \quad x = \frac{m_1 n_2^v - m_2 n_1^v}{n_2^v - n_1^v} \quad \text{und} \quad y = \frac{m_2 - m_1}{n_2^v - n_1^v} \quad \ldots \quad (b)$$

Folgende Beispiele sollen die Aufsuchung dieser Constanten erläutern.

1. Angenommen, man habe mit Hilfe einer theoretischen Formel den Durchmesser d eines Zapfens gefunden, der durch die Last P beansprucht wird, ausgedrückt durch die Formel

$$d = y \sqrt{P} = y P^{\frac{1}{2}},$$

wobei blos die Festigkeit des Zapfens berücksichtigt wurde. Es ist nun der Werth von y zu ermitteln und zu untersuchen, ob die Formel wegen anderer, als blosser Festigkeitsrücksichten nicht auch eine Additionsconstante enthalten müsse.

Zu diesem Behufe setzen wir:

$$d = x + y P^{\frac{1}{2}}.$$

Hätte man nun an zwei in der Praxis ausgeführten Zapfen gefunden:

$$d_1 = 80^{mm} \text{ entsprechend der Belastung } P_1 = 1975^{Kg}$$
$$d_2 = 190^{mm} \quad » \quad » \quad » \quad P_2 = 11140^{Kg}$$

so setze man in die Gleichungen (a) und (b) die entsprechenden Beobachtungswerthe ein, nämlich:

$$m_1 = 80, \; m_2 = 190, \; n_1^v = 1975^{\frac{1}{2}}, \; n_2^v = 11140^{\frac{1}{2}}.$$

Man erhält hierdurch:

$$x = \frac{80 \,.\, 11140^{\frac{1}{2}} - 190 \,.\, 1975^{\frac{1}{2}}}{11140^{\frac{1}{2}} - 1975^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

$$y = \frac{190 - 80}{11140^{\frac{1}{2}} - 1975^{\frac{1}{2}}} = 1,8,$$

daher lautet dann die Formel für den Zapfendurchmesser:

$$d = 1,8 \sqrt{P}.$$

2. Es ist eine Formel zur Berechnung der Länge l des Zapfens vom Durchmesser d aufzustellen. Angenommen, die Formel, in welcher alle Umstände berücksichtigt werden, welche auf die Zapfenlänge von Einfluss sind, habe die Form

$$l = x + y\,d,$$

so handelt es sich jetzt darum, die Werthe von x und y zu finden. Hat man nun bei zwei ausgeführten Zapfen von den Durchmessern $d_1 = 80^{mm}$ und $d_2 = 190^{mm}$ die zugehörigen Längen $l_1 = 106^{mm}$ und $l_2 = 238^{mm}$ durch Messung gefunden, so setze man in die Gleichungen (a) und (b) für m_1 und m_2, n_1^v und n_2^v die entsprechenden Beobachtungswerthe ein, nämlich:

$$m_1 = 106, \; n_1^v = 80, \; m_2 = 238 \text{ und } n_2^v = 190.$$

Hierdurch erhält man:

$$x = \frac{106 \,.\, 190 - 238 \,.\, 80}{190 - 80} = 10$$

$$y = \frac{238 - 106}{190 - 80} = 1,2$$

Die Formel für die Länge des Zapfens würde daher lauten:

$$l = 10^{mm} + 1,2\,d.$$

Dass die Maschinentheile, deren Dimensionen zur Prüfung oder Aufstellung von Formeln dienen, sich als vollkommen gut in der Praxis bewährt haben müssen, bedarf wohl kaum der Erwähnung.

Anwendungsbeispiele aus der Lehre von der Zug-, Druck- und Scheerfestigkeit.

1. Welche Zugbelastung kann ein schmiedeiserner Stab von quadratischem Querschnitte mit Sicherheit ertragen, wenn die Seite des Quadrats 30^{mm} beträgt?

Auflösung. Machen wir die Annahme, dass in dem belasteten Stabe eine zweifache Tragsicherheit, also eine Spannung $\mathfrak{S} = \frac{T}{2} = 7{,}5^{Kg}$ herrsche, und setzen in der Grundformel der Zugfestigkeit „$P = f\,\mathfrak{S}$“ die Zahlenwerthe ein, so ist:

$$P = 30 \,.\, 30 \,.\, 7{,}5 = 6750^{Kg}$$

die Kraft, welche der Stab mit Sicherheit ertragen kann.

2. Welche Kraft ist im Stande, obigen Stab zu zerreissen?

Auflösung. Um diese Kraft zu finden, haben wir in der Formel $P = f\,\mathfrak{S}$ für $\mathfrak{S}$ den Bruchmodul für Zug, für Schmiedeisen geltend, nämlich $K = 40$ einzusetzen, dann ist:

$$P = 30 \,.\, 30 \,.\, 40 = 36000^{Kg}$$

die Kraft, welche den Stab zerreisst.

3. Welche Kraft würde den Stab aus Beispiel 1 bis zu seiner Elasticitätsgrenze auf Zug beanspruchen?

Auflösung. Um diese Kraft zu finden, hat man in der Formel $P = f\,\mathfrak{S}$ für $\mathfrak{S}$ den Tragmodul für Zug, d. i. $T = 15$, für Schmiedeisen geltend, einzusetzen, dann ist:

$$P = 30 \,.\, 30 \,.\, 15 = 13500^{Kg}$$

die Kraft, welche den Stab bis zu seiner Elasticitätsgrenze beansprucht.

4. Wie gross ist bei dem schmiedeisernen Stabe in Beispiel 1 die Ausdehnung λ des Stabes, wenn dieser durch die Kraft $P = 6750^{Kg}$ auf Zug beansprucht wird und eine Länge von $l = 5^m$ hat?

Auflösung. Die Querschnittsfläche des Stabes ist $f = 30 \,.\, 30 = 900^{mm^2}$, der Elasticitätsmodul des Schmiedeisens ist $E = 20000$, daher ist nach der für die Ausdehnung geltenden Formel

$$\lambda = \frac{P\,l}{E f} = \frac{6750 \, . \, 5000}{20000 \, . \, 900} = 1{,}875^{mm}$$

die Ausdehnung oder Verlängerung, die der Stab erleiden würde.

5. Welche Ausdehnung erleidet dieser Stab, wenn er bis zu seiner Elasticitätsgrenze belastet wird?

Auflösung. Die Kraft P, welche den Stab bis zu seiner Elasticitätsgrenze beansprucht, erhält man, wenn man in der Formel $P = f\mathfrak{S}$ für f den Querschnitt des Stabes $f = 900^{mm^2}$, und für $\mathfrak{S}$ den Zugtragmodul für Schmiedeisen, $T = 15$ einsetzt. Man hat dann $P = f\,T = 900 \, . \, 15 = 13500^{Kg}$; setzt man nun in der Formel für λ diesen Werth von P, sowie die übrigen Zahlenwerthe ein, so ist:

$$\lambda = \frac{P\,l}{E f} = \frac{13500 \, . \, 5000}{20000 \, . \, 900} = 3{,}75^{mm}$$

die gesuchte Verlängerung des Stabes.

6. Wie gross muss die Kraft P sein, damit dieser Stab von dem Querschnitte $f = 900^{mm^2}$ und der Länge $l = 5^m$ eine Ausdehnung von $\lambda = 10^{mm}$ erleide?

Auflösung. Nach der Formel für λ ist diese Kraft

$$P = \frac{E f \lambda}{l} = \frac{20000 \, . \, 900 \, . \, 10}{5000} = 36000^{Kg}.$$

Diese Belastung ist aber schon, wie aus Beispiel 2 hervorgeht, die Bruchbelastung des Stabes; die Ausdehnung von 10^{mm} würde daher der Stab unmittelbar vor dem Zerreissen erfahren.

7. Welche Druckbelastung kann ein Gusseisenstab mit Sicherheit ertragen, wenn der Querschnitt quadratisch ist und eine Seite des Quadrates 50^{mm} beträgt?

Auflösung. Machen wir die Annahme, dass die in dem belasteten Stabe eintretende Spannung die Hälfte von dem Drucktragmodul, also $\mathfrak{S} = \frac{T_1}{2} = 7{,}5^{Kg}$ betragen soll, und setzen in der Formel $P = f\mathfrak{S}$ die Zahlenwerthe ein, so ist:

$$P = f\mathfrak{S} = 50 \, . \, 50 \, . \, 7{,}5 = 18750^{Kg}$$

die Grösse der gesuchten Kraft.

8. Welche Kraft würde den Stab in Beispiel 7 zerdrücken?

Auflösung. In diesem Falle hat man in der Formel $P = f\mathfrak{S}$ für $\mathfrak{S}$ den Bruchmodul des Gusseisens für Druck, $K_1 = 63$ einzusetzen. Es ist dann:

$$P = 50 \, . \, 50 \, . \, 63 = 157500^{Kg}$$

die Grösse der gesuchten Kraft.

Bei den Beispielen 7 und 8 wird vorausgesetzt, dass der Stab eine so geringe Länge habe, dass eine Biegung desselben durch die Druckbelastung nicht eintrete.

9. Wie gross ist die Zusammendrückung λ, welche der Stab aus Beispiel 7 durch eine Druckbelastung, die ihn bis zur Elasticitätsgrenze beansprucht, erfährt, wenn die Länge des Stabes $l = 300^{mm}$ ist?

Auflösung. Wenn man in der Formel $P = f\mathfrak{S}$, für $\mathfrak{S}$ den Drucktragmodul für Gusseisen, nämlich $T_1 = 15$ und

$$f = 50 \,.\, 50 = 2500^{mm^2}$$

einsetzt, so erhält man

$$P = 2500 \,.\, 15 = 37500^{Kg}$$

die Kraft, welche den Stab bis zu seiner Elasticitätsgrenze zusammendrückt. Setzt man nun in Formel für λ diesen Werth von P, sowie die anderen Zahlenwerthe ein, so ist:

$$\lambda = \frac{Pl}{Ef} = \frac{37500 \,.\, 300}{10000 \,.\, 2500} = 0{,}45^{mm}$$

die Grösse der gesuchten Zusammendrückung oder Verkürzung des Stabes.

10. Wie gross ist der Durchmesser d des kreisförmigen Querschnittes eines gusseisernen Stabes zu machen, der eine Zugbelastung von $P = 1700^{Kg}$ zu tragen hat, und eine Dehnung von $\lambda = 0{,}5^{mm}$ zulässig ist? Die Länge des Stabes ist $l = 3^{m}$.

Auflösung. Aus der Formel für die Verlängerung eines Stabes $\lambda = \frac{Pl}{Ef}$ ist $f = \frac{Pl}{E\lambda}$, setzt man hierin die gegebenen Zahlenwerthe ein, so ist $f = \frac{1700 \,.\, 3000}{10000 \,.\, 0{,}5} = 1020^{mm^2}$, das ist die Querschnittsfläche des Stabes, und da diese eine Kreisfläche ist, so hat man:

$$f = \frac{d^2 \pi}{4} = 1020, \text{ woraus}$$

$$d = \sqrt{\frac{4f}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \,.\, 1020}{3{,}14}} = 36^{mm} \text{ folgt.}$$

Stellen wir noch die Frage, wie gross die in diesem Stabe herrschende Spannung $\mathfrak{S}$ und wie gross die Bruchsicherheit sei.

Aus der Formel $P = f\mathfrak{S}$ folgt

$$\mathfrak{S} = \frac{P}{f} = \frac{1700}{1020} = 1\tfrac{2}{3}^{Kg}.$$

Dividirt man die Belastung, die den Stab zerreissen würde, durch die wirkliche Belastung des Stabes, oder die Bruchbelastung pro Quadrat-Millimeter Querschnittsfläche durch die wirkliche auf 1^{mm^2} Querschnittsfläche entfallende Belastung, das ist also durch die Spannung $\mathfrak{S} = 1^2/_3$, so erhält man die Bruchsicherheit.

Die Kraft, welche den Stab zerreissen würde, ist:

$$P = f K = 1020 \,.\, 11 = 11220^{Kg}$$

daher die Bruchsicherheit $s_b = \frac{11220}{1700} = 6{,}6$, oder da der Bruchmodul des Gusseisens für Zug 11 und die wirkliche Belastung pro Quadrat-Millimeter Querschnittsfläche $\mathfrak{S} = 1^2/_3$ ist, so hat man auch:

$$s_b = \frac{K}{\mathfrak{S}} = \frac{11}{1^2/_3} = 6{,}6, \text{ wie oben.}$$

11. Es ist der Durchmesser d des Rundeisens zu bestimmen, das zu den Schaken einer geschweissten, offenen (deutschen) Kette verwendet werden soll, wenn dieselbe eine Last von $P = 1500^{Kg}$ tragen soll.

Auflösung. Da das Kettenglied so gestaltet ist, dass nur Zugspannungen in den Längenseiten desselben eintreten, so ist der tragende Querschnitt der Kette $f = 2 \,.\, \frac{\pi d^2}{4}$; setzt man diesen Werth von f in die Formel $P = f \mathfrak{S}$, sowie $\mathfrak{S} = 6$ ein, so ist:

$$1500 = \frac{2 \,.\, \pi d^2}{4} \,.\, 6, \text{ woraus}$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \,.\, 1500}{2 \pi \,.\, 6}} = \sqrt{\frac{2 \,.\, 1500}{3{,}14 \,.\, 6}} = 12{,}6^{mm} \text{ folgt.}$$

Eine allgemeine Formel zur Bestimmung des Durchmessers des Rundeisens einer solchen Kette erhält man aus der Formel

$$P = f \mathfrak{S} = 2 \,.\, \frac{\pi d^2 \mathfrak{S}}{4} = \frac{d^2 \pi \mathfrak{S}}{2}, \text{ woraus}$$

$$d = \sqrt{\frac{2 P}{\pi \mathfrak{S}}} = \sqrt{\frac{2 P}{3{,}14 \,.\, 6}} = 0{,}326 \sqrt{P} \text{ folgt.*)}$$

*) Diese Berechnung des Ketteneisens ist nur eine annähernd richtige (für die Praxis jedoch genügend genau), denn streng genommen werden die Glieder einer Kette auf Zug- und Biegungsfestigkeit zugleich beansprucht; die für diesen Fall durchgeführte streng theoretische Berechnung, die ziemlich complicirt ist, liefert kein sicheres, praktisches Ergebniss und kann dieses nur durch die Resultate praktischer Festigkeitsversuche mit Ketten richtiggestellt werden. Nach den von der englischen

Zwischen dem laufenden Gewichte der Kette, das ist dem Gewichte pro Meter Länge und der Tragkraft der Kette besteht ein festes Verhältniss, so, dass man aus dem Gewichte der Kette und ihrer Länge ihre Tragfähigkeit berechnen kann.

Zu einer Formel für das Gewicht der Kette gelangt man wie folgt:

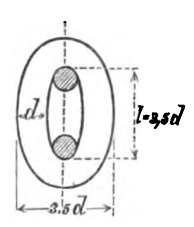


Fig. 1.

Denkt man sich aus einem Rundeisenstab von der Dicke d und der Länge L_1 sämmtliche Kettenglieder, resp. die ganze Kette von der Länge L^m angefertigt und bezeichnen wir die Eisenlänge eines gestreckt gedachten Kettengliedes mit l_1 und die lichte Länge des geschlossenen Gliedes, d. i. die sogenannte Baulänge, mit l (siehe Fig. 1), so gilt folgende Proportion: Es verhält sich die Länge L_1 des Stabes, aus dem eine Kette von der Länge L hergestellt wird, zu dieser Länge L, sowie die Eisenlänge l_1 des gestreckten Kettengliedes zu seiner Baulänge l, also:

$$L_1 : L = l_1 : l \quad \text{oder}$$

$$\frac{L_1}{L} = \frac{l_1}{l}.$$

Marine mit Ketten angestellten Festigkeitsversuchen ergab sich, dass die Festigkeit der Kette mit gewöhnlichen, offenen Gliedern (ohne Steg) sich zur Festigkeit des ausgestreckten Rundeisens, aus dem die Glieder gemacht sind, verhält wie 11 zu 9 und die Festigkeit der einfachen Kette zur Festigkeit der Stegkette wie 7 zu 9, wobei eine vierfache Bruchsicherheit vorausgesetzt wird; man hat daher zur Berechnung des Rundeisens der einfachen Kette nach diesen Angaben in der Gleichung $P = f\mathfrak{S}$, statt f zu schreiben:

$$\frac{11}{9}\frac{\pi d^2}{4}, \text{ es ist } P = \frac{11}{9}\cdot\frac{\pi d^2 \mathfrak{S}}{4}, \text{ woraus}$$

$$d = \sqrt{\frac{36\,P}{11\,\pi\,\mathfrak{S}}} = 1{,}022\sqrt{\frac{P}{\mathfrak{S}}}$$

und wegen der vierfachen Sicherheit gegen Zerreissen mit $\mathfrak{S} = \frac{K}{s} = \frac{40}{4} = 10$

$$d = 1{,}022\sqrt{\frac{P}{10}} = 0{,}323\sqrt{P} \text{ folgt.}$$

Nach dieser Formel erhält man für das obige Zahlenbeispiel

$$d = 0{,}323\sqrt{1500} = 12{,}5^{mm}.$$

Für die Stegkette ist:

$$P = \frac{9}{7}\cdot\frac{11}{9}f\mathfrak{S} = \frac{11}{7}\frac{d^2\pi\mathfrak{S}}{4}, \text{ woraus bei } \mathfrak{S} = 10 \quad d = 0{,}28\sqrt{P} \text{ folgt.}$$

Der Querschnitt des Steges in der Mitte ist ein Rechteck, von den Dimensionen $\frac{2}{3}d$ (gemessen in der Ebene der gekrümmten Mittellinie des Kettengliedes) und d.

Da aber beim Schmieden der Kette ein Eisenverlust durch Abbrand stattfindet, so hat man die Länge l_1 noch um das Stück $\frac{d}{2}$ zu vermehren, wodurch die Länge L_1 übergeht in L_2, man hat nun:

$$\frac{L_2}{L} = \frac{l_1 + 0{,}5\,d}{l}, \text{ hieraus ist: } L_2 = \frac{L\,(l_1 + 0{,}5\,d)}{l},$$

beiderseits mit $f\gamma$ multiplicirt, wobei $f = \frac{d^2\pi}{4}$ den Querschnitt des Rundeisens in Quadratmeter und γ das Gewicht von 1^{m^3} Schmiedeisen bedeutet, so erhält man im linken Theile der Gleichung das Gewicht des ganzen Eisenstabes, aus dem die Kette gemacht wird, also das Gewicht der Kette selbst.

$$L_2 f\gamma = \frac{L\,(l_1 + 0{,}5\,d)\,f\gamma}{l} = G$$

daher das Gewicht G_0 einer 1^m langen Kette

$$G_0 = \frac{G}{L} = \frac{(l_1 + 0{,}5\,d)\,f\gamma}{l}.$$

Die Länge l_1 ergibt sich als die Länge der gekrümmten Mittellinie des geschlossenen Kettengliedes, welche man aus den zwei Halbkreisen von dem Durchmesser $2{,}5\,d$ (siehe Fig. 1) und den zwei parallelen Stücken, von denen jedes $1{,}5\,d$ lang ist, betrachten kann, mit $l_1 = \pi\,(2{,}5\,d) + 2\,.\,1{,}5\,d = 10{,}85\,d$, daher

$$G_0 = \frac{(10{,}85\,d + 0{,}5\,d)\,d^2\pi\gamma}{4\,l} = \frac{11{,}35\,d\,.\,d^2\pi\gamma}{4\,l},$$

den Werth für $l = 3{,}5\,d$ eingeführt, gibt:

$$G_0 = \frac{11{,}35\,d\,.\,d^2\pi\gamma}{4\,.\,3{,}5\,d} = \frac{11{,}35\,d^2\pi\gamma}{14}.$$

Nehmen wir die Dichte des Schmiedeisens zu 7,6 an, so ist $\gamma = 7{,}6\,.\,1000 = 7600^{Kg}$, führt man noch d anstatt in Metern in Millimetern ein, so hat man an die Stelle von d^2 zu setzen: $\frac{d^2}{1000000}$, man erhält dann:

$$G_0 = \frac{11{,}35\,d^2\,.\,3{,}14\,.\,7600}{14\,.\,1000000} = 0{,}0193\,d^2.$$

Setzt man hierin für d^2 den Werth aus der oben entwickelten Gleichung: $d = 0{,}326\sqrt{P}$, nämlich $d^2 = (0{,}326)^2 P$ oder $d^2 = 0{,}106276\,P$ ein, so ist: $G_0 = 0{,}0193\,.\,0{,}106276\,P = 0{,}00205\,P$.

also das Verhältniss zwischen der Tragkraft P und dem Gewichte der Kette pro laufenden Meter: $\frac{G_0}{P} = 0{,}00205$, woraus

$$P = \frac{G_0}{0{,}00205} = 487{,}8\ G_0 \text{ folgt.}$$

Würde z. B. der laufende Meter einer Kette 10^{Kg} wiegen, so wäre ihre Tragkraft $P = 487{,}8 \,.\, 10 = 4878^{Kg}$; der Durchmesser des Ketteneisens dieser Kette wäre:

$$d = 0{,}326 \sqrt{P} = 0{,}326 \sqrt{4878} = 22{,}7^{mm}.$$

Will man erfahren, wie lang die Kette sein müsste, damit sie durch ihr eigenes Gewicht zerreisse, oder bei welcher Länge sie nichts mehr als ihr eigenes Gewicht mit genügender Sicherheit zu tragen vermag, so darf man nur in der Formel $P = f\mathfrak{S} = \frac{\pi d^2 \mathfrak{S}}{2}$ für P den Werth $P = G_0\, L^m$, d. i. also das Gewicht der Kette und für $\mathfrak{S}$ den Bruchmodul des Schmiedeisens für Zug, d. i. $K = 40$ einsetzen, man hat dann:

$G_0\, L^m = \frac{\pi d^2 \,.\, 40}{2} = 20\, \pi\, d^2$, setzt man hierin noch für G_0 den bereits entwickelten Werth $G_0 = 0{,}0193\, d^2$, so ist:

$$0{,}0193\, d^2 L = 20\, \pi\, d^2, \text{ hieraus folgt:}$$

$$L^m = \frac{20\, \pi}{0{,}0193} = 3253{,}88^m,$$

bei welcher Länge die Kette durch ihr eigenes Gewicht zerreisst. Setzt man jedoch in der Formel: $G_0\, L = \frac{\pi d^2 \mathfrak{S}}{2}$ für $\mathfrak{S}$ die zulässige Spannung $\mathfrak{S} = 6$ und für G_0 obigen Werth ein, so ist:

$$0{,}0193\ d^2 L = \frac{\pi d^2 \,.\, 6}{2}, \text{ woraus } L = \frac{6\, \pi}{2 \,.\, 0{,}0193} = 488{,}08^m \text{ folgt;}$$

bei dieser Länge der Kette kann dieselbe ausser ihrem eigenen Gewichte eine weitere Last nicht mehr mit genügender Sicherheit tragen.

12. Es ist der Durchmesser d des Rundeisens für eine offene Ringkette unter Berücksichtigung des Eigengewichtes derselben zu bestimmen, wenn die Kette, deren Glieder ebenso gestaltet sind, wie die der Kette im vorigen Beispiel, 300^m lang ist und eine Tragkraft von $P = 1250^{Kg}$ besitzen soll.

Auflösung. Bezeichnen wir das Eigengewicht der Kette mit G, so ist die die Kette spannende Kraft $P + G$, daher ist in

der Formel für die Zugfestigkeit „$P = f\mathfrak{S}$“ für P zu setzen: $P + G$; man erhält dadurch: $P + G = f\mathfrak{S} = \frac{d^2 \pi \mathfrak{S}}{2}$, oder da $G = G_0 L^m = 0,0193\, d^2 L$ ist, wobei G_0 das Gewicht der Kette pro laufenden Meter und L die ganze Länge der Kette in Metern bezeichnet (siehe das vorige Beispiel), so hat man:

$$0,0193\, d^2 L + P = \frac{d^2 \pi \mathfrak{S}}{2}, \text{ oder}$$

$$P = d^2 \left(\frac{\pi \mathfrak{S}}{2} - 0,0193\, L\right), \text{ woraus folgt:}$$

$$d = \sqrt{\frac{P}{\frac{\pi \mathfrak{S}}{2} - 0,0193\, L^m}} = \sqrt{\frac{2\, P}{18,84 - 0,0386\, L^m}},$$

die Zahlenwerthe für P und L eingesetzt, gibt:

$$d = \sqrt{\frac{2 \,.\, 1250}{18,84 - 0,0386 \,.\, 300}} = 18,58^{mm}$$

13. Es ist der Durchmesser d des Rundeisens zu bestimmen, das zu einer Schleifenkette verwendet wird, deren Glieder, wie nebenstehende Abbildung zeigt, gestaltet sind; *a)* ohne Berücksichtigung, *b)* mit Berücksichtigung des Eigengewichtes; es ist ferner das Verhältniss der Tragkraft P dieser Kette zu dem Gewichte derselben pro laufenden Meter zu ermitteln.

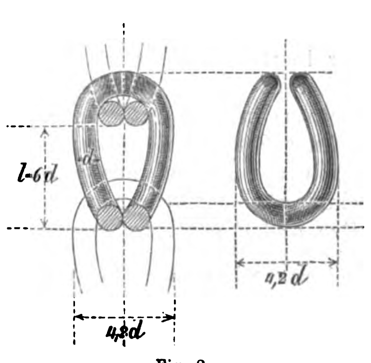


Fig. 2.

Auflösung. Der tragende Querschnitt dieser Kette kann hier mit einer für die Praxis genügend genauen Annäherung gesetzt werden: $f = 4 \,.\, \frac{\pi d^2}{4} = \pi d^2$, daher

$$P = f\mathfrak{S} = d^2 \pi \mathfrak{S}, \text{ woraus}$$

$$d = \sqrt{\frac{P}{\pi \mathfrak{S}}} = \sqrt{\frac{P}{3,14 \,.\, 6}} = 0,23 \sqrt{P} \text{ folgt.}$$

Das Gewicht G_0 findet man in gleicher Weise, wie in Beispiel 11. Es ist:

$$G_0 = \frac{(l_1 + 0,5\, d) f \gamma}{l}, \text{ hier ist aber } \frac{l_1 + 0,5\, d}{l} = 6, \text{ daher}$$

$$G_0 = 6 f\gamma = \frac{6 . \pi d^2 \gamma}{4} = \frac{3 . 3{,}14 \, d^2 . 7600}{2 . 1000000}$$

$G_0 = 0{,}035796 \, d^2$; setzt man hierin für d^2 den Werth aus obiger Gleichung $d = 0{,}23 \sqrt{P}$, nämlich $d^2 = (0{,}23)^2 P = 0{,}0529 \, P$ ein, so ist:

$$G_0 = 0{,}03579 \,.\, 0{,}0529 \, P = 0{,}00189 \, P \text{ und}$$

$$P = \frac{G_0}{0{,}00189} = 529{,}1 \, G_0, \text{ ferner } \frac{G_0}{P} = 0{,}00189.$$

Mit Berücksichtigung des Eigengewichtes der Kette hat man:

$G + P = f \mathfrak{S}$, oder für G den Werth

$G = G_0 \, L = 0{,}0358 \, d^2 \, L$ und für f den Werth

$f = \pi d^2$ eingesetzt, gibt:

$0{,}0358 \, d^2 \, L + P = d^2 \pi \, \mathfrak{S}$, oder

$P = d^2 (\pi \mathfrak{S} - 0{,}0358 \, L)$, woraus

$$d^{mm} = \sqrt{\frac{P}{\pi \mathfrak{S} - 0{,}0358 \, L^m}} \text{ folgt.}$$

14. Es ist der Durchmesser d eines runden Hanfseiles zu berechnen, das eine Last von P^{Kg} tragen soll.

Auflösung. Die Hanfseile sind gewöhnlich dreilitzig und entweder fest oder lose geschlagen, je nachdem sie als stehende oder laufende Seile dienen sollen, und werden demgemäss auch stärker oder schwächer belastet. Stehende Seile sind solche, welche blos zum ruhigen Tragen von Lasten dienen und sich nicht bewegen; laufende Seile sind solche, welche bei Aufzugmaschinen zum Aufziehen der Lasten, ausserdem auch zum Betriebe von Seil- und Schnurscheiben gebraucht werden. Bezeichnet δ die Dicke einer Litze und d den Durchmesser des um die drei Litzen beschriebenen Kreises, so kann $d = 2{,}15 \, \delta$ gesetzt werden; hieraus ist $\delta = \frac{d}{2{,}15}$, oder beiderseits quadrirt, gibt $\delta^2 = \frac{d^2}{(2{,}15)^2}$, beiderseits mit $\frac{\pi}{4}$ multiplicirt $\frac{\delta^2 \pi}{4} = \frac{d^2 \pi}{4 . (2{,}15)^2}$; da der tragende Querschnitt des Seiles offenbar gleich ist der Summe der Querschnitte der drei Litzen, so ist, wenn man in der letzten Gleichung beiderseits mit 3 multiplicirt: $\frac{3 \, \delta^2 \pi}{4} = \frac{3 \, d^2 \pi}{4 \, (2{,}15)^2} = 0{,}5 \, d^2 = f$ der tragende Querschnitt des Seiles. Setzt man nun in der Formel $P = f \mathfrak{S}$ den für f gefundenen Werth, sowie $\mathfrak{S} = 2$ ein, so erhält man aus der Gleichung $P = f \mathfrak{S} = 0{,}5 \, d^2 . 2$ den Seildurchmesser mit $\underline{d = \sqrt{P}}$ für stehende Seile.

Nimmt man, was praktisch zulässig ist, für laufende Seile $\mathfrak{S} = \frac{4}{3}$ an, so folgt aus: $P = f\,\mathfrak{S} = 0{,}5\, d^2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}\, d^2$ der Seildurchmesser $d = \sqrt{\frac{3\,P}{2}} = 1{,}225\,\sqrt{P}$ für laufende Seile.

Die Tragfähigkeit eines Seiles von d^{mm} Durchmesser ist daher

$$\text{für stehende Seile: } P = d^2,$$

$$\text{» laufende » } P = \frac{2}{3}\, d^2.$$

Die Gewichte der Seile verhalten sich unter der Voraussetzung einer gleichen Dichtigkeit wie die Querschnitte, d. h. also wie die Quadrate der Durchmesser. Erfahrungsgemäss beträgt durchschnittlich das Gewicht G_0 auf den laufenden Meter bei den laufenden Seilen $G_0 = 0{,}00071\, d^2$ und bei den stehenden Seilen $G_0 = 0{,}00106\, d^2$.

Setzt man den Werth von d^2 aus den beiden letzten Gleichungen, nämlich $d^2 = \frac{G_0}{0{,}00071}$ und $d^2 = \frac{G_0}{0{,}00106}$ in obige Gleichungen für die Tragfähigkeit der Seile ein, so erhält man den Zusammenhang zwischen dem Gewichte eines Seiles und dessen Tragfähigkeit. Es ist:

$$P = \frac{G_0}{0{,}00071} \cdot \frac{2}{3} = 938{,}9\, G_0 \text{ für laufende Seile,}$$

$$P = \frac{G_0}{0{,}00106} \quad = 943{,}4\, G_0 \text{ » stehende »}$$

Ein laufendes Seil soll z. B. 625^{Kg} tragen, wie gross muss der Durchmesser d dieses Seiles sein, und wie viel wiegen 20^m Seil? Nach Obigem ist für laufende Seile:

$$d = 1{,}225\,\sqrt{P} = 1{,}225\,\sqrt{625} = 30{,}6^{mm},$$

$$G_0 = 0{,}00071 \cdot (30{,}6)^2 = 0{,}6656^{Kg} = \text{Gewicht von } 1^m,$$

daher wiegen 20^m Seil $G = 20\, G_0 = 13{,}312^{Kg}$.

Angenähert erhält man den Seildurchmesser auch, wenn man in der Formel $P = f\,\mathfrak{S}$ den Seilquerschnitt einfach $f = \frac{d^2\,\pi}{4}$ $f = 0{,}785\, d^2$ setzt, während wir für den tragenden Querschnitt fanden $f = 0{,}5\, d^2$. Nach dieser Annäherungsrechnung hätte man aus der Gleichung $P = \frac{d^2\,\pi\,\mathfrak{S}}{4}$

$$d = \sqrt{\frac{4\,P}{\pi\,\mathfrak{S}}} = \sqrt{\frac{4\,P}{3{,}14 \cdot 2}} = 0{,}8\,\sqrt{P};$$

man sieht, dass der Durchmesser hier etwas kleiner ausfällt, als bei der früheren genauen Berechnung.

15. Es ist die Breite b und die Dicke d eines flachen Hanfseils, das eine Last von P^{Kg} tragen soll, zu berechnen.

Auflösung. Die flachen Hanfseile sind aus vier bis sechs runden Seillitzen sehr sorgfältig zusammengenäht, so dass auf eine Litze der vierte, bezüglich der sechste Theil der Last zu rechnen ist. Es heisse die Anzahl der Litzen allgemein n, so ist der tragende Querschnitt dieses Seiles $f = \frac{n \pi d^2}{4}$, daher erhält man aus der Formel $P = f \mathfrak{S} = \frac{n \pi d^2 \mathfrak{S}}{4}$ die Seildicke:

$$d = \sqrt{\frac{4\,P}{n \pi \mathfrak{S}}} = \sqrt{\frac{4\,P}{n\,.\,3{,}14\,.\,2}} = 0{,}8 \sqrt{\frac{P}{n}}$$

und die Breite des Seiles: $b = n\,d = n\,.\,0{,}8 \sqrt{\frac{P}{n}} = 0{,}8 \sqrt{n\,P}.$

16. Es ist der Durchmesser d eines runden Hanfseiles bei Berücksichtigung des Eigengewichtes desselben zu bestimmen, wenn das Seil eine Last von P^{Kg} tragen soll.

Auflösung. In der Formel $P = f \mathfrak{S}$ haben wir für P zu setzen, $P + G$, wobei G das Gewicht des Seiles $G = G_0\,L^m = 0{,}00071\,d^2\,L$ für laufende Seile und $G = 0{,}00106\,d^2\,L$ für stehende Seile bedeutet; man erhält daher:

$$P + 0{,}00071\,d^2\,L = f \mathfrak{S} = 0{,}5\,d^2 \mathfrak{S} = 0{,}5\,d^2\,.\,2 = d^2,$$

oder $P = d^2 (1 - 0{,}00071\,L^m)$ und hieraus folgt die Seildicke

$$d^{mm} = \sqrt{\frac{P}{1 - 0{,}00071\,L}} \text{ für laufende Seile,}$$

$$d^{mm} = \sqrt{\frac{P}{1 - 0{,}00106\,\mathrm{L}}} \text{ für stehende Seile.}$$

Man sieht aus diesen beiden letzten Formeln, dass, wenn $1 = 0{,}00071\,L$, also

$$L = \frac{1}{0{,}00071} = 1408{,}45^m, \text{ bezüglich}$$

$$1 = 0{,}00106\,L^m \text{ und } L = \frac{1}{0{,}00106} = 943{,}396^m$$

wird, die Seildicke d unendlich gross wird, d. h. das laufende Seil kann bei einer Länge von $1408{,}45^m$ weiter nichts als sein eigenes Gewicht tragen, bei dem stehenden Seil tritt dieser Umstand schon bei einer Länge von $943{,}396^m$ ein.

Dass die eben erklärte Bedeutung des unendlich gross werdenden Durchmessers des Seiles bei einer gewissen Länge desselben richtig ist, ergibt sich aus folgender Betrachtung: Setzen wir in der Formel $P = f\mathfrak{S}$ statt P das Gewicht des Seiles als spannende Kraft und fragen nach der Länge des Seiles, wenn in demselben durch sein eigenes Gewicht die zulässige Spannung $\mathfrak{S} = 2$ eintreten soll, so hat man für das laufende Seil:

$$G = f\mathfrak{S} \text{ oder } 0{,}00071\, d^2 L = 0{,}5\, d^2 \,.\, 2,$$

woraus $L = \frac{1}{0{,}00071} = 1408{,}45^m$ und für das stehende Seil

$0{,}00106\, d^2 L = 0{,}5\, d^2 \,.\, 2$, woraus $L = \frac{1}{0{,}00106} = 943{,}396^m$ folgt,

also dieselben Werthe, die oben gefunden wurden.

Die Länge, bei der das laufende Seil durch sein eigenes Gewicht zerreisst, findet sich aus: $0{,}00071\, d^2 L = 0{,}5\, d^2\, \mathfrak{S}$, wenn man darin für $\mathfrak{S}$ den Bruchmodul für Zug, d. i. $K = 9^{Kg}$ (Durchschnittswerth für nicht ganz neue, jedoch wenig gebrauchte Seile) einsetzt und L bestimmt. Man erhält $L = \frac{4{,}5}{0{,}00071} = 6338^m$.

In gleicher Weise findet man die Länge des stehenden Seiles, bei der es durch sein eigenes Gewicht zerreisst.

17. Es ist die Breite b und die Dicke d eines flachen Hanfseiles bei Berücksichtigung seines Eigengewichtes zu finden, wenn dasselbe eine Last von P^{Kg} zu tragen hat.

Auflösung. Wir benützen wieder die Formel $P + G = f\mathfrak{S}$ und setzen hierin für f den Werth $f = \frac{n d^2 \pi}{4}$, wobei n die Anzahl der runden Seillitzen bedeutet. Einen Werth für $G = G_0 L$, wo G_0 das Gewicht pro laufenden Meter flachen Hanfseiles bedeutet, finden wir auf folgende Art: Aus den beiden für runde und flache Seile geltenden Werthen von $P = 938{,}9\, G_0$ und $P = 943{,}4\, G_0$ nehmen wir einen Durchschnittswerth

$$P = \frac{(938{,}9 + 943{,}4)\, G_0}{2} = 941{,}15\, G_0 \text{ oder}$$

abgerundet $P = 940\, G_0$, woraus $G_0 = \frac{P}{940}$ folgt. Aus der bereits in einem früheren Beispiele für das flache Hanfseil entwickelten Formel ohne Berücksichtigung des Eigengewichtes, $d = 0{,}8\sqrt{\frac{P}{n}}$ folgt: $d^2 = 0{,}64\,\frac{P}{n}$, hieraus ist $P = \frac{n d^2}{0{,}64}$; diesen Werth von P in der Formel

$G_0 = \frac{P}{940}$ eingesetzt, gibt: $G_0 = \frac{d^2 n}{0,64 \,.\, 940}$ oder $G_0 = \frac{d^2 n}{601,6}$; führen wir diesen Werth von G_0 in der Gleichung $P + G_0 L = \frac{n \pi d^2 \mathfrak{S}}{4}$ ein und bestimmen d, so hat man:

$$P + \frac{d^2 n L}{601,6} = \frac{n d^2 \pi \mathfrak{S}}{4},$$

oder im linken Theile der Gleichung auf gleiche Benennung gebracht:

$$\frac{601,6\, P + d^2 n L}{601,6} = \frac{n d^2 \pi \mathfrak{S}}{4}, \text{ oder}$$

$$601,6\, P + d^2 n L = \frac{601,6\, n d^2 \pi \mathfrak{S}}{4}, \text{ oder}$$

$$601,6\, P = d^2 n\, (150,4\, \pi \mathfrak{S} - L); \text{ hieraus ist}$$

$$d = \sqrt{\frac{601,6\, P}{n\,(150,4\, \pi \mathfrak{S} - L)}} = \sqrt{\frac{601,6\, P}{n\,(944,512 - L)}},$$

wenn wir nämlich noch $\pi = 3,14$ und $\mathfrak{S} = 2$ einsetzen. Daher ist noch $b = dn = \sqrt{\frac{n \,.\, 601,6\, P}{944,512 - L}}$.

Aus diesen Formeln für d und b geht hervor, dass d und b unendlich gross werden, wenn $L = 944,512^m$ wird; dies bedeutet hier ebenso, wie im vorigen Beispiele, dass das Seil, wenn es $944,512^m$ lang ist, nichts mehr als sein eigenes Gewicht tragen kann; würde man daher an ein Seil, das $944,512^m$ lang ist, noch eine Last anhängen, so würde die in demselben entstehende Spannung die Grösse $\mathfrak{S} = 2$ übersteigen, gleichviel, wie gross auch der Seilquerschnitt sein mag. Das Gleiche gilt von dem runden Hanfseil, wenn es als laufendes Seil eine Länge von $1408,45^m$ und als stehendes Seil eine Länge von $943,396^m$ hat. Wir können uns auch hier von der Richtigkeit der Behauptung, dass ein $944,512^m$ langes flaches Hanfseil nichts weiter als sein eigenes Gewicht tragen kann, wie im vorigen Beispiele, wie folgt, überzeugen: In der Formel $P = f \mathfrak{S}$ statt P das Eigengewicht $G = G_0 L = \frac{d^2 n L}{601,6}$, $f = \frac{n \pi d^2}{2}$ und $\mathfrak{S} = 2$ eingesetzt, gibt:

$$\frac{d^2 n L}{601,6} = \frac{n \pi d^2 \,.\, 2}{4}, \text{ hieraus ist}$$

$$L = \frac{601,6\, \pi}{2} = \frac{601,6 \,.\, 3,14}{2} = 944,512^m \text{ wie oben.}$$

Fragen wir endlich noch, bei welcher Länge zerreisst das flache Hanfseil durch sein eigenes Gewicht, so haben wir in der Formel: $P = f\mathfrak{S}$, für P und f die bereits bekannten Werthe, nämlich statt P den Werth $G = G_0 L = \frac{d^2 n L}{601,6}$, $f = \frac{n\pi d^2}{4}$ und für $\mathfrak{S}$ den Bruchmodul für Zug $K = 9$ einzusetzen, man erhält dadurch:

$$\frac{d^2 n L}{601,6} = \frac{n\pi d^2 . 9}{4}, \text{ woraus sich}$$

$$L = \frac{601,6\,\pi . 9}{4} = 4250,304^m \text{ ergibt.}$$

Schliesslich sei noch bemerkt, dass man die Längen der Seile oder Ketten, bei welchen sie nichts mehr als ihr eigenes Gewicht zu tragen vermögen, Traglängen L_t, und jene Längen, bei denen sie durch ihr eigenes Gewicht schon zerreissen, Zerreisslängen L_z zu nennen pflegt.

18. Es ist der Durchmesser d eines runden Eisendrahtseiles, das als Lastseil dienen soll, zu berechnen, wenn dasselbe eine Zuglast von P^{Kg} zu tragen hat.

Auflösung. Die Eisendrahtseile werden meist aus 36 Drähten gemacht und dabei aus 6 Litzen von je 6 Drähten zusammengesetzt. Bezeichnet δ die Drahtdicke, i die Anzahl der im Seil vorhandenen Drähte und $\mathfrak{S}$ die in den Drähten des belasteten Seiles eintretende Zugspannung, so ist der tragende Querschnitt des Seiles offenbar die Summe der Querschnitte der Drähte. Ein Draht hat den Querschnitt $\frac{\pi\delta^2}{4}$, daher haben i Drähte zusammen den Querschnitt $\frac{\pi\delta^2 . i}{4}$, man hat daher aus der Formel $P = f\mathfrak{S} = \frac{\pi\delta^2 i\mathfrak{S}}{4}$ die Drahtdicke $\delta = \sqrt{\frac{4P}{i\pi\mathfrak{S}}}$; führen wir die Spannung $\mathfrak{S} = 8$ ein, so ist

$$\delta = \sqrt{\frac{4P}{\pi i\mathfrak{S}}} = \sqrt{\frac{4P}{3,14\,i . 8}} = \underline{0,4\sqrt{\frac{P}{i}}}.$$

Bei $i = 36$ kann man setzen: $\frac{d^2\pi}{4} = \frac{2 . i\delta^2\pi}{4}$, daraus ist abgerundet $d = 8,5\,\delta$;

$$\text{für } i = 48, \quad 54, \quad 60, \quad 66, \quad 72$$

$$\text{ergibt sich } \frac{d}{\delta} = 10,25, \; 11,33, \; 12,8, \; 13,25, \; 14,2,$$

wie man dies durch Aufzeichnen verschiedener Seilquerschnitte mit den Drahtzahlen 48, 54, 60, 66, 72 und durch directes Abmessen

finden kann. Aus der Gleichung $\frac{d^2 \pi}{4} = 2\, i \frac{\pi \delta^2}{4}$ folgt die Summe der Querschnitte der i-Drähte $\frac{i \pi \delta^2}{4} = \frac{d^2 \pi}{8}$ = dem tragenden Querschnitte des Seiles. Setzt man nun in der Formel $P = f \mathfrak{S}$ für f den tragenden Querschnitt des Seiles $f \frac{d^2 \pi}{8}$ ein, so erhält man aus:

$$P = \frac{d^2 \pi}{8} . \mathfrak{S} = \frac{d^2 \pi}{8} . 8 = d^2 \pi \text{ den Seildurchmesser}$$

$$d = \sqrt{\frac{P}{\pi}} = \underline{0{,}564 \sqrt{P}, \quad (\text{für } i = 36).}$$

Ein Eisendrahtseil von i Drähten, deren jeder die Dicke δ hat, wiegt pro laufenden Meter Länge $G_0 = \frac{\pi \delta^2 i}{4} \cdot \frac{1000 . \gamma . 1000^{Kg}}{1000000000}$, hierbei wurde die ideelle Dichte γ durch Versuche mit $\gamma = 8{,}91$ gefunden; in dem letzten Ausdrucke für G_0 erscheint das Volumen der i-Drähte von einem 1^m langen Drahtseil, d. i. $\frac{\delta^2 \pi i}{4} . 1000^{mm}$ multiplicirt mit dem Gewichte eines Kubikmillimeters Schmiedeisen, d. i. mit $\frac{\gamma . 1000}{1000000000}$, wobei $\gamma = 8{,}91$ hier deshalb grösser als die wirkliche Schmiedeisendichte in Rechnung gebracht wird, weil das Gewicht der im Seile enthaltenen Hanfseelen in der Rechnung unberücksichtigt blieb. Die ideele Dichte γ fand man dadurch, dass man das Gewicht von 1^m Drahtseil wirklich bestimmte, in der Formel für G_0 einsetzte und daraus γ berechnete. Es ergibt sich somit:

$$G_0 = \frac{\pi \delta^2 i . 1000 . 8{,}91 . 1000}{4 \quad . \quad 1000000000} = 0{,}007\, \delta^2 i, \text{ woraus für } i = 36,$$

$$G_0 = \frac{\delta^2}{4} \text{ folgt, oder genauer } G_0 = 0{,}252\, \delta^2.$$

Bestimmt man auch hier den Zusammenhang zwischen Tragkraft und Gewicht des Seiles, so hat man, wenn man in der Gleichung $G_0 = 0{,}007\, \delta^2 i$ für δ^2 den Werth aus der Gleichung

$$\delta = 0{,}4 \sqrt{\frac{P}{i}}, \text{ nämlich } \delta^2 = 0{,}16 \frac{P}{i} \text{ einsetzt:}$$

$$G_0 = 0{,}007 . 0{,}16\, P = 0{,}00112\, P, \text{ woraus}$$

$$P = \frac{G_0}{0{,}00112} = 892{,}85\, G_0 \text{ folgt.}$$

19. Es ist der Durchmesser d und die Drahtdicke δ eines runden Eisendrahtseiles mit Berücksichtigung seines Eigengewichtes G zu finden, wenn dasselbe eine Zugbelastung von P^{Kg} zu tragen hat.

Auflösung. Wir setzen in der Formel $P = f\mathfrak{S}$ statt P die das Seil spannende Kraft $P + G = P + G_0\, L^m = P + 0{,}007\, \delta^2\, i\, L$ ein und da $f = \frac{i\,\pi\,\delta^2}{4}$ und $\mathfrak{S} = 8$ ist, so hat man, diese Substitutionen durchgeführt:

$$0{,}007\, \delta^2 i\, L + P = \frac{i\,\pi\,\delta^2}{4} \,.\, 8 = 2\, i\,\pi\,\delta^2 \text{ oder}$$

$$P = \delta^2 i\,(2\,\pi - 0{,}007\, L), \text{ woraus } \delta^{mm} = \sqrt{\frac{P}{i\,(2\,\pi - 0{,}007\, L)}} \text{ folgt.}$$

Man sieht aus dieser Formel, dass δ unendlich gross wird, wenn im Nenner der Wurzelgrösse

$$2\,\pi = 0{,}007\, L, \text{ also } L = \frac{2\,\pi}{0{,}007} = 897{,}143^m,$$

oder das Seil $897{,}143^m$ lang wird, d. h. das Seil kann dann bei dieser Länge eine andere Last ausser seinem eigenen Gewichte nicht mehr tragen; es wird also schon durch sein Eigengewicht auf seine Tragfähigkeit mit der Spannung $\mathfrak{S} = 8$ beansprucht. Die Traglänge des Seiles ist daher $L_t = 897{,}143^m$, wie sich auch anderweitig sofort ergibt, wenn man in der Gleichung $P = f\mathfrak{S}$ statt P den Werth $G = G_0\, L = 0{,}007\, \delta^2 i\, L$, $f = \frac{\pi\,\delta^2\, i}{4}$ und $\mathfrak{S} = 8$ einsetzt; man hat dann:

$$0{,}007\, \delta^2 i\, L = \frac{i\,\pi\,\delta^2 \,.\, 8}{4} = 2\, i\,\pi\,\delta^2, \text{ woraus}$$

$$L = \frac{2\,\pi}{0{,}007} = 897{,}143^m \text{ folgt.}$$

Bestimmen wir noch die Zerreisslänge des Seiles, bei der es also schon durch sein eigenes Gewicht zerreisst, so hat man nur in der Formel $P = f\mathfrak{S}$ für P und f die bereits bekannten Werthe, nämlich statt P den Werth $G = G_0\, L = 0{,}007\, \delta^2\, i\, L$, $f = \frac{\pi\,\delta^2\, i}{4}$ und statt $\mathfrak{S}$ den Bruchmodul des Eisendrahtes für Zug, d. i. $K = 60$, einzusetzen, man erhält dann:

$$0{,}007\, \delta^2 i\, L = \frac{\pi\,\delta^2\, i}{4} \,.\, 60 = 15\,\pi\,\delta^2 i, \text{ hieraus ist}$$

$$L = \frac{15\,\pi}{0{,}007} = 6728{,}58^m, \text{ also } \underline{L_z = 6728{,}58^m}.$$

Ist die Drahtzahl $i = 36$, so hat man bei Bestimmung des Seildurchmessers mit Berücksichtigung des Eigengewichtes:

$G_0 L + P = \frac{\delta^2 \pi i \mathfrak{S}}{4} = \frac{d^2 \pi \mathfrak{S}}{8}$; setzt man hierin für G_0 den bereits bekannten Werth $G_0 = 0{,}252\, \delta^2$ und hierin für δ^2 den Werth aus der Gleichung $\delta = \frac{d}{8{,}5}$, also $\delta^2 = \frac{d^2}{(8{,}5)^2} = \frac{d^2}{72{,}25}$, so ist:

$$0{,}252 \cdot \frac{d^2 L}{72{,}25} + P = \frac{d^2 \pi \mathfrak{S}}{8} \text{ und } \mathfrak{S} = 8 \text{ eingesetzt, gibt:}$$

$$\frac{0{,}252\, d^2 L + 72{,}25\, P}{72{,}25} = d^2 \pi, \text{ oder}$$

$$0{,}252\, d^2 L + 72{,}25\, P = 72{,}25\, d^2 \pi, \text{ oder}$$

$$72{,}25\, P = d^2 (72{,}25\, \pi - 0{,}252\, L), \text{ woraus}$$

$$d = \sqrt{\frac{72{,}25\, P}{72{,}25\, \pi - 0{,}252\, L}} = 8{,}5 \sqrt{\frac{P}{72{,}25\, \pi - 0{,}252\, L}}$$

folgt, oder im Nenner $72{,}25\, \pi$ zum Factor herausgehoben, gibt:

$$d = 8{,}5 \sqrt{\frac{P}{72{,}25\, \pi \left(1 - \frac{0{,}252\, L}{72{,}25\, \pi}\right)}} \text{ oder}$$

$$d^{mm} = 0{,}564 \sqrt{\frac{P}{1 - 0{,}001111\, L}}.$$

Man hätte diese Rechnung jedoch auch wie folgt machen können: Aus der Formel: $G_0 L + P = \frac{\delta^2 i \pi \mathfrak{S}}{4}$ folgt, wenn man darin $\mathfrak{S} = 8$ und $G_0 = 0{,}252\, \delta^2$ setzt; $0{,}252\, \delta^2 L + P = 2\, \delta^2 i \pi$, oder da $i = 36$ ist, $P = \delta^2 (72\, \pi - 0{,}252\, L)$, woraus

$\delta = \sqrt{\frac{P}{72\, \pi - 0{,}252\, L}}$ folgt; es ist jedoch für $i = 36$, angenähert $d = 8{,}5\, \delta$, daher $d = 8{,}5 \sqrt{\frac{P}{72\, \pi - 0{,}252\, L}}$, also mit ziemlicher Annäherung derselbe Werth von d, wie oben.

Für flache Drahtseile, die gewöhnlich aus sechs Strähnen, à 24 Drähte, angefertigt werden, bei denen daher $i = 6 \cdot 24 = 144$ ist, gelten zur Berechnung der Drahtdicke δ, des Verhältnisses zwischen Tragfähigkeit und Gewicht, der Trag- und Zerreisslänge dieselben Formeln, wie für die runden Eisendrahtseile.

20. Wie verhalten sich bei gleicher Tragfähigkeit die Durchmesser und die Gewichte der besprochenen offenen Ringketten, runden Eisendraht- und stehenden Hanfseile?

Auflösung. Es bezeichne d_1 den Durchmesser des Ketteneisens, G_1 das Gewicht der Kette pro laufenden Meter; d_2 bezeichne den Durchmesser eines 36drähtigen runden Eisendrahtseiles, G_2 das Gewicht des Seiles pro laufenden Meter; d_3 bezeichne den Durchmesser des stehenden, runden Hanfseiles, G_3 das Gewicht dieses Seiles pro laufenden Meter; es fragt sich also, wie sich die Durchmesser d_1, d_2 und d_3 und wie sich die Gewichte G_1, G_2 und G_3 zu einander verhalten, wenn Kette, Draht- und Hanfseil gleiche Tragfähigkeit haben. Wir drücken die Durchmesser d_1, d_2 und d_3 durch die Tragkraft P aus, und haben nach den in den Beispielen über die Berechnung dieser Durchmesser entwickelten Formeln:

$$d_1 = 0{,}326\sqrt{P},\ d_2 = 0{,}564\sqrt{P},\ d_3 = \sqrt{P},\ \text{daher}\ d_1 : d_2 : d_3 =$$

$$= 0{,}326\sqrt{P} : 0{,}564\sqrt{P} : \sqrt{P}\ \text{oder}\ d_1 : d_2 : d_3 = 326 : 564 : 1000,$$

$$\text{oder}\ \underline{d_1 : d_2 : d_3 = 8 : 14 : 25.}$$

Man sieht aus dieser Proportion, dass der Hanfseildurchmesser am stärksten ausfällt. Wir drücken jetzt die Gewichte G_1 G_2 G_3 durch die Tragkraft P aus und erhalten nach den in den früheren Beispielen über Berechnung des Verhältnisses zwischen Gewicht und Tragkraft entwickelten Formeln:

$$G_1 = 0{,}00205\,P,\ G_2 = 0{,}00112\,P,\ G_3 = 0{,}00106\,P,$$

daher die Proportion:

$$G_1 : G_2 : G_3 = 0{,}00205\,P : 0{,}00112\,P : 0{,}00106\,P,\ \text{oder}$$

$$\underline{G_1 : G_2 : G_3 = 205 : 112 : 106.}$$

Man sieht aus dieser Proportion, dass das Gewicht der Kette am grössten, das Eisendrahtseil nur wenig schwerer als das Hanfseil ist. Es ist ferner einleuchtend, dass diese Proportion bei Entscheidung der Frage, „ob Kette, Draht- oder Hanfseil verwendet werden soll", wegen Berücksichtigung des Kostenpunktes Anwendung findet.

Bei den für die Berechnung von Drahtseilen bisher entwickelten Formeln wurde die zulässige Inanspruchnahme (Spannung) pro Quadrat-Millimeter tragenden Querschnittes mit $\mathfrak{S} = 8^{Kg}$ angenommen; demgemäss könnte es scheinen, als ob die Bruchsicherheit des Seiles $s_b = \frac{K}{\mathfrak{S}} = \frac{60}{8} = 7\,^1/_2$ wäre; dem ist jedoch nicht so, die Bruchsicherheit ist weit geringer, denn: Bei der Benützung eines Drahtseiles als Lastseil wird dasselbe fast immer auf einer Trommel auf- und wieder abgewickelt (Förderseil in Schächten) und erleidet

hierbei eine Biegung, welcher es einen Widerstand (Seilsteifheit) entgegensetzt; durch diese Biegung allein wird schon ein bedeutender Theil der Festigkeit des Seiles absorbirt, den übrig bleibenden Theil nimmt die Zugbelastung P in Anspruch, und diesem Umstande muss Rechnung getragen werden.

Zu einem Ausdrucke für die Biegungsbeanspruchung (Biegungsspannung) gelangt man auf folgende Art: Es heisse die beim Umbiegen des Seiles in den Drähten desselben entstehende Biegungsspannung s, der Halbmesser der Seiltrommel r, die Dicke eines Drahtes δ; ist die Trommel von dem Drahtseil umgeben, so wird der Draht im Seile, der am weitesten von dem Trommelumfange entfernt ist, die grösste Streckung durch die Biegung erfahren, die Länge l der Mittellinie eines Stückes dieses Drahtes ist für den Centriwinkel α offenbar

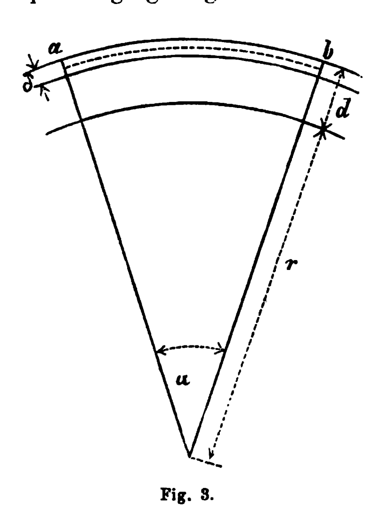


Fig. 3.

$$l = \left(r + d - \frac{\delta}{2}\right) \alpha,$$

wenn d der Seildurchmesser ist (siehe Fig. 3). Die am meisten ausgedehnte äusserste Faserschichte des obersten Drahtes hat eine Länge $\widehat{ab} = l_1 = (r + d)\,\alpha$, daher die Differenz beider Längen, das ist also die Ausdehnung λ des Drahtes

$$\lambda = l_1 - l = (r + d)\,\alpha - \alpha\left(r + d - \frac{\delta}{2}\right), \text{ oder}$$

$$\lambda = \alpha\left[r + d - \left(r + d - \frac{\delta}{2}\right)\right] = \frac{\alpha\,\delta}{2}.$$

Nach dem Begriffe des Elasticitätsmoduls E eines Körpers findet die Proportion statt:

$$s : E = \lambda : l, \text{ hieraus ist}$$

$$\lambda = \frac{s\,l}{E}, \text{ hierin für } \lambda \text{ und } l \text{ obige Werthe gesetzt:}$$

$$\frac{\alpha\,\delta}{2} = \frac{\alpha\,s\left(r + d - \frac{\delta}{2}\right)}{E}, \text{ oder}$$

$$s = \frac{E\,\delta}{2\left(r + d - \frac{\delta}{2}\right)}.$$

Man ersieht aus dieser Gleichung, dass die Biegungsspannung um so grösser sein wird, je kleiner der Trommelhalbmesser r wird; die letzte Gleichung nach r aufgelöst:

$$2\,s\left(r + d - \frac{\delta}{2}\right) = E\,\delta, \text{ oder}$$

$$2\,s\,r + 2\,s\,d - s\,\delta = E\,\delta, \text{ hieraus ist}$$

$$r = \frac{E\,\delta + s\,\delta - 2\,s\,d}{2\,s};$$

um jedoch zu einer einfachen Beziehung zwischen den Grössen E, r, δ und s zu gelangen, vernachlässigen wir im Zähler des rechten Theiles die beiden sich einander zum Theile aufhebenden Grössen $s\,\delta - 2\,s\,d$, wodurch sich r etwas grösser ergibt, da die Differenz $s\,\delta - 2\,s\,d$ negativ ist; man erhält durch diese Vernachlässigung: $r = \frac{E\,\delta}{2\,s}$. Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, dass der Trommelhalbmesser r um so grösser werden muss, je kleiner die Biegungsspannung genommen und je stärker die Drahtdicke δ wird. Für die praktische Ausführung der Seiltrommel wünscht man selbstverständlich, dass der Halbmesser derselben so klein als möglich gemacht werde; man wird daher das Verhältniss des kleinsten Halbmessers r zur Drahtdicke so wählen, so dass die Biegungsspannung möglichst klein, daher die Zug- oder Dehnungsspannung möglichst gross, also auch die Tragkraft des Seiles möglichst gross wird. Es ist die Tragkraft P wie bekannt: $P = \frac{\mathfrak{S}\,i\,\pi\,\delta^2}{4}$, wenn i die Anzahl der Dräthe ist. Die Zugspannung $\mathfrak{S}$ und die Biegungsspannung s setzen sich zusammen zu einer Totalspannung $s_1 = \mathfrak{S} + s$, welche selbstverständlich den Tragmodul (Grenzmodul, Beanspruchung bis zur Elasticitätsgrenze) nicht erreichen darf. Setzt man in der letzten Gleichung für P den Werth für $\mathfrak{S}$, nämlich $\mathfrak{S} = s_1 - s$, oder da $s = \frac{E\,\delta}{2\,r}$ ist, $\mathfrak{S} = s_1 - \frac{E\,\delta}{2\,r}$ ein, so erhält man:

$$P = \frac{\left(s_1 - \frac{E\,\delta}{2\,r}\right) i\,\pi\,\delta^2}{4},$$

dieser Werth von P soll ein Maximum werden; da aber bei der Berechnung eines Drahtseiles gewöhnlich die Drahtzahl i angenommen wird, so ist i eine constante Grösse; wir haben daher nur zu untersuchen, wann der Ausdruck $\left(s_1 - \frac{E\,\delta}{2\,r}\right)\delta^2$ für die veränderliche Grösse δ ein Maximum wird. Den ersten Differentialquotienten dieses Ausdruckes nach δ gebildet, gleich Null gesetzt:

$$\frac{dP}{d\delta} = 2\,\delta\left(s_1 - \frac{E\delta}{2\,r}\right) - \frac{E\delta^2}{2\,r} = 0, \text{ hieraus ist}$$

$$\frac{2\,r s_1 - E\delta}{2\,r} = \frac{E\delta}{4\,r}, \text{ oder}$$

$$4\,r s_1 - 2\,E\delta = E\delta, \text{ woraus}$$

$$r = \frac{3\,E\delta}{4\,s_1} \text{ sich ergibt;}$$

wir fanden oben $r = \frac{E\delta}{2\,s}$, diese beiden Werthe von r einander gleich gesetzt:

$$\frac{3\,E\delta}{4\,s_1} = \frac{E\delta}{2\,s}, \text{ hieraus ist } s = \frac{2\,s_1}{3}, \text{ also}$$

$$\mathfrak{S} = s_1 - s = s_1 - \frac{2\,s_1}{3} = \frac{s_1}{3},$$

das Verhältniss $\frac{r}{\delta}$ ergibt sich $\frac{r}{\delta} = \frac{3\,E}{4\,s_1}$; damit r nicht zu gross werde, wird man selbstverständlich s_1 so gross als möglich nehmen, man wählt in der Regel $s_1 = 18$, bis $s_1 = 24$; nehmen wir hier den Durchschnitt und setzen $s_1 = 21$, so wird $\mathfrak{S} = 7$ und $s = 14$; hiermit hat man, da für Eisendraht $E = 20000$ ist,

$$r = \frac{3\,.\,20000\,\delta}{4\,.\,21} = 714{,}28\,\delta;$$

da der Festigkeits-Coëfficient des Eisendrahtes $K = 60$ ist, so ergibt sich der Grad der Bruchsicherheit des Seiles mit

$$s_b = \frac{K}{s_1} = \frac{60}{21} = 2{,}85,$$

würden wir $\mathfrak{S} = 8$ setzen, so wäre $s_1 = 24$, die Bruchsicherheit würde noch kleiner, aber auch der Halbmesser r würde kleiner.

Setzen wir jedoch $\mathfrak{S}$ und s nicht im Verhältnisse $\frac{\mathfrak{S}}{s} = \frac{1}{2}$ ein, sondern z. B. $\mathfrak{S} = 8$, $s = 12$, also $s_1 = 20$ ein, was einer Bruchsicherheit von $s_b = \frac{60}{20} = 3$ entspricht, so erhält man wieder einen grösseren Halbmesser, nämlich

$$r = \frac{E\delta}{2\,s} = \frac{20000\,\delta}{2\,.\,12} = 833{,}3\,\delta.$$

Für Gussstahl-Drahtseile hat man, da in diesem Falle $E = 27500$ ist, den kleinsten Trommelhalbmesser

$$r = \frac{3 \,.\, 27500 \,\delta}{4 \, s_1} = \frac{20625 \,\delta}{s_1};$$

wir wählen hier $s_1 = 30$, dieses gibt einen Sicherheitsgrad von

$$s_b = \frac{K}{s_1} = \frac{115}{30} = 3^5/_6,$$

die einzusetzende Zugspannung ist also $\mathfrak{S} = \frac{s_1}{3} = \frac{30}{3} = 10$, und der Halbmesser r ergibt sich zu:

$$r = \frac{20625 \,\delta}{30} = 687{,}5 \,\delta.$$

Bei der Benützung eines Seiles zur Förderung ist noch der Umstand zu beachten, dass bei der Spannung des Seiles im Augenblicke des Anlassens der Maschine eine stossähnliche, schädliche Wirkung auf das Seil ausgeübt wird; soll durch diese Wirkung der Draht nicht bis zur Elasticitätsgrenze angestrengt werden, so soll nach Grashof die Seillänge $l > 73{,}7 \, c^2$ sein, wobei c die Seilgeschwindigkeit in Metern pro Secunde bedeutet; daher erscheint es nöthig, bei kleineren Seillängen zwischen Seil und Fördergefäss ein elastisches Zwischenglied zum Schutze des Seiles einzuschalten, welches die schädliche Stosswirkung aufzunehmen hat.

Es wäre z. B. ein Drahtseil zu berechnen, das eine Länge von $L = 200^m$ und eine Zuglast von $P = 1500^{Kg}$ auszuhalten hat, das Eigengewicht des Seiles ist zu berücksichtigen, die Anzahl der Drähte sei $i = 72$.

Es ist $P + G = f \mathfrak{S}$, setzen wir in dieser Gleichung die Werthe

$$G = G_0 \, L = 0{,}007 \, \delta^2 i L \text{ und } f = \frac{\pi \delta^2 i}{4} \text{ ein, so erhält man:}$$

$$P + 0{,}007 \, \delta^2 i L = \frac{\delta^2 i \pi \mathfrak{S}}{4}, \text{ oder}$$

$$4 P + 0{,}028 \, \delta^2 i L = \delta^2 i \pi \mathfrak{S}, \text{ oder}$$

$$i \delta^2 (\pi \mathfrak{S} - 0{,}028 \, L) = 4 P, \text{ hieraus ist}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{4 P}{i (\pi \mathfrak{S} - 0{,}028 \, L)}} = \sqrt{\frac{4 \,.\, 1500}{72 \, (3{,}14 \,.\, 7 - 0{,}028 \,.\, 200)}},$$

oder $\delta = 2{,}25^{mm}$; für $i = 72$ ist $d = 14{,}2 \, \delta$, daher $d = 14{,}2 \,.\, 2{,}25 =$ $= 31{,}95$ und rund $d = 32^{mm}$.

Der Halbmesser r der Seiltrommel ergibt sich zu $r = 714{,}28\,\delta =$ $= 714{,}28 \,.\, 2{,}25 = 1607^{mm}$.

21. Wie verhalten sich bei gleichen Gewichten die Durchmesser d_1, d_2, d_3 und die Tragfähigkeiten P_1, P_2, P_3 von offener Ringkette, rundem 36drähtigen Draht- und stehendem runden Hanfseil?

Auflösung. In den früheren Beispielen über Berechnung des Verhältnisses zwischen Gewicht und Tragkraft von Kette, Draht- und Hanfseil hatten wir die Gleichungen:

$$(a) \ldots G_1 = 0{,}0193\, d^2, \quad G_2 = 0{,}252\, \delta^2 \ldots (b) \text{ giltig für } i = 36$$

$$G_3 = 0{,}00106\, d_3^2 \ldots (c)$$

Aus Gleichung (a) folgt: $d_1 = \sqrt{\dfrac{G_1}{0{,}0193}}$.

Bei der Gewichtsberechnung eines 36drähtigen Seiles hatten wir die Gleichung $\dfrac{d_2^2\,\pi}{4} = 2\,.\,i\,\dfrac{\pi\,\delta^2}{4}$, hieraus folgt $\delta^2 = \dfrac{d^2}{2\,i}$ und da $i = 36$ ist, so hat man $\delta^2 = \dfrac{d_2^2}{72}$.

Setzt man diesen Werth von δ^2 in Gleichung (b) ein, so hat man: $G_2 = 0{,}252\,.\,\dfrac{d_2^2}{72}$, woraus $d_2 = \sqrt{\dfrac{72\,G_2}{0{,}252}}$ folgt.

Aus Gleichung (c) ergibt sich:

$$d_3 = \sqrt{\frac{G_3}{0{,}00106}}, \text{ daher die Proportion:}$$

$$d_1 : d_2 : d_3 = \sqrt{\frac{G_1}{0{,}0193}} : \sqrt{\frac{72\,G_2}{0{,}252}} : \sqrt{\frac{G_3}{0{,}00106}} \text{ oder}$$

$$d_1 : d_2 : d_3 = \sqrt{51{,}81\,G_1} : \sqrt{285{,}71\,G_2} : \sqrt{943{,}396\,G_3}$$

und da $G_1 = G_2 = G_3$ ist, so hat man auch:

$$d_1 : d_2 : d_3 = \sqrt{51{,}81} : \sqrt{285{,}71} : \sqrt{943{,}396} \text{ oder}$$

$$\underline{d_1 : d_2 : d_3 = 7{,}19 : 16{,}9 : 30{,}7.}$$

Um das Verhältniss der Tragkräfte P_1, P_2, P_3 bei gleichem Gewichte zu finden, drücken wir die Grössen P_1, P_2 und P_3 durch das Gewicht G aus und haben nach den in früheren Beispielen über die Berechnung des Verhältnisses zwischen Tragkraft und Gewicht entwickelten Formeln: $P_1 = 487{,}8\,G$, $P_2 = 892{,}85\,G$, $P_3 = 943{,}4\,G$ die Proportion:

$$P_1 : P_2 : P_3 = 487{,}8\,G : 892{,}85\,G : 943{,}4\,G \text{ oder:}$$

$$P_1 : P_2 : P_3 = 487{,}8 : 892{,}85 : 943{,}4, \text{ und abgerundet:}$$

$$\underline{P_1 : P_2 : P_3 = 488 : 893 : 943.}$$

Man ersieht aus dieser Proportion, dass die Tragkraft des Hanfseiles am grössten, nahezu zweimal so gross als die der Kette ist, ein Umstand, der bei Berücksichtigung des Kostenpunktes beachtenswerth ist.

In neuerer Zeit verwendet man häufig mit Vortheil statt Eisendrahtseile Gussstahldrahtseile, weil diese wegen der grösseren Festigkeit des Gussstahldrahtes gegenüber dem Eisendraht dünner und leichter ausfallen, als Eisendrahtseile, wie nachfolgende Rechnung zeigt:

Wenn wir bei Berechnung der Drahtdicke δ das Eigengewicht des Seiles berücksichtigen, so haben wir die Formel zu gebrauchen: $P + G = f\mathfrak{S}$, worin G das Eigengewicht des Seiles bedeutet. Um das Gewicht G bestimmen zu können, betrachten wir das Seil als einen prismatischen Körper und erhalten dadurch $G = f\,l\,\gamma$, wobei $f = \frac{i\,\pi\,\delta^2}{4}$ den tragenden Seilquerschnitt und γ das Gewicht eines Kubikmillimeters Gussstahldrahtseil bedeutet.

Die Gleichung $P + f\,l\,\gamma = f\mathfrak{S}$ nach f aufgelöst, gibt:

$P = f\mathfrak{S} - f\,l\,\gamma = f(\mathfrak{S} - l\gamma)$, daher $f = \frac{P}{\mathfrak{S} - l\gamma} = \frac{i\,\pi\,\delta^2}{4}$, woraus

$\delta = \sqrt{\frac{P}{(\mathfrak{S} - l\gamma)\frac{\pi}{4}i}}$ folgt. In dieser Gleichung sind δ und l in Millimetern zu nehmen. Führen wir jedoch l in Metern, statt in Millimetern ein, so hat man, da $l^{mm} = 1000\,L^m$ ist,

$\delta = \sqrt{\frac{P}{(\mathfrak{S} - 1000\,L\gamma)\frac{\pi}{4}i}}$; wegen der im Seile vorkommenden und in der Rechnung unberücksichtigt bleibenden Hanfseelen wird auch hier γ etwas grösser in die Rechnung eingeführt, als dies bei Vernachlässigung des Gewichtes der Hanfseelen geschehen würde. Durch Versuche fand man, dass die Dichte des Gussstahldrahtseiles 9,5541, daher das Gewicht eines Kubikmillimeters Gussstahldrahtseil $\gamma = \frac{9{,}5541 \,.\, 1000^{Kg}}{1000000000}$ ist, denn 1^{m^3} Wasser wiegt 1000^{Kg}, daher wiegt 1^{m^3} Gussstahldrahtseil $9{,}5541 \times 1000^{Kg}$, weil die Dichte des letzteren 9,5541 ist, und da $1^{m^3} = 1000000000^{mm^3}$ ist, so

folgt obiger Ausdruck für γ. Man erhält nun für die Drahtdicke:
$\delta = \sqrt{\frac{P}{(\mathfrak{S} - 0{,}0095541\, L^m)\frac{\pi}{4} i}}$. Es hat sich durch die Erfahrung herausgestellt, dass bei den Eisen- und Gussstahldrahtseilen, die als Lastseile verwendet werden, der Seilverbrauch wegen Abnützung sich am billigsten stellt, wenn die Seile im neuen Zustande eine 10fache Sicherheit gegen Zerreissen, ohne Rücksicht auf die Biegungsbeanspruchung besitzen, also $\mathfrak{S} = \frac{K}{10}$, dieses gibt bei Gussstahldrahtseilen abgerundet: $\delta^{mm} = \sqrt{\frac{P^{Kg}}{(10 - 0{,}0075\, L^m)\, i}}$. Aus dieser Formel ist ersichtlich, dass δ = unendlich gross wird, wenn $10 = 0{,}0075\, L$, also $L = \frac{10}{0{,}0075}$ oder $L = 1333{,}33^m$ wird, dies bedeutet, dass das Seil bei dieser Länge schon durch sein eigenes Gewicht auf seine ganze Tragfähigkeit beansprucht wird und daher nichts mehr tragen kann. Genauer findet man diese Traglänge L_t, wenn man in der Formel $P + fl\gamma = f\mathfrak{S}$, $P = 0$ setzt; man hat dann $l = \frac{\mathfrak{S}}{\gamma}$, oder für $\mathfrak{S}$ und γ die Werthe gesetzt $\mathfrak{S} = \frac{K}{10} = \frac{115}{10}$ gibt: $l^{mm} = \frac{11{,}5}{0{,}0000095541} = 1203684$ oder $\underline{L_t = 1203{,}684^m}$. Die Zerreisslänge $L_z = \frac{K}{\mathfrak{S}} L_t = 10 \,.\, 1203{,}684 = 12036{,}84^m$, oder auch direct gefunden aus der Formel:
$l = \frac{K}{\gamma} = \frac{115}{0{,}0000095541} = 12036{,}84^m$; bei dieser Länge zerreisst das Gussstahldrahtseil schon durch sein eigenes Gewicht. Die letzte für δ entwickelte Formel lautet in genauerer Darstellung:

$\delta = \sqrt{\frac{P}{(11{,}5 - 0{,}009554\, L)\frac{\pi}{4} i}}$, oder wenn wir im Nenner mit $\frac{\pi}{4}$ multipliciren, $\delta = \sqrt{\frac{P}{(9{,}0275 - 0{,}0075\, L)\, i}}$.

Vergleichen wir nun die Gewichte G_1 und G_2 des Gussstahl- und Eisendrahtseiles bei gleicher Tragfähigkeit und gleicher Bruchsicherheit; das Gewicht eines 1^m langen Gussstahldrahtseiles ist:

$$G_1 = fl\gamma = \frac{\pi \delta_1^2}{4} i_1 \,.\, 1000 \,.\, 0{,}0000095541 = 0{,}0075\, \delta_1^2\, i_1.$$

Das Gewicht eines 1^m langen Eisendrahtseiles hatten wir $G_2 = 0{,}0071\,\delta_2^2\,i_2$; setzen wir in diese zwei Gleichungen für G_1 und G_2 anstatt $\delta_1^2\,i_1$ und $\delta_2^2\,i_2$ die Werthe, die sich aus den Gleichungen für die Drahtdicken, ohne Berücksichtigung des Eigengewichtes ergeben, ein, so hat man: Aus

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{P}{9{,}0275\,i_1}} \text{ ist } \delta_1^2\,i_1 = \frac{P}{9{,}0275}$$

$$\text{aus } \delta_2 = \sqrt{\frac{4\,P}{\pi\,i_2\,\mathfrak{S}}} = \sqrt{\frac{4\,P}{3{,}14\,i_2\,.\,\frac{60}{10}}} = \sqrt{\frac{2\,P}{9{,}42\,i_2}}$$

ist $\delta_2^2\,i_2 = \frac{2\,P}{9{,}42}$; diese Werthe von $\delta_1^2\,i_1$ und $\delta_2^2\,i_2$ in obige Gleichungen für G_1 und G_2 eingesetzt, gibt:

$$G_1 = 0{,}0075\,\frac{P}{9{,}0275} \text{ und } G_2 = \frac{0{,}0071\,P\,.\,2}{9{,}42} \text{ oder}$$

$$G_1 = 0{,}00083\,P \text{ und } G_2 = 0{,}00151\,P, \text{ daher}$$

$$G_1 : G_2 = 0{,}00083\,P : 0{,}00151\,P, \text{ oder}$$

$$\underline{G_1 : G_2 = 83 : 151.}$$

Aus dieser Proportion ersieht man, dass ein Gussstahldrahtseil, das ebenso tragfähig ist, wie ein Eisendrahtseil, nahezu nur halb so viel wiegt, wie das letztere; daher kommt es auch, dass die Trag- und Zerreisslängen des Gussstahldrahtseiles um ein ziemliches grösser sind, als die des Eisendrahtseiles.

Es sei beispielsweise ein Gussstahldrahtseil zu berechnen, das eine Zuglast von $P = 2000^{Kg}$ zu tragen hat, die Anzahl der Drähte sei $i = 72$, die Länge des Seiles sei $L = 500^m$, das Eigengewicht desselben ist zu berücksichtigen.

Setzen wir in der bereits entwickelten Formel

$$\delta = \sqrt{\frac{P}{(\mathfrak{S} - 0{,}0095541\,L)\,\frac{i\,\pi}{4}}} \text{ die Zahlenwerthe ein, so ist:}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2000}{(10 - 0{,}0095541\,.\,500)\,\frac{3{,}14\,.\,72}{4}}} = 2{,}6^{mm};$$

hiermit wird nach einer früheren kleinen Tabelle der Seildurchmesser $d = 14{,}2\,.\,2{,}6 = 36{,}92$ und rund $d = 37^{mm}$; der kleinste Halbmesser r der Seiltrommel wird nach der bereits früher entwickelten Formel $r = 687{,}5\,\delta$. oder $r = 687{,}5\,.\,2{,}6 = 1787{,}5^{mm}$.

Behindern jedoch locale Umstände nicht, dass der Trommelhalbmesser grösser, als hier ausgerechnet ist, genommen werden kann, z. B. $r = 3000^{mm}$, so ergibt sich die Seildicke d weit schwächer als 37^{mm}, und zwar wie folgt:

Wir fanden in Aufgabe 20 die Biegungsspannung

$$s = \frac{E\delta}{2\,r} = \frac{27500\,\delta}{2\,.\,3000} = \frac{55\,\delta}{12}.$$

hiermit erhält man die Zugspannung

$$\mathfrak{S} = s_1 - s = 30 - \frac{55\,\delta}{12} = \frac{360 - 55\,\delta}{12},$$

wobei $s_1 = 30$ die totale Beanspruchung des Seiles pro Quadrat-Millimeter tragenden Querschnittes ist. Diesen Werth von $\mathfrak{S}$ in obige Gleichung für δ eingesetzt, erhält man eine unreine Gleichung des dritten Grades nach δ; um die zeitraubende Auflösung dieser Gleichung zu umgehen, nehmen wir die Drahtdicke δ probeweise an und berechnen die Drahtzahl i, so lange, bis sie durch 6 theilbar ist, damit man das Seil aus 6 Litzen zusammensetzen kann. Nehmen wir z. B. $\delta = 2{,}6^{mm}$, so ergibt sich aus obiger Gleichung für δ

$$i = \frac{P}{\frac{\delta^2\pi}{4}(\mathfrak{S} - 0{,}0095541\,L)}, \text{ es ist aber}$$

$$s = \frac{55\,\delta}{12} = \frac{55\,.\,2{,}6}{12} = 11{,}9 \text{ und rund } s = 12,$$

daher $\mathfrak{S} = s_1 - s = 30 - 12 = 18$; die Zahlenwerthe eingesetzt:

$$i = \frac{2000}{(2{,}6)^2\,\frac{3{,}14}{4}\,(18 - 0{,}0095541\,.\,500)} = 28{,}57,$$

offenbar eine nicht passende Zahl; nehmen wir aber $\delta = 2{,}3$, so ergibt sich abgerundet $i = 36$, hiermit wird $d = 8{,}5\,\delta$, oder $d = 8{,}5\,.\,2{,}3 = 19{,}55^{mm}$. Man ersieht aus dieser Berechnung, dass in dem Falle, wo der Trommelhalbmesser unbehindert gross genug genommen werden kann, das Seil bei weitem schwächer ausfällt, trotzdem die Tragkraft desselben und der Grad der Bruchsicherheit dieselben bleiben. Der Kostenpunkt entscheidet hier offenbar zu Gunsten der grösseren Trommel und des schwächeren Seiles; wenn auch die einmaligen Anschaffungskosten der grösseren Trommel grösser ausfallen, so werden diese Mehrkosten gegenüber der kleineren Trommel durch das billigere Seil, das wegen seiner Abnützung beim Betriebe durchschnittlich alle zwei Jahre erneuert werden muss, reichlich wieder aufgewogen.

Endlich ist noch zu erwähnen, dass es sich empfiehlt, sehr lange Drahtseile aus einzelnen Theilen von nach der Tiefe zu abnehmenden Drahtstärken so zu machen, dass das Seil nahezu ein Körper von der Form der gleichen Festigkeit wird; dadurch wird das Gewicht des Seiles kleiner und die Tragkraft grösser.

Am einfachsten ist es, die einzelnen Theile des Seiles gleich lang zu machen und mit einer constanten Drahtzahl zu versehen. Es heisse die Anzahl der Drähte i, die Länge eines Seilstückes l, die Drahtdicken der einzelnen Theile δ_1 δ_2 $\delta_3 \ldots\ldots \delta_n$, so gelten für die einzelnen Theile des Seiles folgende Gleichungen:

$$P + 0{,}0075\,\delta_1^2\,il = \frac{\pi\,\delta_1^2\,i\,\mathfrak{S}}{4};$$

hierin bedeutet das zweite Glied des linken Theiles das Gewicht des untersten, schwächsten Gussstahldrahtseil-Theiles (l in Metern zu nehmen); setzen wir der Abkürzung wegen $0{,}0075 = g$, so ist

$$P + g\,\delta_1^2\,il = \frac{\pi\,\delta_1^2\,i\,\mathfrak{S}}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

für die erste Seillänge von der Drahtdicke δ_1,

$$P + g\,\delta_1^2\,il + g\,\delta_2^2\,il = \frac{\pi\,\delta_2^2\,i\,\mathfrak{S}}{4} \quad \ldots\ldots (2)$$

für die zweite Seillänge von der Drahtdicke δ_2,

$$P + g\,\delta_1^2\,il + g\,\delta_2^2\,il + g\,\delta_3^2\,il = \frac{\pi\,\delta_3^2\,i\,\mathfrak{S}}{4} \quad \ldots\ldots (3)$$

für die dritte Seillänge von der Drahtdicke δ_3,

. . . .

$$P + gil\,(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \ldots\ldots \delta_n^2) = \frac{\pi\,\delta_n^2\,i\,\mathfrak{S}}{4} \quad \ldots (n)$$

für die $n$te Seillänge von der Drahtdicke δ_n.

Diese n Gleichungen nach den Unbekannten δ_1 $\delta_2 \ldots \delta_n$ aufgelöst, indem man den Werth von δ_1^2 aus (1) in (2), die Werthe von δ_1^2 und δ_2^2 aus (1) und (2) in (3) einsetzt u. s. w.; man erhält:

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{P}{i\left(\frac{\mathfrak{S}\,\pi}{4} - g\,l\right)}},$$

$$\delta_2 = \sqrt{\frac{P\,\frac{S\,\pi}{4}}{i\left(\frac{\mathfrak{S}\,\pi}{4} - g\,l\right)^2}},$$

$$\delta_3 = \sqrt{\frac{P\left(\frac{\mathfrak{S}\,\pi}{4}\right)^2}{i\left(\frac{\mathfrak{S}\,\pi}{4} - g\,l\right)^3}},$$

. . . .

$$\delta_n = \sqrt{\frac{P\left(\frac{\mathfrak{S}\,\pi}{4}\right)^{n-1}}{i\left(\frac{\mathfrak{S}\,\pi}{4} - g\,l\right)^n}}.$$

Die bandförmigen Drahtseile werden ebenso berechnet, wie die Rundseile; obzwar die Bandseile biegsamer als Rundseile sind, und deshalb kleinere Trommeln erfordern, so werden sie doch weniger als Rundseile angewendet, weil sie bei gleicher Tragkraft wie die Rundseile ein grösseres Gewicht haben, also auch mehr kosten und sich überdies mehr abnützen wie Rundseile.

22. Eine gusseiserne hohle Hängesäule von kreisringförmigem Querschnitte soll eine Zugbelastung von $P = 6000^{Kg}$ tragen. Wie gross ist ihr äusserer und innerer Durchmesser zu machen?

Auflösung. Bezeichnet man den äusseren Durchmesser der Säule mit d_2 und den inneren Durchmesser mit d_1, so ist die tragende Querschnittsfläche

$$f = \frac{d_2^2\,\pi}{4} - \frac{d_1^2\,\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\,(d_2^2 - d_1^2).$$

Setzt man diesen Werth von f in der Formel $P = f\mathfrak{S}$, sowie $\mathfrak{S} = 2$ als zulässige Zugspannung und $P = 6000$ ein, so erhält man:

$$6000 = \frac{\pi}{4}\,(d_2^2 - d_1^2)\,2.$$

Da in dieser Gleichung die beiden Unbekannten d_1 und d_2 vorkommen, aus den Umständen der Aufgabe sich aber nur die eine zuletzt aufgeschriebene Gleichung zwischen den beiden Unbekannten aufstellen lässt, so hat man, um die Gleichung nach d_1 und d_2 aufzulösen, noch eine weitere Beziehung zwischen d_1 und d_2 anzunehmen, d. h. noch eine zweite Gleichung zwischen den Unbekannten aufzustellen. Dies kann im vorliegenden Falle auf zweifache Weise geschehen: Man nimmt entweder eine passende, der praktischen Ausführung keine Schwierigkeiten bietende Wandstärke der Säule oder das Höhlungsverhältniss, d. i. ein Verhältniss zwischen d_1 und d_2 an. Bezeichnet man im ersten Falle die Wandstärke mit w, so ist $d_2 - d_1 = 2\,w$, man hat daher, wenn man in der Formel $P = \frac{\pi}{4}\,(d_2^2 - d_1^2)\,\mathfrak{S}$ die Differenz der Quadrate in ihre Factoren

zerlegt, also für $d_2^2 - d_1^2$ den Werth $d_2^2 - d_1^2 = (d_2 - d_1)(d_2 + d_1)$ setzt, $P = \frac{\pi \mathfrak{S}}{4}(d_2 - d_1)(d_2 + d_1)$, und da $d_2 - d_1 = 2w$ ist, so hat man $P = \frac{\pi \mathfrak{S}}{4} \cdot 2w(d_1 + d_2)$, hieraus folgt $d_2 + d_1 = \frac{2P}{w \pi \mathfrak{S}}$, zu dieser Gleichung die Gleichung $d_2 - d_1 = 2w$ addirt, gibt

$$2d_2 = \frac{2P}{w \pi \mathfrak{S}} + 2w, \text{ daher } \underline{d_2 = \frac{P}{w \pi \mathfrak{S}} + w} \text{ und } d_1 = d_2 - 2w$$

$$\text{oder } \underline{d_1 = \frac{P}{w \pi \mathfrak{S}} - w.}$$

Nehmen wir die Wandstärke mit $w = 12^{mm}$ an, so ist

$$d_2 = \frac{6000}{12 \cdot 3{,}14 \cdot 2} - 12 = 91{,}6^{mm} \text{ und}$$

$$d_1 = d_2 - 2w = 91{,}6 - 24 = 67{,}6^{mm}.$$

Nimmt man im zweiten Falle an: $\frac{d_1}{d_2} = 0{,}6$, setzt den daraus entspringenden Werth von $d_1 = 0{,}6\,d_2$, also $d_1^2 = 0{,}36\,d_2^2$ in obige Gleichung $P = \frac{\pi \mathfrak{S}}{4}(d_2^2 - d_1^2)$ ein, so erhält man:

$$P = \frac{\pi \mathfrak{S}}{4}(d_2^2 - 0{,}36\,d_2^2) = \frac{\pi \mathfrak{S}}{4} \cdot 0{,}64\,d_2^2, \text{ woraus folgt:}$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{4P}{0{,}64\,\pi \mathfrak{S}}} \text{ oder die Zahlenwerthe eingesetzt, gibt:}$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{4 \cdot 6000}{0{,}64 \cdot 3{,}14 \cdot 2}} = 77{,}5^{mm}, \text{ somit erhält man:}$$

$$d_1 = 0{,}6\,d_2 = 0{,}6 \cdot 77{,}5 = 46{,}5,$$

also: $d_2 = 77{,}5^{mm}$ und $d_1 = 46{,}5^{mm}$. In diesem Falle würde die Wandstärke $w = \frac{d_2 - d_1}{2} = \frac{77{,}5 - 46{,}5}{2} = 15{,}5^{mm}$ werden.

23. Welchen Durchmesser d sollen die vier schmiedeisernen Säulen einer hydraulischen Presse erhalten, wenn der durch die Presse ausgeübte Druck, der die Säulen auf ihre Zugfestigkeit in Anspruch nimmt, 150000^{Kg} beträgt?

Auflösung. Auf eine Säule kommt die Belastung

$$P = \frac{150000}{4} = 37500^{Kg};$$

nimmt man als zulässige Spannung $\mathfrak{S} = \frac{T}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5$ an, so ist, wenn man in der Formel $P = f\mathfrak{S} = \frac{\pi d^2 \mathfrak{S}}{4}$ die Zahlenwerthe einsetzt:

$$37500 = \frac{d^2 \pi}{4} \cdot 7{,}5, \text{ woraus } d = \sqrt{\frac{4 \cdot 37500}{7{,}5 \cdot 3{,}14}}$$

oder $\underline{d = 79{,}8^{mm}}$ als Durchmesser einer Säule folgt.

24. Auf einen prismatischen, hohlen, gusseisernen, horizontal stehenden Untersatz, welcher zur Aufnahme einer Maschine bestimmt ist, wird von dieser letzteren ein Verticaldruck von $P = 100000^{Kg}$ ausgeübt; welche Wandstärke muss der Untersatz erhalten, wenn der Querschnitt desselben ein hohles Rechteck, d. i. also die Differenz zweier Rechtecke ist, von denen das äussere die Länge $l_1 = 0{,}5^m$ und die Breite $b_1 = 0{,}3^m$ hat (siehe Fig. 4); vorausgesetzt wird noch, dass die Höhe des Untersatzes im Verhältnisse zur Länge desselben eine geringe ist, so dass das Gusseisen nur auf seine Druckfestigkeit beansprucht wird.

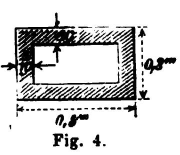


Fig. 4.

Auflösung. Aus der Figur ist ersichtlich, dass die tragende Querschnittsfläche die Differenz des äusseren und inneren Rechteckes ist; die Fläche des äusseren Rechteckes ist $l_1 b_1$, die des inneren ist $(l_1 - 2w)(b_1 - 2w)$, daher die tragende Querschnittsfläche $f = l_1 b_1 - (l_1 - 2w)(b_1 - 2w)$; setzt man diesen Werth von f in die Gleichung $P = f\mathfrak{S}$ ein, so hat man:

$$P = [l_1 b_1 - (l_1 - 2w)(b_1 - 2w)]\,\mathfrak{S};$$

diese Gleichung ist nach w aufzulösen. Beiderseits durch $\mathfrak{S}$ dividirt und die angezeigte Multiplication ausgeführt:

$$\frac{P}{\mathfrak{S}} = l_1 b_1 - l_1 b_1 + 2wb_1 + 2wl_1 - 4w^2, \text{ oder}$$

$$-4w^2 + 2w(b_1 + l_1) = \frac{P}{\mathfrak{S}}, \text{ oder durch } -4 \text{ dividirt}$$

$$w^2 - \frac{w(b_1 + l_1)}{2} = -\frac{P}{4\mathfrak{S}};$$

diese quadratische Gleichung nach w aufgelöst, gibt:

$$w = \frac{b_1 + l_1}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{b_1 + l_1}{4}\right)^2 - \frac{P}{4\mathfrak{S}}},$$

oder im Nenner der Wurzelgrösse auf gleiche Benennung gebracht:

$$w = \frac{b_1 + l_1}{4} \pm \sqrt{\frac{(b_1 + l_1)^2 \mathfrak{S} - 4P}{16 \mathfrak{S}}} =$$

$$= \frac{b_1 + l_1 \pm \sqrt{\frac{(b_1 + l_1)^2 \mathfrak{S} - 4P}{\mathfrak{S}}}}{4}.$$

Setzen wir die Zahlenwerthe, sowie die Spannung $\mathfrak{S} = 5^{Kg}$, oder auf den Quadratmeter bezogen, $\mathfrak{S} = 5000000^{Kg}$ ein, so hat man:

$$w = \frac{0{,}3 + 0{,}5 \pm \sqrt{\frac{(0{,}3 + 0{,}5)^2\, 5000000 - 4 \,.\, 100000}{5000000}}}{4} \quad \text{oder}$$

$$w = \frac{0{,}3 + 0{,}5 \pm \sqrt{\frac{14}{25}}}{4} = \frac{0{,}8 \pm 3{,}7417 \,.\, \frac{1}{5}}{4} = \frac{0{,}8 \pm 0{,}74834}{4}.$$

Den Umständen der Aufgabe entsprechend muss man hier im Zähler das negative Vorzeichen im zweiten Gliede beibehalten, daher erhält man:

$$w = \frac{0{,}8 - 0{,}74834}{4} = 0{,}012915^m,$$

oder abgerundet $w = 13^{mm}$, als die gesuchte Wandstärke.

25. Welchen Querschnitt muss ein 300^m langes schmiedeisernes, prismatisches Schachtgestänge erhalten, wenn dasselbe ausser seinem eigenen, zu berücksichtigenden Gewichte noch eine Last von $P = 30000^{Kg}$ zu tragen hat?

Auflösung. Wir machen die Annahme, dass die in dem belasteten Gestänge eintretende zulässige Zugspannung $\mathfrak{S} = 6^{Kg}$ betragen solle. Wir berechnen zunächst das Gewicht von einem Kubikmillimeter Schmiedeisen; die Dichte des Schmiedeisens zu 7,5 angenommen, so wiegt ein Kubikmeter Schmiedeisen 7,5mal so viel, als ein Kubikmeter Wasser, ein Kubikmeter Wasser wiegt aber 1000^{Kg}, daher wiegt ein Kubikmeter Schmiedeisen $7{,}5 \,.\, 1000 = 7500^{Kg}$ und ein Kubikmillimeter Schmiedeisen wiegt nun $\gamma = \frac{7500}{1000000000} = 0{,}0000075^{Kg}$; setzt man nun in dem aus der Formel $P + G = f\mathfrak{S}$ oder $P + fl\gamma = f\mathfrak{S}$ entspringenden Werthe von $f = \frac{P}{\mathfrak{S} - l\gamma}$ die Zahlenwerthe ein, so ist

$$f = \frac{30000}{6 - 300000 \,.\, 0{,}0000075} = 8000^{mm^2}$$

der gesuchte Querschnitt.

Das Gewicht des prismatischen Gestänges ist

$$G = f\,l\,\gamma = 8000 \,.\, 300000 \,.\, 0{,}0000075 = 18000^{Kg}.$$

Könnte man diesem Gestänge die Form eines Körpers von gleicher Festigkeit geben, so würde der kleinste Querschnitt $f_0 = \frac{P}{\mathfrak{S}} = \frac{30000}{6} = 5000^{mm^2}$ Flächeninhalt erhalten. Der grösste Querschnitt würde einen Flächeninhalt erhalten nach der für einen Körper von der Form der gleichen Zugfestigkeit geltenden Formel

$$f_n = \frac{P e^{\frac{l\gamma}{\mathfrak{S}}}}{\mathfrak{S}}\,,\; f_n = \frac{30000}{6} \,.\, 2{,}71828^{\frac{300000\,.\,0{,}0000075}{6}}\,,$$

$$\text{oder } f_n = \frac{30000}{6} \,.\, 2{,}71828^{0{,}375} = 5000 \,.\, 2{,}71828^{0{,}375},$$

oder beiderseits logarithmirt:

$$\log f_n = \log 5000 + 0{,}375 \log 2{,}71828, \text{ woraus}$$

$$f_n = 7090^{mm^2} \text{ folgt.}$$

Das Gewicht des Gestänges ist $G = V_n \gamma$, wenn V_n das Volumen bedeutet. Nach der Formel für das Volumen eines Körpers von der Form der gleichen Festigkeit hat man:

$$V_n = \frac{\mathfrak{S}}{\gamma}\left(f_n - \frac{P}{\mathfrak{S}}\right);\; \text{daher } G = \gamma \,.\, \frac{\mathfrak{S}}{\gamma}\left(f_n - \frac{P}{\mathfrak{S}}\right) \text{ oder}$$

$$G = \mathfrak{S}\left(f_n - \frac{P}{\mathfrak{S}}\right) = 6\,(7090 - 5000)\; 12540^{Kg}.$$

Man sieht, dass man bei Anwendung der Form der gleichen Festigkeit eine Materialersparniss von $18000 - 12540^{Kg}$, also 5460^{Kg} Schmiedeeisen im Vergleiche zu dem prismatischen Gestänge erzielen würde. Fragen wir noch nach der Verlängerung λ, welche das prismatische Gestänge, sowie das von der Form der gleichen Festigkeit, durch sein Gewicht und die Belastung P erleidet, so hat man im ersten Falle:

$$\lambda = \frac{l}{fE}\left(P + \frac{1}{2}\,G\right) = \frac{300000}{8000 \,.\, 20000}\left(30000 + \frac{1}{2} \,.\, 18000\right)$$

$\lambda = 73^{mm}$, im zweiten Falle ist die Verlängerung

$\lambda_1 = \frac{\mathfrak{S}\,l}{E} = \frac{6 \,.\, 300000}{20000}$, $\lambda_1 = 90^{mm}$. Fragt man noch, bei welcher Belastung würde das Gestänge von der Form der gleichen Festigkeit zerreissen, oder welche Last dürfte man demselben anhängen,

wenn die zulässige Spannung gleich einem gewissen Werthe, z. B. $\mathfrak{S} = 6$ gesetzt wird und das Volumen, oder das Gewicht des Gestänges und seine Länge gegeben wäre. In diesem Falle ist aus der für das Volumen eines Körpers von der Form der gleichen Festigkeit geltenden Formel $V_n = \frac{P}{\gamma}\left(e^{\frac{l\gamma}{\mathfrak{S}}} - 1\right)$ der Werth von P zu bestimmen mit $P = \frac{V_n \gamma}{e^{\frac{l\gamma}{\mathfrak{S}}} - 1}$; setzt man hierin $\mathfrak{S} = 6$ ein, so erhält man in P die Kraft, welche in allen Querschnitten des Gestänges von der Form der gleichen Festigkeit die gleiche Spannung $\mathfrak{S} = 6$ hervorruft; setzt man $\mathfrak{S}$ den Bruchmodul des Schmiedeisens für Zug $K = 40$, so erhält man in P die Kraft, welche dieses Gestänge zerreisst. *)

26. Es ist bei einem Körper von der Form der gleichen Festigkeit *a)* jene Länge desselben zu berechnen, bei welcher er ausser seinem eigenen Gewichte eine andere Last nicht mehr mit genügender Sicherheit zu tragen vermag, also die Traglänge, *b)* jene Länge, bei der der Körper durch sein eigenes Gewicht zerreisst, d. i. die Zerreisslänge.

Auflösung. Es bezeichne: $L_t = l_1$ die gesuchte Traglänge, L_z die gesuchte Zerreisslänge, f_1 den Querschnitt des Körpers an der Befestigungsstelle, G_1 sein Gewicht, welches in allen Querschnitten die gleiche Spannung $\mathfrak{S}$ hervorruft. Für den obersten Querschnitt gilt die Gleichung $G_1 = f_1 \mathfrak{S}$; in dieser Gleichung sind die Werthe G_1 und f_1 für verschiedene Querschnitte des Körpers veränderlich; geht man von dem unteren Endpunkte des Körpers 0 um das beliebige Stück x nach aufwärts und vermehrt dieses Stück um ein unendlich kleines Stück dx, welches als prismatisch betrachtet, den Querschnitt f und daher das unendlich kleine Gewicht $dG = f dx \cdot \gamma$ hat; wenn γ das Gewicht des Körpers pro Kubikeinheit bedeutet, so erhält man, wenn man die Gleichung: $G_1 = f_1 \mathfrak{S}$, bei Weglassung der Zeiger differenzirt: $dG = \mathfrak{S} df$ ($\mathfrak{S}$ ist für alle Querschnitte constant), daher durch Gleichsetzung der rechten Theile der zwei letzten Gleichungen für dG:

$G_1 = G_2 + P$

Fig. 5.

*) Die Ableitung der Gleichungen zur Berechnung des Querschnittes f_n, des Volumens V_n und der Verlängerung λ_1 eines Körpers von der Form der gleichen Zugfestigkeit, sowie der Formel zur Berechnung der Verlängerung λ eines prismatischen Körpers mit Berücksichtigung seines eigenen Gewichtes, wurde hier in Ansehung des Zweckes des eben gerechneten Zahlenbeispieles, als zu weitgehend, weggelassen und möge die Ableitung in irgend einer Festigkeitstheorie, oder in einem grösseren Lehrbuche der Mechanik nachgelesen werden.

$$f\,dx\,.\,\gamma = \mathfrak{S}\,df \text{ oder } \frac{df}{f} = \frac{dx\,\gamma}{\mathfrak{S}},$$

integrirt, gibt: $ln\,.\,f = \frac{xj}{\mathfrak{S}} + C$, für $x = l_1$ geht f über in f_1, daher:

$n f_1 = \frac{l_1\,\gamma}{\mathfrak{S}} + C$, woraus der Werth der Constanten $C = ln\,f_1 - \frac{l_1\,\gamma}{\mathfrak{S}}$ folgt, somit hat man, wenn dieser Werth der Constanten eingesetzt wird:

$$ln\,.\,f = \frac{x\,\gamma}{\mathfrak{S}} + ln\,f_1 - \frac{l_1\,\gamma}{\mathfrak{S}}, \text{ oder } ln\,f_1 - ln\,f = \frac{l_1\,\gamma}{\mathfrak{S}} - \frac{x\,\gamma}{\mathfrak{S}}$$

$$\text{oder } ln\left(\frac{f_1}{f}\right) = \frac{\gamma}{\mathfrak{S}}\,(l_1 - x);$$

der Querschnitt im unteren Endpunkte o des Körpers muss offenbar $= 0$ sein, weil er durch nichts beansprucht wird, daher geht für $x = 0$, f über in 0 und man erhält: $ln\left(\frac{f_1}{0}\right) = \frac{\gamma\,l_1}{\mathfrak{S}}$ oder $ln\,.\,\infty = \infty = \frac{\gamma\,l_1}{\mathfrak{S}}$; schreibt man die Gleichung $ln\left(\frac{f_1}{f}\right) = \frac{\gamma}{\mathfrak{S}}\,(l_1 = x)$ in der Form: $\frac{f_1}{f} = e^{\frac{\gamma}{\mathfrak{S}}(l_1 - x)}$, oder $f_1 = f\,e^{\frac{\gamma}{\mathfrak{S}}(l_1 - x)}$ und lässt x in Null übergehen, so wird auch $f = 0$, man erhält: $f_1 = 0\,.\,e^{\frac{\gamma\,l_1}{\mathfrak{S}}} = 0$, oder wegen $\mathfrak{S} = 0$, $f_1 = 0\,.\,e^{\infty}$; dies ist eine unbestimmte Form, denn die Grösse f_1, die doch einen bestimmten Werth haben muss, verschwindet. Zur Ausmittlung dieser unbestimmten Form lassen wir x nicht in den besonderen Werth 0, sondern in den Werth $0 + h = h$ übergehen, wobei h eine positive endliche kleine Grösse bezeichnet; wenn nun x den besonderen Werth $0 + h$ annimmt, dann nimmt f den besonderen Werth f_0 an, man erhält dann: $ln\,f_1 - ln\,.\,f_0 = \frac{\gamma}{\mathfrak{S}}\,(l_1 - h)$, es ist aber:

$$ln\,f_0 = 2\left[\frac{f_0 - 1}{f_0 + 1} + \frac{1}{3}\left(\frac{f_0 - 1}{f_0 + 1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{f_0 - 1}{f_0 + 1}\right)^5 + \ldots\ldots\right],$$

daher

$$ln\,f_1 - 2\left[\frac{f_0 - 1}{f_0 + 1} + \frac{1}{3}\left(\frac{f_0 - 1}{f_0 + 1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{f_0 - 1}{f_0 + 1}\right)^5 + \ldots\right] =$$

$$= \frac{\gamma}{\mathfrak{S}}\,(l_1 - h);$$

lassen wir jetzt nun h bis zur Grenze 0 abnehmen, dann geht auch f_0 in Null über, man erhält dann:

$$l n f_1 - 2\left(-1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cdots\right) = \frac{\gamma\, l_1}{\mathfrak{S}},$$

oder angenähert, wenn man die ersten acht Glieder der in der Klammer stehenden Reihe summirt, $l n f_1 + 4 = \frac{\gamma\, l_1}{\mathfrak{S}}$; hieraus folgt

$$l_1 = \frac{(l n . f_1 + 4)\, \mathfrak{S}}{\gamma} = L_l, \text{ ferner ist: } f_1 = e^{\frac{\gamma l_1}{\mathfrak{S}} - 4}.$$

Lässt man aber h nicht bis auf 0, sondern bis auf eine sehr kleine endliche positive Grösse abnehmen, so wird auch f_0 eine sehr kleine endliche Grösse werden, so dass bei genügender Kleinheit von f_0 der Bruch $\frac{f_0 - 1}{f_0 + 1}$ so wenig von -1 verschieden sein wird, dass man behufs bequemer Summirung einiger Glieder der Reihe angenähert setzen kann, $\frac{f_0 - 1}{f_0 - 1} = -1$; nehmen wir beispielsweise $f_0 = 0{,}000001$, so wird $\frac{f_0 - 1}{f_0 - 1} = -0{,}999998 \ldots$, dieser Bruch wird wohl durch das Potenziren auf die dritte, fünfte u. s. w. Potenz immer kleiner und ausserdem noch durch die Multiplication mit den Coëfficienten $\frac{1}{3}, \frac{1}{5} \ldots$ verkleinert, allein man kann sich immerhin eine solche Anzahl Glieder der Reihe addirt denken, dass die Summe $= -2$ wird; nimmt man direct $\frac{f_0 - 1}{f_0 + 1} = -1$ an, so ist schon die Summe der ersten acht Glieder $= -2{,}02$. Genau genommen, wird für $f_0 = 0$ die Traglänge $l_1 = \infty$, denn wir fanden oben aus der Gleichung $l n\left(\frac{f_1}{f}\right) = \frac{\gamma}{\mathfrak{S}}(l_1 - x)$, wenn man darin $x = 0$, also $f = 0$ setzt, $l n\, \infty = \infty = \gamma \frac{l_1}{\mathfrak{S}}$; da die Grössen γ und $\mathfrak{S}$ constant sind, so kann der Bruch $\frac{\gamma l_1}{\mathfrak{S}}$ nur dann unendlich gross werden, wenn l_1, d. i. die gesuchte Traglänge unendlich gross wird; gibt man jedoch dem Stabe an seinem unteren Ende o einen sehr kleinen, beliebigen Querschnitt f_0, so, dass also in der Gleichung $l n\left(\frac{f_1}{f}\right) = \frac{\gamma}{\mathfrak{S}}(l_1 - x)$ für $x = 0$, f in f_0 übergeht, so hat man:

$$l n\left(\frac{f_1}{f}\right) = \frac{\gamma\, l}{\mathfrak{S}}, \text{ woraus } l_1 = l n\left(\frac{f_1}{f_0}\right)\frac{\mathfrak{S}}{\gamma} \text{ oder } f_1 = e^{\frac{\gamma l_1}{\mathfrak{S}} + l n f_0} \text{ folgt:}$$

macht man f_0 so gross, dass $lnf_0 = -4$ ist, so erhält man wie früher: $f_1 = e^{\frac{\gamma l_1}{\mathfrak{S}} - 4}$ und $l_1 = (lnf_1 - lnf_0)\frac{\mathfrak{S}}{\gamma} = (lnf_1 + 4)\frac{\mathfrak{S}}{\gamma}$.

Etwas kürzer kann man auch behufs Ableitung dieser Gleichungen für l_1 und f_1 wie folgt verfahren:

Wir fanden oben durch Integration: $lnf = \frac{x\gamma}{\mathfrak{S}} + C$, diese Constante C bestimmen wir jetzt auf folgende Art. Es ist:

$$lnf = 2\left[\frac{f-1}{f+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{f-1}{f+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{f-1}{f+1}\right)^5 + \ldots\right],$$

daher

$$2\left[\frac{f-1}{f+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{f-1}{f+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{f-1}{f+1}\right)^5 + \ldots\right] = \frac{x\gamma}{\mathfrak{S}} + C;$$

lassen wir x in Null übergehen, so wird auch $f = 0$, man erhält hierdurch: $2\left[-1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \ldots\right] = 0 + C$, also angenähert $C = -4$, somit $lnf = \frac{x\gamma}{\mathfrak{S}} - 4$, für $x = l$, wird $f = f_1$, dann ist $lnf_1 = \frac{l_1\gamma}{\mathfrak{S}} - 4$ und $f_1 = e^{\frac{l_1\gamma}{\mathfrak{S}} - 4}$ wie oben.

Die Zerreisslänge ist $L_z - L_t \cdot \frac{K}{\mathfrak{S}}$, oder $\underline{L_z = \frac{K}{\gamma}(lnf_1 + 4)}$, wobei K den Bruchmodul für Zug des Materials bedeutet.

Da $G_1 = f_1\,\mathfrak{S}$ ist, so kann man das Gewicht des Körpers von der Form der gleichen Zugfestigkeit, welcher durch sein Eigengewicht schon auf seine ganze Tragfähigkeit beansprucht wird, finden durch die Formel: $G_1 = \mathfrak{S}\, e^{\frac{l_1\gamma}{\mathfrak{S}} - 4}$, wobei e die Basis der natürlichen Logarithmen $e = 2{,}71828\ldots$ ist. Setzt man in dieser Formel für G_1 die Spannung $\mathfrak{S}$ gleich einem beliebigen Werthe, z. B. $\mathfrak{S} = 6$, so zeigt sich, dass G_1 jeden beliebigen Werth annehmen kann, sobald man das Material des Körpers, also γ kennt, denn der Exponent $\frac{\gamma l_1}{\mathfrak{S}} - 4$ stellt jederzeit nur eine unbenannte Zahl dar, welche Masse man auch für γ, l_1 und $\mathfrak{S}$ einsetzen mag, so dass $e^{\frac{\gamma l_1}{\mathfrak{S}} - 4}$ eine unbenannte Zahl ist und $\mathfrak{S}\, e^{\frac{\gamma l_1}{\mathfrak{S}} - 4}$ verschiedene Werthe annimmt, je nachdem man das Mass für die Querschnittseinheit, auf welche sich $\mathfrak{S}$ bezieht, annimmt; daraus geht hervor, dass der Querschnitt f_1 an der Befestigungsstelle beliebig ist, wenn man $\mathfrak{S}$ im Vorhinein annimmt, ebenso wie beim prismatischen

Körper, dessen Tragfähigkeit schon durch sein Eigengewicht absorbirt wird. Diese Unbestimmtheit von f_1, also auch von G_1 verschwindet aber, sobald man die beiden Gleichungen: $f_1 = e^{\frac{\gamma l_1}{\mathfrak{S}} - 4}$ und $G_1 = \mathfrak{S} f_1$ nach den zwei Unbekannten $\mathfrak{S}$ und f_1 auflöst. Aus der Gleichung für die Traglänge $l_1 = \frac{\mathfrak{S}}{\gamma} (l\,n f_1 + 4)$ folgt, wenn man für $\mathfrak{S}$ den Werth $\mathfrak{S} = \frac{G}{f_1}$ setzt und dann G_1 bestimmt:

$G_1 = \frac{\gamma\, l_1 f_1}{l\,n f_1 + 4}$; wie man sieht, stellt der Zähler dieses Bruches das Gewicht eines prismatischen Körpers von der Länge l_1, dem Querschnitt f_1 und dem Gewichte einer Volumeinheit $= \gamma$ dar. Ein Gestänge von der Form der gleichen Zugfestigkeit wiege z. B. 6000^{Kg}, es ist seine Traglänge zu bestimmen. Wir machen die Annahme, dass in dem Gestänge eine Spannung von $\mathfrak{S} = 6^{Kg}$ eintrete, dann wird der Querschnitt an der Befestigungsstelle $f_1 = \frac{G_1}{\mathfrak{S}} = \frac{6000}{6} = 1000^{mm^2}$ und die Traglänge wird:

$$l_1 = \frac{\mathfrak{S}}{\gamma} (l\,n\,.\,f_1 + 4) = \frac{6}{0{,}0000075} (l\,n\,.\,1000 + 4) \text{ oder}$$

$$l_1 = 800000\,(6{,}907755 + 4) = 8726{,}204^m\,;$$

wäre jedoch das Gewicht und die Traglänge gegeben und nach der Querschnittsfläche an der Befestigungsstelle, sowie nach der Spannung gefragt, so hätte man die beiden Gleichungen $\mathfrak{S} = \frac{\gamma\, l_1}{l\,n\,.\,f_1 + 4}$ und $G_1 = f_1\, \mathfrak{S}$ nach f_1 und $\mathfrak{S}$ aufzulösen.

Die Formel $G_1 = \frac{\gamma\, l_1 f_1}{l\,n\,.\,f_1 + 4}$ löst auch die Aufgabe: Welches Volumen hat ein Körper von der Form der gleichen Zugfestigkeit, wenn die Länge l_1, der Querschnitt an der Befestigungsstelle f_1 und am anderen Ende = Null ist; aus obiger Gleichung für G_1 folgt:

$$V = \frac{G_1}{\gamma} = \frac{l_1 f_1}{l\,n\,.\,f_1 + 4}.$$

Vergleichen wir noch die Traglänge $l_1 = \frac{\mathfrak{S}}{\gamma} (l\,n\,.\,f_1 + 4)$ mit der Länge l_2 eines Körpers von der Form der gleichen Zugfestigkeit, der an der Befestigungsstelle den Querschnitt f_1 und am anderen Ende den Querschnitt f_0 hat und ausser seinem Gewichte G_2 noch eine Last P zu tragen hat, so ist für den letzteren Körper aus der Formel: $f_1 = \frac{P}{\mathfrak{S}} e^{\frac{l_2 \gamma}{\mathfrak{S}}} = f_0\, e^{\frac{l_2 \gamma}{\mathfrak{S}}}$, $l\,n \left(\frac{f_1}{f_0}\right) = \frac{l_2 \gamma}{\mathfrak{S}}$, woraus

$l_2 = \frac{\mathfrak{S}\, ln}{\gamma}\left(\frac{f_1}{f_0}\right)$ folgt, daher $\frac{l_1}{l_2} = \frac{ln\,.\, f_1 + 4}{ln\left(\frac{f_1}{f_0}\right)}$; vergleichen wir endlich noch die Längen l_1 und l_2 mit der Traglänge l_3 eines prismatischen Körpers, vom Querschnitte f_1, der nur durch sein Eigengewicht beansprucht wird und aus demselben Material besteht, wie die Körper von den Längen l_1 und l_2, so hat man, da für den prismatischen Körper aus der Formel $f_1\, l_3\, \gamma = f_1\, \mathfrak{S}_1$ die Traglänge $l_3 = \frac{\mathfrak{S}}{\gamma}$ folgt: $\frac{l_1}{l_3} = ln f_1 + 4$ und $\frac{l_2}{l_3} = ln\,.\left(\frac{f_1}{f_0}\right)$; soll $l_2 = l_3$ sein, so muss $\frac{l_2}{l_3} = 1 = ln\,.\,e$, also $f_1 = e f_0 = 2{,}71828 f_0 = = 2{,}71828 \frac{P}{\mathfrak{S}}$ sein.

27. Ein stabförmiger Körper von der Form der gleichen Zugfestigkeit, welcher an der Befestigungsstelle den Querschnitt f_1 hat, wird durch sein Eigengewicht G_1 und durch eine Kraft P, welche gleichförmig auf seiner ganzen Länge vertheilt ist, auf Zug beansprucht. Es ist die Form der gleichen Festigkeit des Körpers allgemein durch das Verhältniss zwischen dem Querschnitte f_1 an der Befestigungsstelle und einem beliebigen anderen Querschnitte f darzustellen; es ist ferner das Gewicht des Körpers zu berechnen und die specielle Form der gleichen Festigkeit zu ermitteln, wenn das Eigengewicht nicht berücksichtigt wird und die Querschnitte Kreisflächen sind.

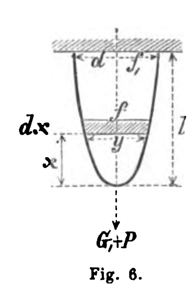


Fig. 6.

Auflösung. Für den Querschnitt f_1 an der Befestigungsstelle gilt die Gleichung $P + G_1 = f_1\, \mathfrak{S}$, für einen beliebigen anderen Querschnitt in der Entfernung x vom unteren Ende gilt die Gleichung: $\frac{Px}{l} + G = f\mathfrak{S}$, denn der Körper wird auf seiner ganzen Länge durch die Kraft P_1 gleichförmig belastet, daher entfällt auf eine Längeneinheit die Last $\frac{P_1}{l}$ und auf x Längeneinheiten $\frac{x P_1}{l}$; der Buchstabe G bezeichnet das Gewicht des Körperstückes von der Länge x; die letzte Gleichung enthält daher die Veränderlichen x, G und f; differenzirt man diese Gleichung, so ist:

$$\frac{P dx}{l} + dG = \mathfrak{S} df \text{ (}\mathfrak{S}\text{ ist constant)};$$

geht man in der Entfernung x von dem unteren Ende um ein unendlich kleines Stückchen dx nach aufwärts, so kann das als ein Prisma von der Länge dx zu betrachtende Körperstück vom

Querschnitte f auch nur ein unendlich kleines Gewicht haben; bezeichnet daher γ das Gewicht einer Volumeinheit des Stabmaterials, so ist das unendlich kleine Gewicht $dG = \gamma f dx$; setzt man diesen Werth von dG in die letzte Gleichung ein, so ist:

$$\frac{P dx}{l} + \gamma f dx = \mathfrak{S} df,$$

oder beiderseits durch df dividirt:

$$\frac{\frac{P dx}{l} + \gamma f dx}{df} = \mathfrak{S}$$

und beiderseits durch dx dividirt:

$$\frac{\frac{P}{l} + \gamma f}{df} = \frac{\mathfrak{S}}{dx}, \text{ oder: } \frac{l df}{P + l f \gamma} = \frac{dx}{\mathfrak{S}},$$

beiderseits integrirt:

$$l \int \frac{df}{P + l f \gamma} = \int \frac{dx}{\mathfrak{S}};$$

das Integral linker Hand hat die bekannte Form:

$$\int \frac{dx_1}{a + b x_1} = \frac{1}{b} \cdot ln \cdot (a + b x_1) + C,$$

wenn man daher $x_1 = f$, $a = P$, $b = l\gamma$ einsetzt und die Constanten von beiden Integrationen in eine zusammenzieht:

$$l \cdot \frac{1}{l\gamma} \cdot ln (P + l\gamma f) + C = \frac{x}{\mathfrak{S}}.$$

Zur Bestimmung der Constanten sagen wir: für $x = 0$ wird auch $f = 0$, denn im unteren Endpunkte des Körpers ist P_1 und G gleich Null, daher kann auch der Querschnitt $= 0$ sein; man erhält daher für $x = 0$, $\frac{0}{\mathfrak{S}} = \frac{ln \cdot P}{\gamma} + C$, daher $C = - \frac{ln \cdot P}{\gamma}$, und somit wird, wenn wir den Werth der Constanten einsetzen:

$$\frac{x}{\mathfrak{S}} = \frac{ln \cdot (P + l f \gamma)}{\gamma} - \frac{ln P}{\gamma}, \text{ oder } \frac{\gamma x}{\mathfrak{S}} = ln \cdot \left(\frac{P + l f \gamma}{P}\right);$$

hieraus folgt:

$$\frac{P + l f \gamma}{P} = e^{\frac{\gamma x}{\mathfrak{S}}} \text{ und somit } f = \frac{P\left(e^{\frac{x\gamma}{\mathfrak{S}}} - 1\right)}{l\gamma};$$

für den Querschnitt f_1 hat man nun: $f_1 = \frac{P(e^{\frac{l\gamma}{\mathfrak{S}}} - 1)}{l\gamma}$, da nämlich für $x = l$, der Querschnitt f übergeht in f_1.

Aus der für einen beliebigen Querschnitt f geltenden Gleichung $G + \frac{Px}{l} = f\mathfrak{S}$ folgt das Gewicht des Körperstückes von der Länge x, $G = f\mathfrak{S} - \frac{Px}{l}$, oder für f den Werth gesetzt:

$$G = \frac{\mathfrak{S}P(e^{\frac{x\gamma}{\mathfrak{S}}} - 1)}{l\gamma} - \frac{Px}{l} = \frac{P}{l\gamma}[\mathfrak{S}(e^{\frac{x\gamma}{\mathfrak{S}}} - 1) - x\gamma]$$

und da für $x = l$, G übergeht in das Gewicht des ganzen Körpers G_1, so ist:

$$\underline{G_1 = \frac{P}{l\gamma}[\mathfrak{S}(e^{\frac{l\gamma}{\mathfrak{S}}} - 1) - l\gamma].}$$

Bilden wir noch den Quotienten $\frac{f_1}{f}$, so ist: $\frac{f_1}{f} = \frac{e^{\frac{l\gamma}{\mathfrak{S}}} - 1}{e^{\frac{x\gamma}{\mathfrak{S}}} - 1}$, durch welche Gleichung allgemein die Form der gleichen Festigkeit des Körpers dargestellt ist. Wird das Eigengewicht des Körpers nicht berücksichtigt, so folgt aus obigen Gleichungen für G_1 und G, wenn man $G_1 = 0$ und also auch $G = 0$ setzt:

$$\mathfrak{S}(e^{\frac{l\gamma}{\mathfrak{S}}} - 1) = l\gamma, \text{ und } \mathfrak{S}(e^{\frac{x\gamma}{\mathfrak{S}}} - 1) = x\gamma, \text{ woraus}$$

$$e^{\frac{l\gamma}{\mathfrak{S}}} - 1 = \frac{l\gamma}{\mathfrak{S}} \text{ und } e^{\frac{x\gamma}{\mathfrak{S}}} - 1 = \frac{x\gamma}{\mathfrak{S}}$$

folgt; setzt man in die Gleichung für den Quotienten $\frac{f_1}{f}$ diese Werthe von $e^{\frac{l\gamma}{\mathfrak{S}}} - 1$ und $e^{\frac{x\gamma}{\mathfrak{S}}} - 1$ ein, so hat man: $\frac{f_1}{f} = \frac{l\gamma}{x\gamma} = \frac{l}{x}$; nehmen wir nun an, die Querschnitte des Körpers seien Kreisflächen von dem Durchmesser d_1 an der Befestigungsstelle und d an einem beliebigen Querschnitte f, so ist

$$\frac{d_1^2 \frac{\pi}{4}}{d^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{l}{x}, \text{ oder } \frac{d_1^2}{d^2} = \frac{l}{x} \text{ oder } d = d_1\sqrt{\frac{x}{l}};$$

dies ist die Gleichung einer Parabel, der Längenschnitt des Körpers ist also durch eine Parabel begrenzt, welche die Form der gleichen Festigkeit des Körpers darstellt.

28. Ein gerader stabförmiger Körper ist mit einem Ende vertical aufgehängt und durch eine Kraft P, welche gleichförmig auf seiner ganzen Länge von oben nach unten, bis Null abnimmt, sowie durch sein Eigengewicht auf Zug beansprucht; der Querschnitt an der Befestigungsstelle sei f_1, die Länge l; es ist die allgemeine Form der gleichen Festigkeit dieses Körpers durch das Verhältniss des Querschnittes f_1 zu einem beliebigen anderen Querschnitte f darzustellen, sowie das Gewicht des Körpers zu berechnen und die specielle Form der gleichen Festigkeit des Körpers zu ermitteln, wenn das Eigengewicht nicht berücksichtigt wird und die Querschnitte Kreisflächen sind.

Auflösung. Denkt man sich die Länge l des Stabes in eine sehr grosse Anzahl gleicher Theile getheilt, so dass ein solcher Theil als sehr klein angenommen werden kann, und bezeichnen wir die gleichförmige Zunahme der Kraft von dem unteren Endpunkte des Körpers, wo die Kraft $= 0$ ist, bis zu dem Endpunkte des ersten sehr kleinen Längentheilchens des Stabes mit p, so ist die Grösse der Kraft am Ende des zweiten sehr kleinen Längentheilchens $2\,p$, am Ende des dritten Theilchens $3\,p$ u. s. w., weil eben dieser gleichförmige Zuwachs in den einzelnen von unten nach oben folgenden, sehr dünn gedachten Körperschichten stattfindet. Am Ende

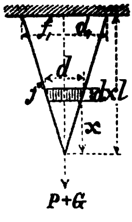


Fig. 7.

des $x$ten Theilchens beträgt daher die dieser $x$ten Schichte entsprechende Kraft xp und die auf das Ende der $l$ten Schichte, also auf die Befestigungsstelle entfallende Kraft beträgt daher lp. Denkt man sich nun die den Endpunkten des ersten, zweiten, dritten u. s. w., x u. s. w. $l$ten Längentheilchens entsprechenden Kräfte p, $2\,p$, $3\,p \ldots\ldots xp \ldots\ldots lp$ gleichmässig auf die ihnen entsprechenden Theilchen vertheilt, so kann man als die in einem jeden Theilchen gleichmässig vertheilt gedachte Kraft das arithmetische Mittel der dem Anfangs- und dem Endpunkte entsprechenden Kräfte annehmen. Es ist daher auf dem ersten Längentheilchen eine Kraft als gleichmässig vertheilt anzunehmen von der Grösse $\frac{0 + p}{2} = \frac{p}{2}$, die auf dem zweiten Theilchen gleichmässig vertheilt gedachte Kraft ist $\frac{p + 2\,p}{2} = \frac{3\,p}{2}$, auf dem dritten Theilchen $\frac{2\,p + 3\,p}{2} = \frac{5\,p}{2}$ u. s. w., dem $x$ten Theilchen entspräche die Kraft $\frac{(x - 1)\,p + xp}{2} = (2\,x - 1)\,\frac{p}{2}$, dem $l$ten Theilchen $\frac{(l - 1)\,p + lp}{2} = (2\,l - 1)\,\frac{p}{2}$.

Zählt man nun alle, den sämmtlichen Längentheilchen von 0 bis l entsprechenden Kräfte

$$\frac{p}{2}, \frac{3p}{2}, \frac{5p}{2} \dots (2x-1)\frac{p}{2} \dots (2l-1)\frac{p}{2}$$

zusammen, so erhält man offenbar die ganze Kraft P, es ist dann:

$$P = \frac{p}{2} + \frac{3p}{2} + \frac{5p}{2} + \dots (2x-1)\frac{p}{2} + \dots (2l-1)\frac{p}{2}, \text{ oder}$$

$$P = \frac{p}{2}\Big[1 + 3 + 5 + \dots + (2x-1) + \dots + (2l-1)\Big]$$

oder, da die Glieder in der Klammer die Summe der natürlichen ungeraden Zahlen, $= l^2$ ist, so hat man $P = \frac{pl^2}{2}$, woraus $p = \frac{2P}{l^2}$ folgt. Bezeichnen wir die in der Entfernung x von dem unteren Ende, den dortigen Querschnitt f angreifende Kraft mit P_x, so ist nun $P_x = \frac{p}{2}x^2$, woraus $p = \frac{2P_x}{x^2}$ folgt; die beiden gefundenen Werthe von p einander gleichgesetzt, gibt: $\frac{2P_x}{x^2} = \frac{2P}{l^2}$, woraus $P_x = \frac{Px^2}{l^2}$ folgt.

Für den Querschnitt f gilt die Gleichung: $P_x + G_x = f\mathfrak{S}$, wobei G_x das Gewicht des Körperstückes von der Länge x bezeichnet. Für P_x den Werth gesetzt, gibt: $\frac{Px^2}{l^2} + G_x = f\mathfrak{S}$, diese Gleichung nach x differenzirt, wobei wir den Zeiger von G_x weglassen und G, sowie f als Veränderliche betrachten, gibt: $\frac{2Pxdx}{l^2} + dG = \mathfrak{S}df$, für dG kann aber das unendlich kleine Gewicht des in der Entfernung x von dem unteren Ende angenommenen prismatisch gedachten Körperstückes von der Länge dx und dem Querschnitte f gesetzt werden; bezeichnet γ das Gewicht einer Volumeinheit des Stabes, so ist $dG = \gamma f dx$, daher:

$$\gamma f dx + \frac{2Pxdx}{l^2} = \mathfrak{S}df, \text{ oder durch } \mathfrak{S}dx \text{ dividirt}$$

$$\frac{\gamma f}{\mathfrak{S}} + \frac{2Px}{\mathfrak{S}l^2} = \frac{df}{dx}, \text{ oder } \frac{df}{dx} - \frac{\gamma f}{\mathfrak{S}} - \frac{2Px}{\mathfrak{S}l^2} = 0;$$

diese Gleichung hat die Form:

$$(\alpha) \dots \frac{dy}{dx} + ay + bx = 0, \text{ hierbei ist:}$$

$$y = f,\ a = -\frac{\gamma}{\mathfrak{S}},\ b = -\frac{2P}{\mathfrak{S}l^2}.$$

Zur Trennung der Veränderlichen in Gleichung (α) setzen wir $y = uv$, wo u und v zwei neue Veränderliche sind; dadurch wird $dy = v\,du + u\,dv$ und $\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$, diesen Werth von $\frac{dy}{dx}$ und $y = uv$ in Gleichung (α) eingesetzt, gibt:

$$v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} + auv + bx = 0, \text{ oder}$$

$$u\left(\frac{dv}{dx} + av\right) + v\frac{du}{dx} + bx = 0.$$

Die beiden Veränderlichen u und v sind bis jetzt nur an die eine Bedingung gebunden, dass $uv = y$ ist, wir können sie daher noch einer zweiten Bedingung unterwerfen und setzen zu diesem Zwecke:

$$\frac{dv}{dx} + av = 0,$$

welche Gleichung wegen der vorausgehenden die folgende:

$$v\frac{du}{dx} + bx = 0$$

nothwendig nach sich zieht. Die letzten zwei Gleichungen dienen zur Bestimmung von u und v, aus der ersteren folgt:

$$\frac{dv}{v} = -a\,dx; \text{ integrirt: } ln.\,v + ln.\,C = -ax,$$

wenn man die Constante in Form $ln.\,C$ zufügt, somit $v = \frac{1}{C} \cdot e^{-ax}$.

Aus der zweiten Gleichung nämlich, aus:

$$v\frac{du}{dx} + bx = 0, \text{ folgt: } du + \frac{bx\,dx}{v} = 0$$

und für v den gefundenen Werth gesetzt:

$$du + \frac{bx\,dx}{\frac{1}{C} \cdot e^{-ax}} = 0, \text{ oder } du = -\frac{Cbx\,dx}{e^{-ax}}, \text{ integrirt:}$$

$$u = -Cb\int\frac{x\,dx}{e^{-ax}} = C' - Cb\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right)e^{ax}$$

die beiden Werthe von u und v mit einander multiplicirt, erhält man:

$$y = uv = \left[C' - Cb\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right)e^{ax}\right]\frac{e^{-ax}}{C} \text{ oder}$$

$$y = \left[C' - \frac{Cb}{a^2}(a x - 1) e^{ax}\right] \frac{e^{-ax}}{C}, \text{ oder}$$

$$y = \frac{e^{-ax} C'}{C} - \frac{b}{a^2}(a x - 1);$$

setzt man für die willkürliche Constante $\frac{C'}{C}$ einfach C, so ist $y = Ce^{-ax} - \frac{b}{a^2}(a x - 1)$, für $x = 0$, geht y in Null über, denn im unteren Endpunkte hat der Körper nichts zu tragen, daher sein Querschnitt da gleich Null, und da wir $f = y$ gesetzt haben, so folgt für $x = 0$:

$$0 = Ce^0 + \frac{b}{a^2} = C + \frac{b}{a^2}, \text{ woraus } C = -\frac{b}{a^2}$$

folgt; den Werth der Constanten eingesetzt:

$$y = -\frac{b e^{-ax}}{a^2} - \frac{b}{a^2}(a x - 1) = \frac{b}{a^2}(1 - a x - e^{-ax})$$

für a, b und y die Werthe gesetzt:

$$f = \frac{2 P \mathfrak{S}}{\gamma^2 l^2}\left(1 + \frac{\gamma x}{\mathfrak{S}} - e^{\frac{\gamma x}{\mathfrak{S}}}\right),$$

für $x = l$, geht f über in f_1, daher:

$$f_1 = \frac{2 P \mathfrak{S}}{\gamma^2 l^2}\left(1 + \frac{\gamma l}{\mathfrak{S}} - e^{\frac{\gamma l}{\mathfrak{S}}}\right),$$

das Gewicht des Körperstückes von der Länge x findet sich aus der Gleichung $G_x + P_x = f \mathfrak{S}$, mit:

$$G_x = f \mathfrak{S} - P_x = \frac{2 P \mathfrak{S}^2}{\gamma^2 l^2}\left(1 + \frac{\gamma x}{\mathfrak{S}} - e^{\frac{\gamma x}{\mathfrak{S}}}\right) - \frac{P x^2}{l^2}, \text{ oder}$$

$$G_x = \frac{P}{l^2}\left[\frac{2 \mathfrak{S}^2}{\gamma^2}\left(1 + \frac{\gamma x}{\mathfrak{S}} - e^{\frac{\gamma x}{\mathfrak{S}}}\right) - x^2\right],$$

ebenso findet sich das Gewicht des ganzen Körpers aus der letzten Gleichung, wenn man darin $x = l$ setzt, dann geht G_x über in

$$G = \frac{P}{l^2}\left[\frac{2 \mathfrak{S}^2}{\gamma^2}\left(1 + \frac{\gamma l}{\mathfrak{S}} - e^{\frac{\gamma l}{\mathfrak{S}}}\right) - l^2\right].$$

Bilden wir noch den Quotienten:

$$\frac{f_1}{f} = \frac{\frac{2P\mathfrak{S}}{\gamma^2 l^2}\left(1 + \frac{\gamma l}{\mathfrak{S}} - e^{\frac{\gamma l}{\mathfrak{S}}}\right)}{\frac{2P\mathfrak{S}}{\gamma^2 l^2}\left(1 + \frac{\gamma x}{\mathfrak{S}} - e^{\frac{\gamma x}{\mathfrak{S}}}\right)} = \frac{1 + \frac{\gamma l}{\mathfrak{S}} - e^{\frac{\gamma l}{\mathfrak{S}}}}{1 + \frac{\gamma x}{\mathfrak{S}} - e^{\frac{\gamma x}{\mathfrak{S}}}},$$

so ist dadurch die allgemeine Form der gleichen Festigkeit des Körpers dargestellt.

Für $G = 0$, also auch $G_x = 0$, d. h. also, wenn das Eigengewicht des Stabes nicht berücksichtigt wird, hat man aus den Gleichungen für G und G_x, wenn man $G = 0$ und $G_x = 0$ setzt:

$$1 + \frac{\gamma l}{\mathfrak{S}} - e^{\frac{\gamma l}{\mathfrak{S}}} = \frac{\gamma^2 l^2}{2\,\mathfrak{S}^2} \text{ und } 1 + \frac{\gamma x}{\mathfrak{S}} - e^{\frac{\gamma x}{\mathfrak{S}}} = \frac{\gamma^2 x^2}{2\,\mathfrak{S}^2};$$

setzt man nun diese Werthe von

$$1 + \frac{\gamma l}{\mathfrak{S}} - e^{\frac{\gamma l}{\mathfrak{S}}} \text{ und } 1 + \frac{\gamma x}{\mathfrak{S}} - e^{\frac{\gamma x}{\mathfrak{S}}}$$

in obiger Gleichung für den Quotienten $\frac{f_1}{f}$ ein, so ist:

$$\frac{f_1}{f} = \frac{\gamma^2 l^2}{\gamma^2 x^2} = \frac{l^2}{x^2}.$$

Sind endlich die Querschnitte des Körpers Kreisflächen, so dass man setzen kann: $f_1 = \frac{d_1^2 \pi}{4}$ und $f = \frac{d^2 \pi}{4}$, so hat man

$$\frac{d_1^2 \frac{\pi}{4}}{d^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{l^2}{x^2}, \text{ oder } \frac{d_1}{d} = \frac{l}{x}, \text{ woraus } d = \frac{x d_1}{l}$$

folgt; dies ist die Gleichung einer Geraden; daher der Längenschnitt des Körpers ein gleichschenkliges Dreieck, und der Körper selbst ein gerader Kegel ist, wodurch die specielle Form der gleichen Festigkeit dargestellt ist.

Die in den zwei letzten Beispielen erhaltenen speciellen Körperformen der gleichen Zugfestigkeit bei Nichtberücksichtigung des Eigengewichtes und Kreisflächen als Querschnitte werden im Maschinenbau beispielsweise bei den Holzschrauben, bei den bei Zapfenlagern vorkommenden eingegossenen Schraubenstiften, bei Säulchen u. s. w. angewendet. Eine Anwendung der Körperform der gleichen

Druckfestigkeit, bei welcher das Eigengewicht berücksichtigt wird und der Querschnitt beliebig sein kann (allgemein ausgedrückt durch die Gleichung $f = f_0 \, e^{\frac{\gamma x}{\mathfrak{S}}}$), wird bei dem Bau von Schornsteinen, die zu Dampfkesselanlagen gehören, gemacht, indem die Schornsteine mit geringer Einziehung im Schafte gebaut werden; f_0 ist der Querschnitt am oberen Ende des Schornsteins, der nicht aus einer Festigkeitsgleichung, sondern aus anderen beim Baue eines Dampfschornsteins zu berücksichtigenden Verhältnissen und Daten berechnet wird.

29. Es ist der Durchmesser eines cylindrischen schmiedeisernen Stütz- oder Spurzapfens, welcher einer stehenden Transmissionswelle als Fusszapfen dient, zu berechnen, wenn er in der Richtung seiner Längenaxe einen Druck von P^{Kg} auszuhalten hat.

Auflösung. Die Kraft P beansprucht die Druckfestigkeit des Zapfens und wird auf dessen Stirnfläche übertragen. Diese letztere muss, damit der Druck auf die Flächeneinheit nicht zu gross werde, eine solche Grösse haben, dass die Abnützung innerhalb statthafter Grenzen bleibe; es ist also hier nicht die Festigkeit des Zapfens allein massgebend, sondern auch die Rücksicht auf möglichst geringe Abnützung. Die hier gestattete Inanspruchnahme soll bei Schmiedeisen nur $^1/_2$ bis $^1/_3{}^{Kg}$ pro Quadrat-Millimeter Querschnittfläche betragen. Heisst der Zapfendurchmesser d, so ist aus der Formel für die Druckfestigkeit „$P = f\mathfrak{S}$", wenn wir darin $f = \frac{\pi d^2}{4}$ einsetzen, $P = \frac{d^2 \pi \mathfrak{S}}{4}$, und hieraus

$$d = \sqrt{\frac{4P}{\pi \mathfrak{S}}} = \sqrt{\frac{4P}{\pi \,.\, 0{,}3333}} = 1{,}956 \sqrt{P},$$

und abgerundet $\underline{d = 2\sqrt{P}}$.

Bei stehenden Wellen ist die den Zapfen beanspruchende Druckkraft das Gewicht der Welle, sammt den darauf sitzenden Maschinentheilen. Denkt man sich das Gewicht dieser letzteren als das Gewicht eines Cylinders von der Länge l_1 und dem Durchmesser $= D$, gleich dem Durchmesser der cylindrischen Welle, so ist die in die Rechnung einzuführende ideale Wellenlänge die wirkliche Länge l der Welle, mehr der Länge l_1 des Cylinders, in welchen man sich die auf der Welle sitzenden Maschinentheile verwandelt denkt. Das Gewicht der Welle von der idealen Länge $L = l + l_1$ ist daher: $P = Lf\gamma = \frac{L \pi D^2}{4} \,.\, \gamma$, wenn γ das Gewicht einer Volumeinheit des Wellenmaterials bedeutet. Nehmen wir die Dichte des Schmiedeisens zu 7,5 an, so ist das Gewicht eines Kubik-Milli-

meters Schmiedeisen $\gamma = 0{,}0000075^{Kg}$; setzt man nun in die Formel $d = 2\sqrt{P}$ für P den Werth ein, so ist:

$$d = 2\sqrt{L\,D^2\,\frac{\pi}{4}\,.\,0{,}0000075}\,;$$

führen wir noch die Länge L anstatt in Millimetern in Metern ein, so ist, wenn L_1 die ideale Wellenlänge in Millimetern und L dieselbe Länge in Metern bezeichnet: $1000\,L^m = L_1{}^{mm}$, wir haben daher in der Formel für d statt L zu setzen: $1000\,L$; hiermit wird:

$$d = 2\sqrt{1000\,L^m\,.\,0{,}0000075\,\frac{\pi\,D^2}{4}} = 0{,}15\,D\sqrt{L^m}\,;$$

wir haben also hier den Zapfendurchmesser durch die ideale Länge und den Durchmesser der Welle ausgedrückt.

Wäre z. B. die wirkliche Länge der stehenden, schmiedeisernen Welle $l = 3^m$, ihr Durchmesser $D = 80^{mm}$, und betrage das Gewicht der auf ihr sitzenden Maschinentheile, als: Zahnräder oder Riemenscheiben $P_1 = 200^{Kg}$, so ist die Länge l_1 des schmiedeisernen Cylinders von dem Durchmesser $D = 80^{mm}$ und dem Gewichte $P_1 = 200^{Kg}$ zu finden aus der Gleichung für das Gewicht dieses Cylinders:

$$P_1 = \frac{D^2\pi}{4}\,l_1\,.\,\gamma\,; \text{ hieraus ist}$$

$$l_1 = \frac{4\,P_1}{D^2\pi\gamma} = \frac{4\,.\,200}{(80)^2\,.\,3{,}14\,.\,0{,}0000075} = 5{,}317^m$$

also $L = l_1 + l = 5{,}317 + 3 = 8{,}317^m$. hiermit wird

$$d = 0{,}15\,D\sqrt{L} = 0{,}15\,.\,80\sqrt{8{,}317} = 34{,}56^{mm}.$$

30. Es sind die Festigkeitsdimensionen eines Kamm- oder Ringzapfens zu berechnen, wenn die ihn auf seine Druckfestigkeit beanspruchende Kraft P^{Kg} beträgt.

Auflösung. Wenn bei einer stehenden Welle der Verticaldruck P oder bei einer liegenden Welle, die in der Richtung ihrer Längenaxe einen Druck P erfährt, wie dies z. B. bei den Schraubenschiffwellen der Fall ist, die die Schiffsschraube tragen, der Druck P sehr gross wird, so wird der Zapfen mit einem oder mehreren Ringen auf der Mantelfläche umgeben, welche, mit dem Zapfen aus einem Stücke hergestellt, den Druck P aufnehmen und auf das umschliessende Lager übertragen; siehe nebenstehende Figur. Die Ringe, von denen z an der Zahl sein mögen, und von denen jeder die Breite b und die Dicke b_1 hat, nehmen den ganzen Druck P auf, welcher

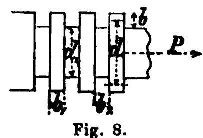


Fig. 8.

die Druckfestigkeit der Ringe beansprucht; andererseits könnten die Ringe bei zunehmendem Drucke P unter Umständen vom Kerne ausgescheert werden. Berücksichtigt man die erstere Beanspruchungsart, so ist die Druckfläche eines Ringes $\pi d b$, wenn d den mittleren Durchmesser eines Ringes bedeutet, daher die gesammte gedrückte Fläche von z Ringen $f = \pi d b z$. Setzt man diesen Werth von f in die Formel „$P = f \mathfrak{S}$" ein, so ist $P = \pi d b z \mathfrak{S}$; in dieser Gleichung erscheinen jedoch die drei Unbekannten d, b und z; da man aber aus den Daten der Aufgabe weitere zwei Gleichungen nicht aufstellen kann, so müssen wir zwischen d und b ein passendes Verhältniss annehmen und z unbestimmt lassen.

Wir nehmen das gebräuchliche Verhältniss $b = 1{,}2 \sqrt{d}$ oder $b = \frac{d}{8}$ an; im ersten Falle ist $P = \pi d \,.\, 1{,}2 \sqrt{d} \,.\, z \mathfrak{S}$, woraus $P^2 = \pi^2 d^2 \,.\, 1{,}44\, d z^2 \mathfrak{S}^2$ und $d = \sqrt[3]{\frac{P^2}{1{,}44 \,.\, \pi^2 z^2 \mathfrak{S}^2}}$ folgt; setzen wir $\mathfrak{S} = \frac{1}{3}$ ein, so ist:

$$d = \sqrt[3]{\frac{P^2}{1{,}44 \,.\, 9{,}8596 \,.\, \frac{1}{9} \,.\, z^2}} = 0{,}85 \sqrt[3]{\frac{P^2}{z^2}};$$

nimmt man $b = \frac{d}{8}$, so ist: $P = \pi d \,.\, \frac{d}{8} z \mathfrak{S}$., woraus

$$d = \sqrt{\frac{8P}{\pi z \mathfrak{S}}} = \sqrt{\frac{8P}{3{,}14 \,.\, \frac{1}{3} \,.\, z}} = 2{,}764 \sqrt{\frac{P}{z}} \text{ folgt.}$$

Wäre z. B. $P = 15000^{Kg}$, $z = 10$, so ist nach der ersteren Formel:

$$d = 0{,}85 \sqrt[3]{\frac{(15000)^2}{100}} = 111{,}37^{mm} \text{ und } b = 1{,}2 \sqrt{d} = 12{,}6^{mm}.$$

Nach der zweiten Formel würde:

$$d = 2{,}764 \sqrt{\frac{15000}{10}} = 107^{mm} \text{ und } b = \frac{d}{8} = 13{,}3^{mm}.$$

Für die zweite Beanspruchungsart, d. i. für die Ausscheerung der Ringe vom Kerne hat man, wenn der Kerndurchmesser d_1 ist, $d_1 = d - b$ und $\mathfrak{S}_1 \pi d_1 b_1 z = P$; nehmen wir

$$b_1 = b = \frac{d}{8} = \frac{d_1 + b_1}{8}, \text{ woraus } 8 b_1 - b_1 = d_1 \text{ und } b_1 = \frac{d_1}{7}$$

folgt, so ist:

$$P = \pi d_1 \frac{d_1}{7} \cdot z \mathfrak{S}_1;$$

hieraus folgt:

$$d = \sqrt{\frac{7P}{\pi z \mathfrak{S}_1}} = 2{,}64 \sqrt{\frac{P}{\pi z \mathfrak{S}_1}};$$

die Scheerspannung $\mathfrak{S}_1$ braucht man hier nicht kleiner zu nehmen, als die Zugspannung $\mathfrak{S}$, weil diese ohnedies schon klein genug mit $\mathfrak{S} = \frac{1}{3}$ angenommen wird. Bestimmen wir aus dem letzten Werthe von d_1 noch den mittleren Durchmesser d eines Ringes, so ist, weil $d = d_1 + b_1 = d_1 + \frac{d}{8}$ ist,

$$d = 2{,}64 \sqrt{\frac{P}{\pi z \mathfrak{S}}} + \frac{d}{8}, \text{ oder } d - \frac{d}{8} = 2{,}64 \sqrt{\frac{P}{\pi z \mathfrak{S}}}$$

und hieraus folgt:

$$d = 2{,}64 \cdot \frac{8}{7} \sqrt{\frac{P}{\pi z \mathfrak{S}}} \text{ oder } d = 3{,}017 \sqrt{\frac{P}{\pi z \mathfrak{S}}}.$$

Vergleichen wir mit den nach der zweiten Beanspruchungsart gefundenen Werthen von d_1 und d die nach der Druckfestigkeit der Ringe gefundenen Werthe von d_1 und d, so hat man, da

$$d_1 = d - b_1 = \sqrt{\frac{8P}{\pi z \mathfrak{S}}} - \frac{d_1}{7} \text{ oder } \frac{8}{7} d_1 = \sqrt{\frac{8P}{\pi z \mathfrak{S}}} \text{ und}$$

$$d_1 = \frac{7}{8} \sqrt{\frac{8P}{\pi z \mathfrak{S}}} = 2{,}475 \sqrt{\frac{P}{\pi z \mathfrak{S}}} \text{ ist,}$$

nach der ersten Beanspruchungsart:	nach der zweiten Beanspruchungsart:
$d = 2{,}83 \sqrt{\frac{P}{\pi z \mathfrak{S}}}$	$d = 3{,}017 \sqrt{\frac{P}{\pi z \mathfrak{S}}}$
$d_1 = 2{,}475 \sqrt{\frac{P}{\pi z \mathfrak{S}}}$	$d_1 = 2{,}64 \sqrt{\frac{P}{\pi z \mathfrak{S}}}$

Man sieht, dass die zweite Gruppe von Formeln für d und d_1 etwas stärkere Werthe liefert, trotzdem kann man die ersteren Formeln für d und d_1 für praktische Berechnungen verwenden, da wir ja nur eine sehr geringe Spannung $\mathfrak{S} = \frac{1}{3}$ in die Formel einsetzen, also einen ungewöhnlich hohen Sicherheitsgrad haben.

31. Es ist der Durchmesser d einer auf Zug oder Druck beanspruchten Kolbenstange des Dampfcylinders einer Dampfmaschine zu berechnen, wenn die Kolbenstange aus Schmiedeisen oder Gussstahl ist.

Auflösung. Es heisse der nützliche Dampfdruck auf den Kolben P, der Kolbendurchmesser D, die Anzahl der Atmosphären des nützlichen Dampfdruckes n, so ist:

$$P = \frac{\pi D^2}{4} \cdot 0{,}010333 \cdot n = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \mathfrak{S};$$

da der Druck einer Atmosphäre auf 1^{m^2} bekanntlich 10333^{Kg}, also auf 1^{mm^2} nur $\frac{10333}{1000000} = 0{,}010333^{Kg}$ beträgt, so ist der Druck von n Atmosphären $n$mal so gross, und eine Fläche von $\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^{mm^2}$ erleidet daher einen Druck von $\left(\frac{\pi D^2}{4} \cdot 0{,}010333\, n\right)^{Kg}$. Aus der letzten Gleichung für P ergibt sich: $d = D\sqrt{\frac{0{,}010333\, n}{\mathfrak{S}}}$; für Schmiedeisen nimmt man $\mathfrak{S} = 6$, damit wird $\underline{d_s = 0{,}0408\, D\sqrt{n}}$, für Gussstahl nehme man $\mathfrak{S} = 9$ und erhält damit: $\underline{d_{st} = 0{,}03264\, D\sqrt{n}}$.

32. Es sind für eine Schubstange von kreisförmigem Querschnitte, die durch eine Kraft P nur auf Zug oder Druck beansprucht wird, Formeln zur Berechnung des mittleren Durchmessers d aufzustellen, wenn die Schubstange aus Schmiedeisen, aus Gusseisen, aus Gussstahl oder aus Eichenholz ist.

Auflösung. Setzen wir in der Formel für Zug- und Druckfestigkeit, $P = f\mathfrak{S}$, für f den Werth $f = \frac{d^2\pi}{4}$, so ist: $P = \frac{d^2\pi}{4} \cdot \mathfrak{S}$, woraus folgt: $d = \sqrt{\frac{4P}{\pi\mathfrak{S}}}$, für Schmiedeisen nehme man die zulässige Spannung $\mathfrak{S}_s = 4$, für Gusseisen $\mathfrak{S}_g = 2$, für Gussstahl $\mathfrak{S}_{st} = 6$ und für Eichenholz $\mathfrak{S}_h = 0{,}27$, diese Werthe eingesetzt, gibt: den Durchmesser der schmiedeisernen Stange, mit:

$$d_s = \sqrt{\frac{4P}{\pi \cdot 4}} = 0{,}56\sqrt{P},$$

den Durchmesser der gusseisernen Schubstange, mit:

$$d_g = \sqrt{\frac{4P}{\pi \cdot 2}} = 0{,}8\sqrt{P},$$

den Durchmesser der Gussstahlstange, mit:

$$d_{st} = \sqrt{\frac{4P}{\pi \,.\, 6}} = 0{,}46\sqrt{P},$$

den Durchmesser der Eichenholzstange, mit:

$$d_h = \sqrt{\frac{4P}{\pi \,.\, 0{,}27}} = 2{,}18\sqrt{P}.$$

33. Eine kurze gusseiserne Säule von kreuzförmigem Querschnitte (siehe nebenstehende Figur) wird durch eine Kraft P auf Druck beansprucht; es sind die Querschnittsdimensionen dieser Säule zu berechnen.

Fig. 9.

Auflösung. Der tragende Querschnitt setzt sich zusammen aus zwei Rechtecken, von denen das eine den Flächeninhalt ab, das andere den Flächeninhalt $(a - b)\,b$ hat, daher ist der ganze Querschnitt $f = ab + (a - b)\,b = 2ab - b^2 = b\,(2a - b)$. Setzen wir diesen Werth von f in die Formel für die Druckfestigkeit, $P = f\mathfrak{S}$ ein, so ist: $P = b\,(2a - b)\,\mathfrak{S}$. Da in dieser Gleichung die zwei Unbekannten a und b vorkommen, aus den Daten der Aufgabe sich aber eine zweite Gleichung nicht ableiten lässt, so nehmen wir zwischen a und b ein Verhältniss an; wir setzen $\frac{a}{b} = \varphi$, d. h. gleich einer bekannten Grösse, die zweckmässig gewählt wird, dann ist $b = \frac{a}{\varphi}$; diesen Werth von b in obige Gleichung für P eingesetzt, gibt:

$$P = \frac{a}{\varphi}\left(2a - \frac{a}{\varphi}\right)\mathfrak{S} = \frac{a}{\varphi}\left(\frac{2a\varphi - a}{\varphi}\right)\mathfrak{S} = \frac{a^2}{\varphi^2}(2\varphi - 1)\,\mathfrak{S},$$

woraus

$$a = \sqrt{\frac{P\varphi^2}{(2\varphi - 1)\,\mathfrak{S}}} = \varphi\sqrt{\frac{P}{(2\varphi - 1)\,\mathfrak{S}}}$$

folgt; setzen wir die hier zulässige Druckspannung $\mathfrak{S} = 5$ und $\varphi = 7$ ein, so ist:

$$a = 7\sqrt{\frac{P}{(14 - 1)\,5}} = \frac{7}{8{,}06}\sqrt{P}, \text{ oder } a = 0{,}868\sqrt{P},$$

und b wird hiermit:

$$b = \frac{a}{\varphi} = \sqrt{\frac{P}{(2\varphi - 1)\,\mathfrak{S}}} = \frac{0{,}868\sqrt{P}}{7} = 0{,}124\sqrt{P};$$

wäre z. B. $P = 10000^{Kg}$, so ergibt sich $a = 86{,}8^{mm}$ und $b = 12{,}4^{mm}$, wofür man abgerundet $a = 87^{mm}$ und $b = 13^{mm}$ nehmen kann.

34. Eine durch die Kraft P auf Zug beanspruchte Stange ist aus vier Winkeleisen, die mit einander vernietet werden, zusammengesetzt, so dass der Querschnitt kreuzförmig erscheint. (Siehe nebenstehende Figur.) Es sind die Querschnittsdimensionen eines dieser Winkeleisen, das sind die Schenkellänge s und die mittlere Dicke δ zu berechnen.

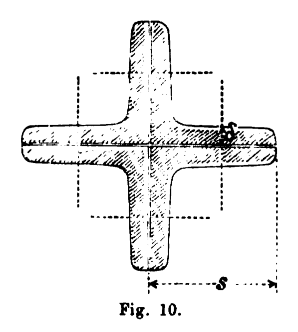


Fig. 10.

Auflösung. Die Querschnittsfläche f_1 eines Winkeleisens ist die Differenz zweier Quadrate, von denen das eine die Seite s, das andere die Seite $s - \delta$ hat; daher

$$f_1 = s^2 - (s - \delta)^2 = s^2 - s^2 + 2s\delta - \delta^2 = 2s\delta - \delta^2, \text{ oder}$$

$$f_1 = (2s - \delta)\,\delta,$$

daher die gesammte tragende Querschnittsfläche

$$f = 4f_1 = 4\delta\,(2s - \delta);$$

diesen Werth von f in die Formel für die Zugfestigkeit, $P = f\mathfrak{S}$, eingesetzt, gibt: $P = 4\delta\,(2s - \delta)\,\mathfrak{S}$; in dieser Gleichung erscheinen die zwei Unbekannten δ und s, wir nehmen daher zwischen δ und s noch eine Beziehung an, und setzen $\frac{s}{\delta} = \varphi$, wodurch

$$\delta = \frac{s}{\varphi} \text{ und } P = 4 \,.\, \frac{s}{\varphi}\left(2s - \frac{s}{\varphi}\right)\mathfrak{S}, \text{ oder}$$

$$P = \frac{4s}{\varphi}\left(\frac{2s\varphi - s}{\varphi}\right)\mathfrak{S} = \frac{4s^2}{\varphi^2}\,(2\varphi - 1)\,\mathfrak{S} \text{ und}$$

$$\frac{4s^2}{\varphi^2}\,(2\varphi - 1) = \frac{P}{\mathfrak{S}} \text{ wird; hieraus ist}$$

$$s = \frac{\varphi}{2}\sqrt{\frac{P}{\mathfrak{S}\,(2\varphi - 1)}} \text{ und für } \mathfrak{S} = 6, \text{ erhält man:}$$

$$s = 0{,}204\,\varphi\sqrt{\frac{P}{2\varphi - 1}} \text{ und } \delta = 0{,}204\sqrt{\frac{P}{2\varphi - 1}};$$

wenn die Grösse φ, d. i. also die Beziehung zwischen s und δ so beschaffen ist, dass s ein Vielfaches von δ ist, so können die letzten Formeln für s und δ sofort benützt werden. Die zwischen s und δ gebräuchliche Beziehung im Maschinenbau ist aber: $s^{mm} = 10^{mm} + 6\,\delta$, woraus: $\frac{s}{\delta} = \varphi = \frac{10}{\delta} + 6$ folgt; setzt man diesen Werth von φ in die für s und δ gefundenen Gleichungen ein, so kann man diese,

wie leicht ersichtlich ist, nicht zur unmittelbaren Berechnung benützen, da in den rechten Theilen noch die Unbekannte δ vorkommt. In diesem Falle gelangen wir zu den gewünschten Gleichungen für s und δ wie folgt: Setzen wir in die Gleichung $f = \frac{4 s^2}{\varphi^2} (2 \varphi - 1)$ für φ den Werth $\varphi = \frac{10}{\delta} + 6$ ein, so ist:

$$f = \frac{4 s^2 \left[2 \left(\frac{10}{\delta} + 6 \right) - 1 \right]}{\left(\frac{10}{\delta} + 6 \right)^2}, \text{ oder:}$$

$$f = \frac{4 s^2 \left[2 \left(\frac{10 + 6 \delta}{\delta} \right) - 1 \right]}{\left(\frac{10 + 6 \delta}{\delta} \right)^2}, \text{ oder:}$$

$$f = \frac{4 s^2 (20 + 12 \delta - \delta)}{\delta} \cdot \frac{\delta^2}{(10 + 6 \delta)^2} = \frac{4 s^2 (20 + 11 \delta) \delta}{(10 + 6 \delta)^2},$$

in diese Gleichung den Werth von $s = 10 + 6 \delta$ eingesetzt, gibt: $f = \frac{4 (10 + 6 \delta)^2 (20 + 11 \delta) \delta}{(10 + 6 \delta)^2}$, oder $f = 4 (20 + 11 \delta) \delta$; aus der Gleichung $P = f \mathfrak{S}$ folgt: $f = \frac{P}{\mathfrak{S}}$, daher $4 (20 + 11 \delta) \delta = \frac{P}{\mathfrak{S}}$, oder $44 \delta^2 + 80 \delta = \frac{P}{\mathfrak{S}}$, oder $\delta^2 + \frac{80 \delta}{44} = \frac{P}{44 \mathfrak{S}}$, oder $\delta^2 + \frac{20 \delta}{11} = \frac{P}{44 \mathfrak{S}}$, diese quadratische Gleichung nach δ aufgelöst, gibt:

$$\delta = - \frac{10}{11} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{11} \right)^2 + \frac{P}{44 \mathfrak{S}}},$$

oder, da hier offenbar nur das positive Vorzeichen der Wurzel brauchbar ist,

$$\delta = \sqrt{\frac{100 \cdot 44 \mathfrak{S} + 121 P}{121 \cdot 44 \mathfrak{S}}} - 0{,}91, \text{ oder } \mathfrak{S} = 6 \text{ gesetzt:}$$

$$\delta = \frac{1}{178{,}7291} \sqrt{26400 + 121 P} - 0{,}91, \text{ oder}$$

$$\underline{\delta = 0{,}0056 \sqrt{26400 + 121 P} - 0{,}91^{mm}}, \text{ hiermit wird}$$

$$s = 10 + 6 \delta = 10 + 6 \left\{ 0{,}0056 \sqrt{26400 + 121 P} - 0{,}91 \right\}, \text{ oder}$$

$$\underline{s = 0{,}0336 \sqrt{26400 + 121 P} + 4{,}54^{mm}}.$$

Berücksichtigt man jedoch noch den Umstand, dass durch das Vernieten der Winkeleisen der Querschnitt der ganzen Stange geschwächt wird und sieht ferner von der sehr bedeutenden Reibung zwischen den Nietköpfen und dem Winkeleisen, die zu Gunsten der Festigkeit der Stange wirkt, ab, so hat man, wenn der Nietbolzendurchmesser $d = 2\delta$ also $\frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (2\delta)^2}{4} = \pi \delta^2$ genommen wird, den ganzen tragenden Querschnitt $f = \frac{P}{\mathfrak{S}} = 80\delta + 44\delta^2 - 4\pi\delta^2$ (siehe die frühere Entwicklung von f) oder:

$$\frac{P}{\mathfrak{S}} = 80\delta + 44\delta^2 - 12{,}56\delta^2, \text{ oder } \delta^2 + \frac{80\delta}{31{,}44} = \frac{P}{31{,}44\mathfrak{S}}, \text{ woraus}$$

$$\delta = -\frac{40}{31{,}44} \pm \sqrt{\left(\frac{40}{31{,}44}\right)^2 + \frac{P}{31{,}44\mathfrak{S}}} = -\frac{40}{31{,}44} \pm$$

$$\pm \sqrt{\frac{1600\mathfrak{S} + 31{,}44P}{(31{,}44)^2\mathfrak{S}}} \text{ folgt.}$$

Da nur das positive Vorzeichen der Wurzel zu gebrauchen ist, so hat man:

$$\delta = \frac{1}{31{,}44}\sqrt{\frac{1600\mathfrak{S} + 31{,}44P}{\mathfrak{S}}} - 1{,}272, \text{ oder}$$

$$\delta = 0{,}0318\sqrt{\frac{1600\mathfrak{S} + 31{,}44P}{\mathfrak{S}}} - 1{,}272, \text{ für } \mathfrak{S} = 6:$$

$$\underline{\delta = 0{,}01298\sqrt{9600 + 31{,}44P} - 1{,}272}$$

$$\underline{s = 0{,}07788\sqrt{9600 + 31{,}44P} + 2{,}368.}$$

Wäre z. B. $P = 2500^{Kg}$, so erhielte man nach den ersteren Formeln für s und δ

$$s = 0{,}0336\sqrt{26400 + 121P} + 4{,}54 = 31{,}72^{mm} \text{ und}$$

$$\delta = \frac{s - 10}{6} = 3{,}62^{mm};$$

nach den letzteren Formeln erhielte man:

$$\delta = 4{,}128^{mm} \text{ und } s = 34{,}768^{mm}.$$

35. Ein lederner Treibriemen von der Breite b und der Dicke δ soll von einer eisernen Riemscheibe, welche n Umdrehungen pro Minute macht und einen Halbmesser $= R^{mm}$ hat, N Pferdekräfte auf eine andere eiserne Riemscheibe übertragen; es sind die Querschnittsdimensionen des Riemens zu berechnen.

Auflösung. Da der Riemen bei der Bewegung der Scheiben durch die ihn spannenden Kräfte auf Zug beansprucht wird (was jedoch auch in der Ruhelage der Scheiben, aber in geringerem Grade geschieht), so ist der Riemen auf seine Zugfestigkeit zu berechnen. Bei der Uebertragung von N Pferdekräften von der einen auf die andere Scheibe, das ist also bei der Uebertragung der mechanischen Arbeit von N Pferdekräften, muss nothwendiger Weise eine am Umfange der einen (treibenden) Scheibe wirkende Kraft P einen ebenso grossen, aber entgegengesetzt wirkenden Widerstand am Umfange der anderen (getriebenen) Scheibe überwinden, da ja bekanntlich bei der Verrichtung einer mechanischen Arbeit stets eine Kraft irgend einen Widerstand zu überwinden hat. Wenn daher von der einen Scheibe N Pferdekräfte auf die andere übertragen werden, so muss dadurch auch von dem Umfange der einen Scheibe eine Kraft P auf den Umfang der anderen Scheibe übertragen werden. Die Uebertragung dieser Kraft ist nur durch die Reibung möglich, welche infolge der Spannung des Riemens zwischen der inneren Fläche desselben und den Mantelflächen der cylindrischen Riemscheiben stattfindet. Die Grösse dieser Reibung hängt ab von dem Reibungscoëfficienten zwischen Leder und Eisen, von der Länge des Bogens, in welcher der Riemen die Scheibe umspannt, und von der Grösse der Spannung des Riemens. Diese Spannung muss so gross sein, dass die dadurch am Umfange der kleineren von beiden zusammenarbeitenden Scheiben erzeugte Reibung mindestens ebenso gross ist, als der grösste von der zu verrichtenden Arbeit herrührende, auf den Umfang der getriebenen Scheibe reducirte Widerstand, d. i. also auch die zu übertragende Kraft P, wenn das Gleiten des Riemens verhindert werden soll. Es ist nun leicht einzusehen, dass die Spannung im Riemen vor dem Beginn der Bewegung (welche, wie eben erklärt, so gross sein muss, um durch Reibung die Kraft P zu übertragen) in der ganzen Ausdehnung des Riemens gleich gross sein muss; während der Bewegung aber muss die Spannung im führenden Riemenstück (auf die treibende Scheibe auflaufendes Riemenstück) grösser sein, als in dem geführten (von der treibenden Scheibe ablaufenden) Riemenstück; da sonst die Riemenbewegung und damit auch die Kraftübertragung unmöglich würde, denn: In dem in Ruhe befindlichen, gespannten Riemen herrschen zwei gleich grosse einander entgegengesetzte Spannungen,

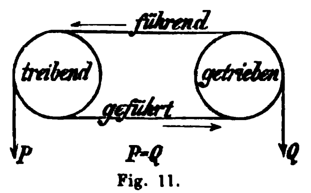


Fig. 11.

die sich also aufheben; soll nun Bewegung eintreten, so muss nothwendiger Weise die eine der den Riemen spannenden Kräfte grösser und die andere um ebensoviel kleiner werden, so dass die Differenz der beiden Spannungen die Grösse jener Kraft vorstellt, welche überhaupt von der einen Scheibe auf die andere übertragen

werden kann. Dass der Ueberschuss der Spannung im führenden Riemenstück bei der Bewegung über die Spannung des Riemens in der Ruhelage ebensoviel betragen muss, als die Differenz zwischen der Spannung in der Ruhelage und der Spannung im geführten Riementheil, geht daraus hervor, dass die Spannung des Riemens in der Ruhelage das Riemenmaterial nur bis zu einer gewissen Grenze beanspruchen darf, damit keine bleibende Riemenverlängerung eintrete; würde nun der führende Riementheil stärker gespannt, ohne dass die Spannung des geführten Theiles kleiner würde, so würde der Riemen über die zulässige Grenze ausgedehnt; da aber dies nicht geschehen und die Riemenlänge unverändert bleiben soll, ferner nach der Lehre von der Zugfestigkeit die Ausdehnungen bis zur Elasticitätsgrenze proportional den ausdehnenden Kräften sind, so muss die Spannung im geführten Theil des Riemens um ebensoviel abnehmen bei der Bewegung, als die Spannung im führenden Riementheil zunimmt. Bezeichnet T die Riemenspannung in der Ruhelage, T_1 die Spannung im führenden Riemenstück bei der Bewegung, T_2 die Spannung im geführten Riementheil, t den Zuwachs der Spannung T im führenden Riemenstück, t_1 die Abnahme der Spannung T im geführten Riementheil, d die Ausdehnung, welche der Riemen während der Ruhelage durch die Kraft T und bei der Bewegung durch die Kraft $T + t - t_1$ erfährt, so folgt nach der Lehre von der Zugfestigkeit die Proportion:

$$T + t - t_1 : T = d : d, \text{ woraus}$$

$$t = t_1, \text{ also auch } T_1 - T = T - T_2 \text{ und } T = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

folgt; es muss ferner, wie bereits erklärt, $T_1 - T_2 = P$ sein; aus den beiden letzten Gleichungen folgt, wenn man dieselben nach T_1 und T_2 auflöst: $T_1 = T + \frac{P}{2}$ und $T_2 = T - \frac{P}{2}$. Der Uebergang der Spannung von T_2 in T_1 erfolgt nicht plötzlich, sondern nur allmälig längs der ganzen Berührungsstrecke zwischen Riemen und Scheibenumfang.

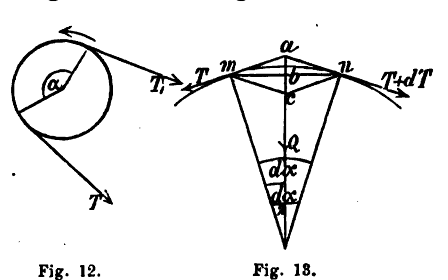


Fig. 12. Fig. 13.

Wir betrachten den Riemen an einer beliebigen Stelle, an welcher er durch einen unendlich kleinen Bogen ds mit der Scheibe in Berührung ist; α sei der ganze vom Riemen umspannte Bogen der Scheibe. (Siehe nebenstehende Figuren.) Die in dem Bogenelement ds herrschende Spannung sei allgemein T, so resultirt aus den beiden Spannungen T, welche den beiden Endpunkten des Bogenelements

m n entsprechen, und die wir, da sie nur um den unendlich kleinen Betrag von dT von einander verschieden sind, als gleich annehmen, der auf das Bogenelement ds wirkende elementare Normaldruck $Q = 2 \, . \, am \sin \frac{d\alpha}{2} = 2\, T \sin \frac{d\alpha}{2}$ und wegen der Kleinheit von $d\alpha$ kann man $\sin \frac{d\alpha}{2} = \frac{d\alpha}{2}$ setzen, daher: $Q = T d\alpha$; die Reibung, die durch den Normaldruck Q hervorgebracht wird, ist, wenn μ den Reibungscoëfficienten bezeichnet, $\mu T d\alpha$; wenn kein Gleiten des Riemens eintreten soll, so darf dT höchstens gleich sein dieser elementaren Reibung, denn dT ist der Unterschied zwischen den Kräften, welche bei der Bewegung in den zwei einander unendlich naheliegenden Theilchen des führenden und geführten Riementheiles herrschen, und da diese Spannungsdifferenz, welche die durch die elementare Reibung übertragbare unendlich kleine Kraft darstellt, höchstens so gross sein darf, als die Reibung selbst, so folgt die Gleichung: $dT = \mu T d\alpha$, woraus $\frac{dT}{T} = \mu d\alpha$ und durch Integration zwischen den Grenzen T_1 und T_2 folgt:

$$ln \, . \, T_1 - ln \, . \, T_2 = \mu\alpha, \text{ oder } ln \left(\frac{T_1}{T_2}\right) = \mu\alpha, \text{ oder}$$

$$T_1 = T_1 \, e^{\mu\alpha} \text{ und da } T_2 = T_1 - P \text{ ist, so folgt auch:}$$

$$T_1 = (T_1 - P)\, e^{\mu\alpha}, \text{ woraus } T_1 \,(e^{\mu\alpha} - 1) = P e^{\mu\alpha} \text{ und } T_1 = \frac{P e^{\mu\alpha}}{e^{\mu\alpha} - 1}$$

folgt. Nach dieser grössten, den Riemen spannenden Kraft T_1 sind die Querschnittsdimensionen desselben zu bestimmen. Im Maschinenbau nimmt man durchschnittlich $\alpha = 0{,}8\,\pi$ und $\mu = 0{,}28$, diese Werthe eingesetzt, gibt:

$$T_1 = \frac{P \, . \, 2{,}71828^{0{,}28\pi \, . \, 0{,}8}}{2{,}71828^{0{,}28 \, . \, 0{,}8\pi} - 1},$$

rechnet man diesen Werth von T_1 aus, so erhält man abgerundet: $T_1 = 2P$.

Nun erübrigt noch, die zu übertragende Kraft P durch die in der Aufgabe gegebenen Daten, als: Pferdekräfteanzahl N, Riemscheibenhalbmesser R und minutliche Umdrehungszahl n auszudrücken. Nach dem Begriffe der mechanischen Arbeit und des Masses für dieselbe durch Pferdekräfte muss $N = \frac{P^{Kg} v_1{}^{m}}{75}$ sein, wenn P^{Kg} die zu übertragende Kraft oder der zu überwindende Widerstand und v_1 die Umfangsgeschwindigkeit in Metern bezeichnet, mit

welcher die Uebertragung zu geschehen habe. Führen wir v_1 anstatt in Metern in Millimetern ein, so ist $1000\, v_1{}^m = v^{mm}$, daher

$$v_1{}^m = \frac{v^{mm}}{1000} \text{ und } N = \frac{P v^{mm}}{1000 \,.\, 75},$$

und weil die Umfangsgeschwindigkeit v einer sich bewegenden Riemscheibe vom Halbmesser R und der minutlichen Tourenzahl u

$$v = \frac{2 \pi R u}{60} \text{ ist, so hat man: } N = \frac{P \,.\, 2 \pi R u}{60 \,.\, 75 \,.\, 1000}, \text{ woraus}$$

$$P = \frac{60 \,.\, 75 \,.\, 1000\, N}{2 \pi R u} = \frac{716560\, N}{R u}$$

folgt. Diesen Werth von P in die Gleichung $T_1 = 2P = f\mathfrak{S}$ eingesetzt, gibt:

$$\frac{2 \,.\, 716560\, N}{R u} = f\mathfrak{S}, \text{ woraus } f = \frac{1433120\, N}{R u \mathfrak{S}}$$

folgt. Die hier zulässige Spannung nimmt man durchschnittlich $\mathfrak{S} = 0{,}28$, dieses gibt:

$$f^{mm^2} = b\delta = \frac{1433120\, N}{R u \,.\, 0{,}28} = \frac{5118285\, N}{R u}.$$

Ist z. B. $N = 10$, $R = 1000^{mm}$ und $u = 100$, so ist

$$f = \frac{5118285 \,.\, 10}{1000 \,.\, 100} = 511{,}8285$$

und abgerundet $f = 512^{mm^2}$; nehmen wir die Dicke des Riemens zu $\delta = 5^{mm}$ an, so ist die Breite $b = \frac{512}{5} = 102{,}4^{mm}$. Bei der Annahme der Riemendicke muss man sich allerdings nach den Dicken der im Handel vorkommenden Riemen richten.

Zu einer anderen Festigkeitsformel für die Berechnung der Querschnittsdimensionen des Riemens gelangt man, wenn man für die zulässige Spannung $\mathfrak{S}$ und die Riemendicke δ die Erfahrungswerthe $\mathfrak{S} = 0{,}05\,\delta$ und $\delta = 0{,}506\sqrt{b}$ nimmt; die Spannung $\mathfrak{S}$ erscheint hier abhängig von der Riemendicke, also nicht als constante Grösse; dieses ist dadurch gerechtfertigt, dass der Festigkeitsmodul des Leders um so grösser wird, also auch die Spannung $\mathfrak{S}$ um so grösser genommen werden kann, je dicker es ist; ebenso erscheint die Dicke abhängig von der Breite und wächst mit derselben, weil in Wirklichkeit die breiteren Riemen auch aus dickerem Leder angefertigt werden. Die Werthe von $\mathfrak{S}$ und δ in die Gleichung: $b\delta. = \frac{2P}{\mathfrak{S}}$ eingesetzt, gibt:

$$b \,.\, 0{,}506 \sqrt{b} = \frac{2P}{0{,}05\,\delta} = \frac{2P}{0{,}05 \,.\, 0{,}506 \sqrt{b}},$$

woraus $b = 12{,}5 \sqrt{P}$ und für P den bekannten Werth $P = \frac{716560\,N}{R\,u}$

gesetzt: $b = 10580 \sqrt{\frac{N}{R\,u}}$ folgt. Nach dieser Formel würde für die oben

angenommenen Zahlenwerthe $b = 10580 \sqrt{\frac{10}{1000 \,.\, 100}} = 105{,}8^{mm}$

und $\delta = 0{,}506 \sqrt{b} = 0{,}506 \sqrt{105{,}8} = 5{,}2^{mm}$ werden.

36. Ein Drahtseil überträgt bei einem Drahtseiltrieb von der einen Seilscheibe vom Halbmesser R und der minutlichen Tourenzahl u, N Pferdekräfte auf eine andere ebenso grosse Seilscheibe; es ist der Durchmesser d des Drahtseiles zu berechnen.

Auflösung. Beim Drahtseiltrieb kann ebenso wie beim Riementrieb nur durch die Reibung zwischen dem Seile und den Scheibenumfängen eine Kraft P von dem Umfange der einen Scheibe auf den Umfang der anderen übertragen werden; die Reibung wird auch hier durch die Spannung des Seiles hervorgebracht; allein diese wird hier nicht, wie beim Riementrieb durch wirkliches Spannen (Strecken) des Riemens erzeugt, sondern entsteht von selbst **durch das Gewicht** des schlaff von den Seilscheiben herabhängenden Seiles. Auch hier entsteht bei der Bewegung in dem führenden Seilstück die grössere Spannung T_1, in dem geführten Seilstück die kleinere Spannung T_2, aus denselben Gründen wie beim Riementrieb; die Differenz beider Spannungen ist wieder gleich der zu übertragenden Kraft P, also $T_1 - T_2 = P$. Man findet hier in gleicher Weise wie beim Riementrieb $T_1 = 2\,P$; allein man nimmt hier, um das Gleiten des Seiles mit Sicherheit zu verhüten, $T_1 = 2{,}5\,P$. Nach diesem in dem führenden Seiltrum herrschenden Zuge T_1 ist das Seil auf seine absolute Festigkeit zu berechnen. Setzt man für P den beim Riementrieb gefundenen Werth $P = \frac{716560\,N}{R\,u}$ ein, so ist: $T_1 = \frac{716560\,N}{R\,u} \,.\, 2{,}5$ und wenn i die Anzahl der Drähte im Seil und δ die Dicke eines Drahtes, also $\frac{i\pi\delta^2}{4}$ die Summe der tragenden Drahtquerschnitte ist, so hat man:

$$f = \frac{i\pi\delta^2}{4} = \frac{T_1}{\mathfrak{S}} = \frac{2{,}5 \,.\, 716560\,N}{R\,u \,.\, \mathfrak{S}}, \text{ woraus}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{4 \,.\, 2{,}5 \,.\, 716560\,N}{R\,u\,\mathfrak{S}\,\pi\,i}} = 2676{,}86 \sqrt{\frac{N}{R\,u\,\mathfrak{S}\,\pi\,i}}$$

folgt. Setzen wir $\mathfrak{S} = 6$, so ist $\delta = 616{,}8 \sqrt{\frac{N}{R u . i}}$ *); nehmen wir ferner $i = 36$ an, so kann man annähernd $\frac{d^2 \pi}{4} = 2 . \frac{\delta^2 \pi}{4} . i$, also $\delta = \frac{d}{\sqrt{2 i}}$ setzen, dadurch erhält man:

$$\frac{d}{\sqrt{2 i}} = 2676{,}86 \sqrt{\frac{N}{R u \mathfrak{S} \pi i}} \text{ und } d = . \, 2676{,}86 \sqrt{\frac{2 i N}{R u \mathfrak{S} \pi i}}$$

oder $\mathfrak{S} = 6$ gesetzt, $d = 872{,}16 \sqrt{\frac{N}{R u}}$.

---

*) In Berücksichtigung der durch das Umbiegen des Seiles auf dem Seilscheiben-Umfange in den Drähten des Seiles entstehenden Biegungsspannung s gelangt man zu einer Formel für die Berechnung der Drahtstärke δ wie folgt:

In der Gleichung $\frac{i \pi \delta^2}{4} = 2{,}5 . 716560 \frac{N}{R u \mathfrak{S}}$ beiderseits mit δ multiplicirt:

$$i \pi \delta^3 = \frac{7165600 \, N \delta}{R u \mathfrak{S}} = \frac{7165600 \, N}{u \mathfrak{S}} . \left(\frac{\delta}{R}\right);$$

wir fanden in Aufgabe 20 bei Berechnung von Förder-Drahtseilen

$$\frac{\delta}{R} = \frac{2 s}{E} = \frac{2 s}{20000} = \frac{s}{10000},$$

diesen Werth von $\frac{\delta}{R}$ in obige Gleichung eingesetzt:

$$i \pi \delta^3 = \frac{7165600 \, N}{u \mathfrak{S}} . \frac{s}{10000} = \frac{716{,}56 \, N}{u} . \frac{s}{\mathfrak{S}}, \text{ hieraus ist:}$$

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{716{,}56 \, N}{u \pi i} . \frac{s}{\mathfrak{S}}} = 6{,}109 \sqrt[3]{\frac{N}{i u} . \frac{s}{\mathfrak{S}}}.$$

Bei Benützung dieser Formel ist jedoch der Halbmesser R an die Bedingung gebunden: $R = \frac{E \delta}{2 s}$. Wählen wir das Verhältniss $\frac{s}{\mathfrak{S}}$ so, dass R ein Minimum wird, so hat man nach der in Aufgabe 20 durchgeführten Rechnung $\frac{s}{\mathfrak{S}} = 2$, daher ist

$$\delta = 6{,}109 \sqrt[3]{\frac{2 N}{i u}} = 7{,}696 \sqrt[3]{\frac{N}{i u}};$$

der Halbmesser R ist dann: $R = \frac{3 E \delta}{4 s_1}$, wobei $s_1 = \mathfrak{S} + s$ ist; wir setzten oben $\mathfrak{S} = 6$ ein, somit ist $s = 12$, also $s_1 = 18$, und

$$R = \frac{3 . 20000 \, \delta}{4 . 18} = 833{,}3 \, \delta.$$

Zwischen der Anzahl der Drähte eines Drahtseiles, der Dicke δ eines Drahtes und dem Seildurchmesser d kann man mit einer für die Praxis genügend genauen Annäherung die Beziehung aufstellen, dass die Summe der tragenden Drahtquerschnittsflächen $i\frac{\pi\delta^2}{4}$ gleich ist der Fläche eines Kreises, dessen Durchmesser gleich $\frac{3}{4}$ des Seildurchmessers d ist, also $\left(\frac{3}{4}d\right)^2\frac{\pi}{4} = \frac{\delta^2\pi}{4}i$, woraus $d = \frac{4}{3}\delta\sqrt{i}$ folgt. Man hat daher für den Durchmesser eines Drahtseiles mit beliebiger Drahtzahl annähernd:

$$d = \frac{4}{3}\sqrt{i}\,.\,2676{,}86\sqrt{\frac{N}{Rui\mathfrak{S}\pi}} = 3477{,}24\sqrt{\frac{N}{Ru\mathfrak{S}\pi}};$$

selbstverständlich ist für die Festigkeit des Seiles nicht der Seildurchmesser d oder der Seilquerschnitt $\frac{d^2\pi}{4}$, sondern die Drahtdicke δ und die Summe der tragenden Drahtquerschnitte $i\frac{\pi\delta^2}{4}$ von Wichtigkeit und massgebend, denn die Hanfseele in der Mitte des Seiles und die Hanfseelen in den Litzen können nicht als mittragend angenommen werden. Speciell für das 36drähtige Seil kann der Zusammenhang zwischen d, δ und i wie folgt, gefunden werden: Das Seil besteht aus 6 Litzen à 6 Drähten, der Flächeninhalt einer Litze kann mit ziemlicher Annäherung gleichgesetzt werden der Fläche eines Kreises vom Durchmesser $\frac{d}{3}$, weniger der Querschnittsfläche der in der Litze enthaltenen Hanfseele vom Durchmesser δ, daher die Fläche einer Litze $\left(\frac{d}{3}\right)^2\frac{\pi}{4} - \frac{\pi\delta^2}{4}$, und da 6 Litzen vorhanden sind, so ist $\frac{\pi\delta^2}{4}i = 6\left[\left(\frac{d}{3}\right)^2\frac{\pi}{4} - \frac{\pi\delta^2}{4}\right]$; hieraus ist $\delta^2\left(\frac{i}{4}+\frac{3}{2}\right) = \frac{d^2}{6}$, $d = \delta\sqrt{6\left(\frac{i}{4}+\frac{3}{2}\right)}$, und

$$d = \delta\sqrt{\frac{3}{2}(i+6)} = \delta\sqrt{\frac{3}{2}(36+6)} = \text{angenähert } 8\delta.$$

37. An der Welle eines Drahtseiltriebes soll ein Widerstand von 50^{Kg}, an einem Hebelarm von 1000^{mm} fortwährend wirkend, überwunden werden; es ist die Dicke d des Seiles, sowie die Dicke δ der Drähte im Seile zu berechnen.

Auflösung. Wir machen die Annahme, dass 36 Drähte im Seile enthalten sein sollen und die beiden gleich grossen Seil-

scheiben je einen Halbmesser von $R = 750^{mm}$ erhalten sollen. Bezeichnet P die auf den Umfang der Seilscheibe übertragene Kraft oder den auf den Umfang der Seilscheibe reducirten, zu überwindenden Widerstand, so muss, da das statische Moment der Kraft gleich dem statischen Moment der Last ist, die Gleichung stattfinden:

$$50 \,.\, 1000 = 750\,P, \text{ woraus } P = \frac{50 \,.\, 1000}{750} = 66^2/_3$$

ist; setzen wir daher diesen Werth von P in die Formel $f = \frac{T_1}{\mathfrak{S}} = \frac{2{,}5\,P}{\mathfrak{S}} = \frac{\pi\,\delta^2 i}{4}$, sowie $\mathfrak{S} = 6{,}66$ und $i = 36$ ein, so ist

$$\frac{\pi\,\delta^2}{4} \,.\, 36 = \frac{2{,}5 \,.\, 66^2/_3}{6}, \text{ woraus}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{4 \,.\, 2{,}5 \,.\, 66^2/_3}{3{,}14 \,.\, 6^2/_3 \,.\, 36}} = 0{,}96 = \text{angenähert } 1^{mm}$$

folgt, und da für $i = 36$, $d = 8\,\delta$ gesetzt werden kann. so ist angenähert $d = 8^{mm}$.

38. Es sind die Querschnittsdimensionen eines zu einer Bandbremse einer gewöhnlichen Lastwinde gehörigen schmiedeisernen Bremsbandes zu berechnen, wenn die durch die Lastwinde zu hebende Last $Q = 2000^{Kg}$, der Durchmesser der Seiltrommel $2\,r = 300^{mm}$ und der Halbmesser R der Bremsscheibe, $R = 400^{mm}$, beträgt.

Auflösung. Die durch das Anziehen des Bremsbandes, also durch das Bremsen erzeugte Reibung zwischen Bremsband und Bremsscheibe muss so gross sein, dass die auf den Umfang der letzteren reducirte, zu bremsende Kraft, $P = \frac{Q\,r}{R}$, durch die Reibung, die ja der Bewegungsrichtung der Last Q entgegenwirkt, überwunden werde; diese Kraft P ist hier ebenso, wie bei der Kraftübertragung durch Riemen, gleich der Differenz der in dem Bremsbande entstehenden Spannungen T und t, also $T - t = P = \frac{Q\,r}{R}$; es ist auch hier, wie beim Riementrieb $T = t\,e^{\mu\,\alpha}$, wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen, μ den Reibungscoëfficienten und α den vom Bremsbande umspannten Bogen ausdrückt; wir setzen im Durchschnitt $\alpha = 1{,}6\,\pi$ und $\mu = 0{,}18$, dieses gibt:

$$e^{\mu\,\alpha} = 2{,}71828^{0{,}18 \,.\, 1{,}16\,\pi} = 2{,}47,$$

daher $T = 2{,}47\,t$, und da $t = T - P$, so folgt $T = 2{,}47\,(T - P)$,

woraus $T = 2{,}47\,T - 2{,}47\,P$ und $T = \frac{2{,}47\,P}{1{,}47} = 1{,}68\,P = \frac{1{,}68\,Qr}{R}$ ist. Durch diese Kraft T wird das Bremsband auf seine absolute Festigkeit beansprucht, daher sein Querschnitt

$$\beta\delta = f = \frac{T}{\mathfrak{S}} = \frac{1{,}68\,Qr}{R\,\mathfrak{S}},$$

wenn β die Breite und δ die Dicke des Bandes genannt wird. Wir setzen $\mathfrak{S} = 5$ und erhalten:

$$\beta\delta = \frac{1{,}68\,.\,2000\,.\,150}{400\,.\,5} = 252^{mm^2},$$

nehmen wir $\delta = 4^{mm}$ an, so wird $\beta = \frac{252}{2} = 63^{mm}$.

39. Es sind zwei plattenförmige gusseiserne Körper (z. B. die Theile einer Fundamentplatte einer Dampfmaschine), welche stumpf aneinander stossen, an der Verbindungsstelle durch schmiedeiserne, warm einzulegende Anker mit einander zu verbinden (siehe beistehende Figur), es fragt sich, bis zu welcher Temperatur darf man den Anker erhitzen, damit er durch die Wärme nicht über die zulässige Grenze ausgedehnt wird, und welches ist das richtige, für die Praxis brauchbare Verhältniss zwischen der Länge l (Entfernung zwischen den Nasen des Ankers) nach dem Schwinden und der Länge l_1 vor der Erwärmung des Ankers?

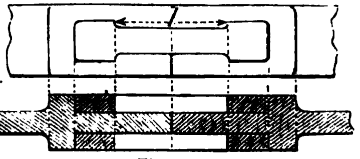


Fig. 14.

Auflösung. Die Temperatur eines im Dunkeln rothglühenden Schmiedeisens oder Stahls beträgt ungefähr 500° C. Ein Schmiedeisen- oder Stahlstab von der Länge l erfährt durch die Erhitzung von 0° bis 100° C. eine Ausdehnung von $0{,}0011821\,l$, bei einer Erhöhung auf 500° aber nicht 5mal soviel, weil die Ausdehnungen bei hohen Temperaturen nicht mehr proportional den Temperaturerhöhungen sind, sondern $0{,}00734213\,l = \frac{l}{136}$; ebenso wird sich ein Eisenstab von der Länge l um den gleichen Betrag zusammenziehen, sobald man seine Temperatur auf 500° vermindert. Aus der Formel für die Ausdehnung d eines Stabes, die er durch eine ihn auf Zug beanspruchende Kraft P erfährt, aus:

$$d = \frac{Pl}{Ef} = \frac{f\mathfrak{S}\,l}{Ef} = \frac{\mathfrak{S}\,l}{E}$$

hat man, wenn man darin für Schmiedeisen statt $\mathfrak{S}$ den Tragmodul $T = 15$ und $E = 20000$ einsetzt,

$$d = \frac{15\,l}{20000} = 0{,}00075\,l = \frac{l}{1333};$$

für Stahl würde, bei $T = 25$

$$d = \frac{25\,l}{20000} = 0{,}00125\,l = \frac{l}{800} \text{ sein.}$$

Wir sehen hieraus, dass durch die Erhitzung bis zur Rothgluth die Ausdehnung $\frac{l}{136}$ die Elasticitätsgrenze des Schmiedeisens und Stahls schon weit überschreitet, woraus hervorgeht, dass man den Anker nicht bis zur Rothgluth erhitzen soll, um keine bleibende Formänderung zu bewirken. Angenommen, der schmiedeiserne Anker habe vor der Erwärmung zwischen den Ansätzen eine Länge von $l = 190^{mm}$, nach der Erwärmung auf 500^{0} hat er eine Länge $l_0 = 190\,(1 + 0{,}00734213) = 191{,}395^{mm}$, würde er nur soweit erwärmt, dass er bis zur Elasticitätsgrenze ausgedehnt, also nach der Erwärmung die Länge $l' \lesseqgtr 190\,(1 + 0{,}00075) \lesseqgtr 190{,}1425$ hätte, so wäre im ersten Falle die Verlängerung $1{,}395^{mm}$, im zweiten Falle $\lesseqgtr 0{,}1425^{mm}$, man müsste also entweder bei der Ausführung des Ankers denselben zwischen den Nasen um ein Stück $\lesseqgtr 0{,}1425^{mm}$ kleiner schmieden als 190^{mm}, oder die Widerlager an den Aussparungen in den Gussplatten um ebensoviel länger machen; diese Dimension von $0{,}1425^{mm}$ ist zu gering, als dass sie bei der Ausführung eingehalten werden könnte; man nimmt daher als höchste Grenze der Differenz zwischen der Länge l nach dem Schwinden des Ankers und der Länge l_1 vor der Erwärmung bei Schmiedeisen und Stahl zu $1\,^0/_0$ von der Länge l an, macht dann aber wegen der Querschnittsverschwächung durch Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze dementsprechend den Anker stärker; es müsste nun, damit die Elasticitätsgrenze nicht überschritten werde, $l - l_1 < \frac{l}{1333}$ bei Schmiedeisen, und $l - l_1 < \frac{l}{800}$ bei Stahl sein; bei der Ausführung nimmt man aber $l - l_1 \lesseqgtr \frac{l}{100}$ oder $\frac{l}{l_1} - 1 = \frac{l}{100\,l_1}$ oder $\frac{l}{l_1} = \frac{100}{99}$. Hat also der Stab vor der Erwärmung die Länge $l_1 = 190$, so soll er nach dem Schwinden (im eingelegten Zustande) eine solche Länge haben, dass die Proportion stattfindet:

$$l : l_1 = 100 : 99, \text{ woraus } l = \frac{100\,l_1}{99} = \frac{190\,.\,100}{99} = 191{,}919 \text{ oder}$$

$l =$ angenähert 192^{mm} folgt. Durch diese Ausdehnung um 2^{mm}, d. i. also um $\frac{1}{95}$ der ursprünglichen Länge wird allerdings die Elasticitäts-

grenze weit überschritten, dadurch eine bleibende Formänderung und Verschwächung des Querschnittes herbeigeführt; dieser verminderte Querschnitt muss aber immer noch so gross sein, dass er den den Anker beanspruchenden Kräften genügenden Widerstand leisten kann. Es ist hierbei nicht zu befürchten, dass die Festigkeit des Eisens, resp. die Cohäsionskraft zwischen den Molecülen durch die die Elasticitätsgrenze überschreitende Ausdehnung geschwächt wird, denn es hat sich durch Versuche (ausgetretene Umfassungswände durch schwindende Anker wieder einzurichten) gezeigt, dass die zusammenziehende Wirkung des schwindenden Eisens nur bis zu einer gewissen Grenze geht, über welche hinaus sich einfach der Querschnitt der Anker verkleinert und die Eisenmolecüle eine bestimmte feste Lage zu einander einnehmen, und zwar entspricht die Grösse des wirksamen Schwindens einer Temperaturdifferenz von 67° C.

40. Es ist der Durchmesser d eines Schraubenbolzens mit scharfem Gewinde, die Höhe h des Schraubenkopfes, die Höhe h_1 der zugehörigen Schraubenmutter und die Schlüsselweite D derselben zu bestimmen, wenn die Schraube durch eine in der Richtung ihrer Längenaxe wirkende Kraft P auf Zug beansprucht wird.

Auflösung. Bei einer jeden Schraube hat man den inneren oder Kerndurchmesser d_1 und den äusseren Durchmesser d, welcher um die doppelte Gewindegangtiefe grösser als ersterer ist, zu unterscheiden; da $d_1 < d$ ist, so hat man die Schraube nach dem cylindrischen Kern, dessen Querschnittsfläche $f = \frac{d_1^2 \pi}{4}$, zu berechnen. Diesen Werth von f in die Formel $f = \frac{P}{\mathfrak{S}}$ eingesetzt, gibt: $\frac{d_1^2 \pi}{4} = \frac{P}{\mathfrak{S}}$, woraus $d_1 = \sqrt{\frac{4P}{\pi \mathfrak{S}}}$ folgt. Bei Schrauben nimmt man einen hohen Grad von Sicherheit und setzt $\mathfrak{S} = 2{,}6$, dies gibt: $d_1 = \sqrt{\frac{4P}{\pi \,.\, 2{,}6}} = 0{,}7\sqrt{P}$, woraus die Tragfähigkeit der Schraube $P = 2 d_1^2$ sich ergibt.

Denkt man sich das Gewinde einer scharfen Schraube durch eine Ebene durchschnitten, welche durch die Axe der Schraube geht und senkrecht zur Endfläche des cylindrischen Kernes der Schraube ist, so erhält man als Schnittfigur dieser Ebene mit dem Gewinde eine Reihe gleichschenkliger Dreiecke. In einem solchen Dreiecke abc (siehe nebenstehende Figur) ist die Basis $bc = s =$ der Ganghöhe der Schraube, das Loth ad auf die Basis ist gleich der Gangtiefe t der Schraube. Aus dem Dreiecke abd folgt: $\frac{ad}{bd} = \frac{ad}{cd} = \operatorname{cotg}\left(\frac{e}{2}\right)$

Fig. 15.

oder $\frac{t}{\frac{s}{2}} = \operatorname{cotg} \frac{e}{2}$ oder $t = \frac{1}{2} s \operatorname{cotg} \frac{e}{2}$; der für die scharfen Schrauben anzuwendende Kantenwinkel e wird nach Whitworth zu 55^0 angenommen, dieses gibt: $t = \frac{s}{2} . \operatorname{cotg} \left(\frac{55}{2}\right)^0 = 0{,}96\,s$. Nach der von Whitworth aufgestellten empirischen Formel für die Ganghöhe einer scharfen Schraube $s = 1^{mm} + 0{,}08\,d$ erhält man daher $t = 0{,}96\,(1 + 0{,}08\,d)$, oder $t = 0{,}96 + 0{,}0768\,d$; da nun der äussere Durchmesser d = dem Kerndurchmesser d_1, vermehrt um die doppelte Gangtiefe ist, so hat man $d - d_1 = 2\,t = 2\,(0{,}96 + 0{,}0768\,d)$, oder $d - d_1 = 1{,}92 + 0{,}1536\,d$, oder $d\,(1 - 0{,}1536) = 1{,}92 + d_1$, woraus $0{,}8464\,d = 1{,}92 + d_1$ und

$$d = \frac{1{,}92 + d_1}{0{,}8464} = 2{,}268^{mm} + 1{,}181\,d_1$$

folgt, oder für d_1 obigen Werth gesetzt, gibt den äusseren Durchmesser des Schraubenbolzens:

$$d = 2{,}268 + 0{,}7 \,.\, 1{,}181 \sqrt{P} = 2{,}268^{mm} + 0{,}8267 \sqrt{P},$$

wäre z. B. $P = 900^{Kg}$, so ist

$$d = 2{,}268 + 0{,}8267 \sqrt{900} = 2{,}268 + 0{,}8267 \,.\, 30 = 27{,}069^{mm}$$

und abgerundet $d = 27^{mm}$.

Berechnung der Höhe h des Schraubenkopfes.

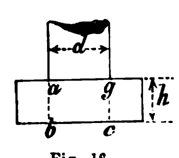


Fig. 16.

Die Kraft P sucht den Bolzen in der Cylinderfläche $a\,b\,c\,g$ (siehe beistehende Figur) vom Bolzenende auszuscheeren, daher ist

$$P = f\,\mathfrak{S} = \pi\,d\,h\,\mathfrak{S}, \text{ woraus } h = \frac{P}{\pi\,d\,\mathfrak{S}}$$

folgt. Ist der vom Gewinde freie Theil des Bolzens auf den Kern d_1 abgesetzt, so hat man $h = \frac{P}{\pi\,d_1\,\mathfrak{S}}$, oder für P obigen Werth $P = 2\,d_1^2$ gesetzt, gibt:

$$h = \frac{2\,d_1^2}{\pi\,d_1\,\mathfrak{S}} = \frac{2\,d_1}{\pi\,\mathfrak{S}} = \frac{2 \,.\, 0{,}7 \sqrt{P}}{\pi\,\mathfrak{S}}.$$

Da wegen der sehr häufig gebrauchten Methode der Herstellung des Schraubenkopfes durch Aufschweissen eines Ringes auf dem Bolzenende der Kopf nicht mit derjenigen Festigkeit auf dem Bolzenende haftet, als wenn der Kopf aus einem Stücke mit dem Bolzen hergestellt wäre, so nimmt man $\mathfrak{S} = 0{,}8$ an und hat dann:

$$h = \frac{2\,d_1}{3{,}14\,.\,0{,}8} = 0{,}8\,d_1 = 0{,}8\,.\,0{,}7\,\sqrt{P} = 0{,}56\,\sqrt{P},$$

für $P = 900^{Kg}$, wird $h = 0{,}56\,\sqrt{900} = 0{,}56\,.\,30 = 16{,}8$ und abgerundet $h = 17^{mm}$. Ist der vom Gewinde freie Theil des Bolzens nicht bis auf den Kern abgesetzt, sondern geht in der Stärke d fort, so ist die Cylinderfläche *abcg* etwas grösser und erhält man dadurch eine kleinere Kopfhöhe h

$$h = \frac{P}{\pi\, d\, \mathfrak{S}} = \frac{P}{\pi\, \mathfrak{S}\,(2{,}268 + 0{,}8267\,\sqrt{P})},$$ für

$P = 900^{Kg}$ wird $h = \dfrac{900}{3{,}14\,.\,0{,}8\,(2{,}268 + 0{,}8267\,\sqrt{900})} = 13{,}2^{mm}$.

Drückt man die Höhe h durch den Durchmesser d aus, so ist, wenn man in der Formel $h = 0{,}56\,\sqrt{P}$ für $\sqrt{P}$ den aus der Gleichung $d = 2{,}268 + 0{,}8267\,\sqrt{P}$ sich ergebenden Werth $\sqrt{P} = \dfrac{d - 2{,}268}{0{,}8267}$ setzt, $h = 0{,}56\left(\dfrac{d - 2{,}268}{0{,}8267}\right)$ oder $h = 0{,}68\,d - 1{,}54$, oder abgerundet $\underline{h = 0{,}7\,d}$.

Berechnung der Höhe der Schraubenmutter.

Die Kraft P hat das Bestreben, die Bolzengewinde, die von den Muttergewinden umfasst werden, vom Kern des Schraubenbolzens abzuscheeren; die abzuscheerende Fläche ist die Cylinderfläche $f = \pi\, d_1\, h_1$, daher hat man aus der Formel $P = f\,\mathfrak{S} = \pi\, d_1\, h_1\, \mathfrak{S}$, $h_1 = \dfrac{P}{\pi\, d_1\, \mathfrak{S}}$, oder für P den Werth gesetzt, $P = 2\,d_1^2$, gibt $h_1 = \dfrac{2\,d_1^2}{\pi\, d_1\, \mathfrak{S}} = \dfrac{2\,d_1}{\pi\, \mathfrak{S}}$; da die Scheerfestigkeit des Schmiedeisens sich zur absoluten Festigkeit desselben wie 35 zu 40 verhält, so hat man $\mathfrak{S} = 2{,}6\,.\,\dfrac{7}{8}$ zu setzen, wenn man will, dass die Festigkeit der Gewinde gegen Abscheeren vom Kerne ebenso gross sei, als die Festigkeit des Kernes gegen Zerreissen; daher $\mathfrak{S} = \dfrac{18{,}2}{8} = 2{,}275$

und $h_1 = \dfrac{2\,d_1}{3{,}14\,.\,2{,}275} = 0{,}28\,d_1$, oder wenn man in obiger Formel

$h_1 = \dfrac{P}{\pi\, d_1\, \mathfrak{S}}$, für d_1 den Werth $d_1 = 0{,}7\,\sqrt{P}$ setzt:

$$h_1 = \frac{P}{\pi\, \mathfrak{S}\,.\,0{,}7\,\sqrt{P}} = \frac{\sqrt{P}}{2{,}198\,\mathfrak{S}},\quad h_1 = \frac{\sqrt{P}}{2{,}198\,.\,2{,}275} = 0{,}2\,\sqrt{P}.$$

Zu der Formel $h_1 = 0{,}28\, d_1$ gelangt man übrigens auch, wie folgt:

Da die Gewindegänge gegen das Abscheeren vom Kerne der Schraube dieselbe Festigkeit haben sollen, wie der Kern gegen das Zerreissen, so muss, wenn man den Widerstand gegen Abscheeren mit $\mathfrak{S}_1$ bezeichnet, die Gleichung stattfinden: $P = \frac{\pi d_1^2}{4} \mathfrak{S} = \pi d_1\, h_1\, \mathfrak{S}_1$, woraus $h_1 = \frac{d_1\, \mathfrak{S}}{4\, \mathfrak{S}_1}$ und wegen $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_1} = \frac{8}{7}$, $h_1 = \frac{d_1}{4} \cdot \frac{8}{7} = \frac{2\, d_1}{7} = 0{,}28\, d_1$ folgt. In der Praxis wird jedoch die Höhe der Schraubenmutter wegen verschiedener praktischer Rücksichten (z. B. Verringerung der Abnützung) bei scharfen Schrauben gleich dem äusseren Durchmesser, also $h_1 = d$ genommen.

Berechnung der Schlüsselweite D der Schraubenmutter.

Wird eine Schraubenmutter als ein 6seitiges Prisma betrachtet, so bedeutet D den Durchmesser des dem Sechseck eingeschriebenen Kreises. Addirt man zum äusseren Durchmesser d des Bolzens die doppelte Wandstärke w der Mutter, so erhält man die Schlüsselweite $D = d + 2w$; es handelt sich also um die Bestimmung der Wandstärke w der Mutter. Wird eine scharfgängige Schraube in der Richtung ihrer Axe durch die Kraft P auf Zug beansprucht, so entsteht vermöge der schiefen Schraubenflächen nebst dem Drucke, welcher die Reibung zwischen den Bolzen- und Muttergewindegängen hervorbringt, auch eine Kraft, die radial, rechtwinklig zur Schraubenaxe nach aussen wirkt und ein Zersprengen oder Aufreissen der Mutter zu bewirken bestrebt ist.

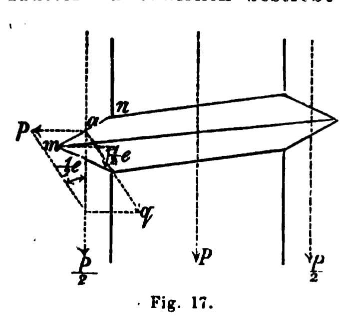


Fig. 17.

Denken wir uns die Kraft P (siehe nebenstehende Figur) in die Componenten $\frac{P}{2}$ und $\frac{P}{2}$, welche in ihren Richtungen parallel zur Richtung der Kraft P sind, zerlegt, und die eine Kraft $\frac{P}{2}$ in die Componenten p und q zerlegt, von denen p rechtwinklig zur Schraubenaxe und q senkrecht zur schiefen Schraubenfläche, also senkrecht auf mn wirkt, so ist q jene Kraft, welche die Reibung zwischen den Gewindegängen erzeugt und p die Kraft, welche die Wandstärke der Schraubenmutter auf Scheerfestigkeit beansprucht. Aus der Figur ist ersichtlich, dass $p = \frac{P}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{e}{2}\right)$, und da $\sphericalangle\, e = 55^\circ$ ist, so ist $p = \frac{P}{2} \operatorname{tg} 22^1/_2{}^\circ$, $p = \frac{P}{2} \cdot 0{,}5218 = 0{,}2609\, P = 0{,}261\, P$.

Die durch die Kraft p der Gefahr des Aufreissens ausgesetzte Fläche der Schraubenmutter ist ein Rechteck von der Mutterhöhe h_1 und der Wandstärke w, daher

$$p = 0{,}261\, P = w\, h_1 \mathfrak{S}, \text{ woraus } w = \frac{0{,}261\, P}{h_1 \mathfrak{S}}$$

ist, oder da $h_1 = d = 2{,}268 + 0{,}8267 \sqrt{P}$ ist, so hat man:

$$w = \frac{0{,}261\, P}{\mathfrak{S}\,(2{,}268 + 0{,}8267 \sqrt{P})};$$

um eine einfachere Formel für die Wandstärke zu erhalten, setzen wir im Nenner des rechten Theiles anstatt d den etwas kleineren Werth d_1, den Kerndurchmesser der Schraube, wodurch die Wandstärke um ein Geringes grösser wird; man erhält nun:

$$w = \frac{0{,}261\,.\,P}{d_1 \mathfrak{S}} \text{ und wegen } P = 2\, d_1^2 \text{ wird:}$$

$$w = \frac{0{,}261\,.\,2\, d_1^2}{d_1 \mathfrak{S}} = \frac{0{,}522\, d_1}{\mathfrak{S}};$$

die Spannung $\mathfrak{S}$ nehmen wir auch hier, wie bei der Berechnung der Mutterhöhe h_1 mit $\mathfrak{S} = 2{,}275^{Kg}$ an und erhalten

$$w = \frac{0{,}522\, d_1}{2{,}275} = 0{,}23\, d_1 = 0{,}23\,.\,0{,}7 \sqrt{P} = 0{,}161 \sqrt{P}, \text{ also}$$

$$D = 2\, w + d = 0{,}322 \sqrt{P} + 2{,}268 + 0{,}8267 \sqrt{P}, \text{ oder}$$

$$D = \sqrt{P}(0{,}322 + 0{,}8267) + 2{,}268 = 1{,}15 \sqrt{P} + 2{,}268;$$

praktischer Rücksichten wegen (z. B. wegen Vergrösserung der Aufsitzfläche) fügen wir noch die Additionalconstante von 5^{mm} dazu und erhalten abgerundet $D = 1{,}15 \sqrt{P} + 7^{mm}$, dies gibt für $P = 900^{Kg}$, $D = 1{,}15 \sqrt{P} + 7 = 1{,}15 \sqrt{900} + 7$ und abgerundet $D = 42^{mm}$. Drücken wir endlich noch D durch d aus, so hat man, wenn man in der Formel $D = 1{,}15 \sqrt{P} + 7$ für $\sqrt{P}$ den Werth setzt, der sich aus der Gleichung: $d = 2{,}268 + 0{,}8267 \sqrt{P}$ mit $\sqrt{P} = \dfrac{d - 2{,}268}{0{,}8267}$ ergibt, $D = 1{,}15 \dfrac{(d - 2{,}268)}{0{,}8267} + 7$, abgerundet $\underline{D = 1{,}4\, d + 4^{mm}}$; für $P = 900^{Kg}$ ergab sich oben $d = 27^{mm}$, dies gibt hier

$$D = 1{,}4\,.\,27 + 4 = 42^{mm}.$$

41. Es sind die Schrauben zu berechnen, welche zum Deckelverschluss eines Dampfcylinders dienen, wenn der Dampfkolben einen Durchmesser $d = 400^{mm}$ hat und der Dampfdruck auf den

Kolben bei drei Atmosphären Dampfspannung $P = \left(\frac{d^2\pi}{4}\right)^{cm^2} . 3 . 1$

$P = \frac{(40)^2 . 3 . 1 . 3{,}14}{4} = 3770^{Kg}$ beträgt.

Auflösung. Nimmt man nach einer empirischen Formel die Schraubenanzahl $a = 3 + \frac{d}{100} = 3 + \frac{400}{100} = 7$, so ist der Druck für eine Schraube $p = \frac{P}{7} = \frac{3770}{7} = 538{,}55$, abgerundet $p = 539^{Kg}$, hiermit wird der Kerndurchmesser einer Schraube

$$d_1 = 0{,}7 \sqrt{p} = 0{,}7 \sqrt{539} = 16{,}25^{mm},$$

und der äussere Durchmesser:

$$d_2 = 2{,}268 + 1{,}181\, d_1 = 2{,}268 + 1{,}181 . 16{,}25,\ \underline{d_2 = 21{,}46^{mm}}.$$

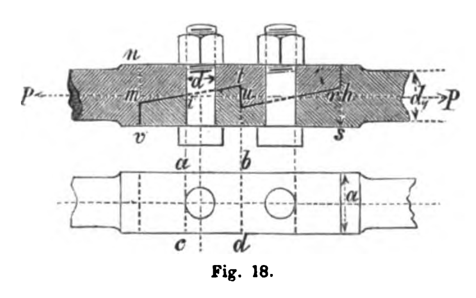


Fig. 18.

42. Zwei Theile eines durch die Kraft $P = 2000^{Kg}$ auf Zug beanspruchten schmiedeisernen Gestänges von kreisförmigem Querschnitte mit dem Durchmesser d_1 sind durch eine gezahnte Ueberplattung und Schrauben mit einander verbunden (siehe nebenstehende Figur); es sind die Festigkeitsdimensionen dieser Schraubenverbindung zu berechnen.

Auflösung. Da man es bei der Verbindung zweier Theile durch Schrauben möglichst vermeiden soll, die Schrauben auf Abscheerung zu beanspruchen, so ist hier die Ueberplattung mit Zähnen angeordnet, wodurch der die Schrauben auf Abscheeren beanspruchende Zug P aufgehoben wird, und könnten die Schrauben auch ganz wegbleiben, wenn die auf Abscheerung beanspruchte Fläche der Zähne $2abcd$ entsprechend gross genug und eine Verschiebung der verbundenen Enden senkrecht zur Kraftrichtung P nie zu befürchten wäre; allein wegen dieses letzteren Punktes muss man doch die Schrauben anwenden, setzt jedoch die beanspruchte Fläche $f = 2\left(abcd - \frac{\pi d^2}{4}\right)$; in dem Falle jedoch, dass die Kraft P nicht genau in der geometrischen Axe des Gestänges wirkt, kann es geschehen, dass durch die Abscheerung von nur einer Zahnfläche $abcd$ sammt den Schraubenquerschnitten eine Trennung der beiden verbundenen Enden herbeigeführt wird; man wird daher, um sicher zu gehen und um die Schrauben nicht zu beanspruchen, setzen müssen,

$f = abcd - \frac{\pi d^2}{4} = \frac{P}{\mathfrak{S}}$. In dieser Gleichung ist jedoch der Werth von d unbekannt, aus der Kraft P auch nicht bestimmbar, weil wir ja die Schrauben durch die Kraft P gar nicht beanspruchen wollen; da man aber die Kraft, welche zufällig einmal senkrecht zur Richtung der Kraft P die Schrauben auf Zug beanspruchen könnte, nicht kennt, so kann man für d auch nur einen beliebigen Durchmesser annehmen. Berechnen wir d aus der Formel $2 \cdot \frac{\pi d^2}{4} = \frac{P}{\mathfrak{S}}$, so ist

$$d = \sqrt{\frac{2P}{\pi \mathfrak{S}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2000}{3{,}14 \cdot 5}} = 16^{mm};$$

wie man sieht, wurde hier die Annahme gemacht, dass die beiden Schrauben durch die Kraft P auf Abscheerung beansprucht seien.

Man erhält nun zur Berechnung der abzuscheerenden Zahnfläche die Gleichung $f = abcd - \frac{(16)^2 \pi}{4} = abcd - 201 = \frac{P}{\mathfrak{S}} = \frac{2000}{5}$, oder $abcd = 201 + 400 = 601^{mm^2}$. Bevor wir die Zahnlänge ab, also Länge und Breite der Querschnittsfläche $abcd$ feststellen, müssen wir zunächst noch die Querschnittsdimensionen der Theile bestimmen, welche sich an die runden Gestänge-Enden unmittelbar anschliessen, d. i. die Dimensionen h und a (siehe Figur). Durch die Ueberplattung wird der Querschnitt an diesen Theilen mn und rs sehr geschwächt und es entsteht in Bezug auf die Querschnitte mn und rs ein excentrischer Zug, welcher diese Querschnitte bedeutend stärker beansprucht, als wenn die Kraft P in der Mitte dieser Querschnitte angreifen würde. In diesem letzteren Falle würde es genügen, wenn die Querschnittsfläche $\overline{mn} \cdot \overline{ac} = \frac{P}{\mathfrak{S}} = \frac{2000}{6}$, oder $\overline{mn} \cdot \overline{ac} = 334^{mm^2}$ wäre. Da aber der Zug excentrisch ist (siehe Lehre vom excentrischen Zug und Druck), so nehmen wir $\overline{mn} = 35^{mm}$, und $ac = 50^{mm}$, dies gibt die Fläche $\overline{mn} \cdot \overline{ac} = 35 \cdot 50 = 1750^{mm^2}$, also eine circa 5mal so grosse Querschnittsfläche, als dem centrischen Zuge entsprechen würde; die Zahnhöhe mr nehmen wir mit 15^{mm} an, so dass $h = 35 + 15 = 50^{mm} = a$ wird. Für die Querschnittsfläche des Zahnes ergab sich $abcd = 601^{mm^2}$ und da wir die eine Rechteckseite mit $a = 50^{mm}$ annahmen, so würde sich für das Abscheeren der Zahnspitze itu die Länge $iu = ab$ mit $ab = \frac{601}{50} = 10^{mm}$ ergeben; bei Ausführung dieser Verbindung wird man jedoch aus constructiven Rücksichten den Werth ab grösser, im vorliegenden Falle etwa 25 bis 30^{mm} nehmen und dadurch natürlich die Sicher-

heit der Verbindung erhöhen. Der Durchmesser d_1 der Zugstangen ergibt sich aus der Formel: $\frac{d_1^2 \pi}{4} = \frac{P}{\mathfrak{S}}$, woraus

$$d_1 = \sqrt{\frac{4P}{\pi \mathfrak{S}}} = \sqrt{\frac{4 . 2000}{3{,}14 . 6}} = \text{abgerundet } 21^{mm} \text{ folgt.}$$

43. Zwei stabförmige Körper von rechteckigem Querschnitte sind durch eine Ueberplattung mit Einlegescheibe und Schraube verbunden (siehe nebenstehende Figur); es sind die Festigkeitsdimensionen dieser Verbindung zu berechnen, wenn die verbundenen Theile durch eine in der Richtung ihrer Axe wirkende Kraft P auf Zug beansprucht werden.

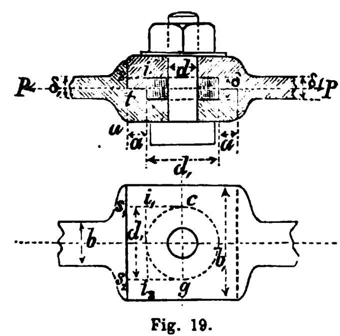


Fig. 19.

Auflösung. Damit die Schraube vom Durchmesser d nicht auf Abscheerung beansprucht werde, ist die Einlegescheibe vom Durchmesser d_1 angeordnet, welche den abscheerenden Zug aufnehmen soll, es ist dann die abzuscheerende Fläche

$$f = \frac{P}{\mathfrak{S}} = \frac{\pi}{4}(d_1^2 - d^2);$$

der Werth von d ist hier, da die Schraube durch die Kraft P nicht beansprucht werden soll und nur einer zufälligen, unbekannten, sie auf Zug beanspruchenden Kraft widerstehen soll, willkürlich zu nehmen; wir setzen $\frac{d^2 \pi}{4} = \frac{P}{\mathfrak{S}}$, woraus $d = \sqrt{\frac{4P}{\pi \mathfrak{S}}}$ ist.

Zur Berechnung der Dimensionen $tu = a_1$ und $si = a$ beachte man: In Bezug auf den Querschnitt tu wirkt die Kraft P excentrisch, wir machen daher den Querschnitt bei tu, $a_1 b_1$ wenigstens 4mal so gross als den Querschnitt $\delta_1 b_1$ der stabförmigen Körper, wenn b die Breite der letzteren im Allgemeinen und b_1 an der Verbindungsstelle ist; daher $\delta_1 b = \frac{a_1 b_1}{4}$. Wenn die Kraft P nicht ganz centrisch wirkt, so kann das Endstück si in den Flächen $\left(\overline{cs_1} \cdot \frac{\delta}{2}\right) + \left(\overline{gs_2} \cdot \frac{\delta}{2}\right) + \left(cs_1 s_2 g - \frac{\pi d_1^2}{8}\right)$ abgescheert werden; um jedoch sicherer zu gehen, rechnen wir die beanspruchten Flächen von der Geraden $i_1 i_2$ aus und erhalten

$$f = \overline{s_1 i_1} \cdot \frac{\delta}{2} + \overline{s_2 i_2} \cdot \frac{\delta}{2} + \overline{s_1 s_2} \cdot \overline{i_1 s_1} \text{ oder}$$

$$f = a \cdot \frac{\delta}{2} + a \cdot \frac{\delta}{2} + d_1 a = \frac{P}{\mathfrak{S}}, \text{ woraus } a = \frac{P}{\mathfrak{S}(\delta + d_1)}$$

folgt. Die Dicke δ der Einlegescheibe bestimmt sich aus dem Umstande, dass jener Theil der Mantelfläche des Schraubenbolzens, welcher von der Einlegescheibe umgeben ist und von letzterer bei der Wirkung der Kraft P gedrückt wird, gross genug sein muss, um die Kraft P zu übertragen; dieses wird dann der Fall sein, wenn das Product aus der Projection des Schraubenbolzen-Umfanges, d. i. also des Durchmessers d in die Höhe δ der gedrückten Seitenfläche des Bolzens, also $d\delta = \frac{P}{\mathfrak{S}}$ ist, woraus $\delta = \frac{P}{d\mathfrak{S}}$ folgt.

Es sei z. B. $P = 900^{Kg}$ und das Material Schmiedeisen, dann ist $d = \sqrt{\frac{4 \cdot 900}{\pi \cdot 5}} = 15^{mm}$. Die Ringfläche der Einlegescheibe ist

$$\frac{\pi}{4}(d_1^2 - d^2) = \frac{P}{\mathfrak{S}}, \text{ woraus sich}$$

$$d_1^2 = \frac{4P}{\mathfrak{S}\pi} + d^2 \text{ und } d_1 = \sqrt{\frac{4P}{\mathfrak{S}\pi} + d^2}, \text{ oder}$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot 900}{5 \cdot 3{,}14} + (15)^2} = \text{abgerundet } 22^{mm}$$

ergibt; wir nehmen für die Ausführung zur Erhaltung einer grösseren Auflagefläche, $d_1 = 30^{mm}$. Nehmen wir die Dicke δ_1 der zu verbindenden Körper $\delta_1 = 10^{mm}$, so wird die Breite derselben

$$b = \frac{P}{\mathfrak{S}\delta_1} = \frac{900}{6 \cdot 10} = 15^{mm};$$

nehmen wir die Breite b_1 mit $b_1 = 30^{mm}$, so wird

$$a_1 = \frac{4\delta_1 b}{b_1} = \frac{4 \cdot 10 \cdot 15}{30} = 20^{mm}.$$

Die Dimension a ergibt sich mit

$$a = \frac{P}{\mathfrak{S}(\delta + d_1)} = \frac{P}{\mathfrak{S}\left(\frac{P}{d\mathfrak{S}_1} + d_1\right)} = \frac{900}{5\left(\frac{900}{15 \cdot 6} + 30\right)} = 4\tfrac{1}{2}^{mm},$$

abgerundet $a = 5^{mm}$, und die Dicke δ der Einlegescheibe

$$\delta = \frac{P}{d\mathfrak{S}_1} = \frac{900}{15 \cdot 6} = 10^{mm}.$$

44. Es sind zwei schmiedeiserne Stangen von kreisförmigem Querschnitte durch zwei Laschen und zwei Schrauben mit Einlege-

scheiben mit einander zu verbinden (siehe nebenstehende Figur). Es sind die Festigkeitsdimensionen dieser Verbindung zu berechnen, wenn die beiden Stangen in der Richtung ihrer Axe durch die Kraft P auf Zug beansprucht werden.

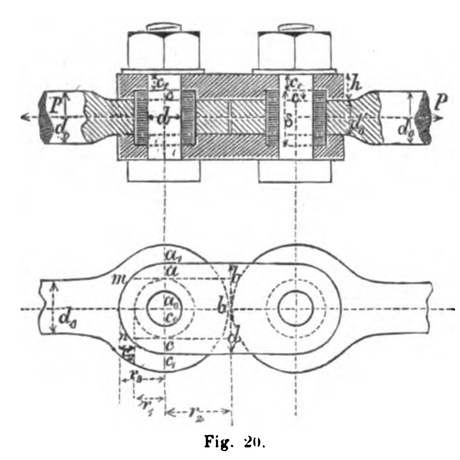


Fig. 20.

Auflösung. Damit die beiden Schrauben nicht auf Abscheerung beansprucht werden, sind die Einlegescheiben angeordnet, welche den ganzen Zug P aufnehmen sollen. Man hat daher für die Berechnung anzunehmen, als ob die Schrauben nicht vorhanden wären. Bei einer entsprechenden Vermehrung von P könnten entweder die Einlegeringe in der Fläche $2 \cdot \frac{\pi}{4}(d_1^2 - d^2)$ abgescheert, oder das Auge der Zugstange in den Flächen $\overline{ab} \cdot d_0' + \overline{cd} \cdot d_0'$, angenähert $= 2 r_3 d_0'$, ausgescheert, oder die beiden Laschen in den Flächen

$$2 \cdot \overline{am} \cdot c + 2 \cdot \overline{cn} \cdot c + 2\left(amnc - \frac{\pi d_1^2}{8}\right)$$

ausgescheert, oder endlich die Zugstange in der Querschnittsfläche $d_0^2 \frac{\pi}{4}$ zerrissen werden. Wir haben daher die vier Gleichungen:

$$(1) \quad f_1 = \frac{P}{\mathfrak{S}} = \frac{\pi}{2}(d_1^2 - d^2).$$

Im zweiten und dritten Fall wollen wir jedoch der Sicherheit wegen nicht vom Schraubenmittel aus, sondern vom Umfange des Einlegeringes aus die abzuscheerenden Flächen rechnen, also anstatt $2 r_3 d_0'$ nur $2(r_3 - r_1) d_0'$, und anstatt $2 \cdot \overline{am} \cdot c \cdot 2 + 2\left(amnc - \frac{\pi d_1^2}{8}\right)$ nur $4(r_3 - r_1) c + 2(r_3 - r_1) 2 r_1$ setzen; wir erhalten daher für den zweiten Fall:

$$(2) \quad f_2 = 2 d_0' (r_3 - r_1) = \frac{P}{\mathfrak{S}},$$

für den dritten Fall:

$$(3) \quad f_3 = 4(r_3 - r_1) c + 4 r_1 (r_3 - r_1) = \frac{P}{\mathfrak{S}},$$

und für den vierten Fall:

$$(4) \quad d_0^2 \frac{\pi}{4} = \frac{P}{\mathfrak{S}_1},$$

wobei $\mathfrak{S}$ die Scheerspannung und $\mathfrak{S}_1$ die zulässige Zugspannung bezeichnet. In Gleichung (1) erscheinen d und d_1 unbekannt; den Durchmesser d des Schraubenbolzens, der durch die Kraft P gar nicht beansprucht werden soll, und nur einer zufälligen Kraft, die in einer Richtung senkrecht zur Richtung der Kraft P wirkt, zu widerstehen hat, nehmen wir willkürlich nach der Formel, die sich aus:

$$2 \cdot \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{P}{\mathfrak{S}} \text{ mit } d = \sqrt{\frac{2P}{\pi \mathfrak{S}}}$$

ergibt, an, wobei jedoch noch zu berücksichtigen ist, dass die Fläche $d\delta$ gross genug sei, um den Zug P, der die rückwirkende Festigkeit (einfache Druckfestigkeit) der Schraube mit der gedrückten Fläche $d\delta$ beansprucht, zu übertragen; hierbei bedeutet d die Projection des gedrückten Schraubenbolzenumfanges und δ die Höhe dieser gedrückten Fläche, d. i. die Höhe des Einlegeringes.

Es sei z. B. $P = 3600^{Kg}$, dann ist

$$d = \sqrt{\frac{2P}{\pi \mathfrak{S}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3600}{3{,}14 \cdot 5}} = 21{,}42^{mm}.$$

Wir nehmen abgerundet $\underline{d = 20^{mm}}$; aus Gleichung (2) erhält man:

$$f_2 = \frac{P}{\mathfrak{S}} = \frac{\pi}{2}(d_1^2 - d^2) = \frac{3600}{5} = 720^{mm^2} \text{ oder}$$

$$\frac{720 \cdot 2}{\pi} + d^2 = d_1^2 \text{ und } d_1 = \sqrt{\frac{720 \cdot 2}{\pi} + d^2}, \text{ oder}$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{720 \cdot 2}{3{,}14} + (20)^2} = \sqrt{858{,}3} = 29{,}3 \text{ und}$$

abgerundet $\underline{d_1 = 30^{mm}}$.

Die Dicke d_0' der Augen der Zugstangen nehmen wir mit $d_0' = 20^{mm}$, hiermit hat man aus Gleichung (2)

$$f_2 = \frac{P}{\mathfrak{S}} = 2\, d_0' (r_2 - r_1) = \frac{3600}{5} = 720^{mm^2}, \text{ oder}$$

$$\frac{720}{2\, d_0'} + r_1 = r_2, \text{ oder } r_2 = \frac{720}{2 \cdot 20} + 15 = 33^{mm}.$$

Das Stück c, um welches der Ring in jede Lasche eingelassen wird, nehmen wir $c = 5^{mm}$, hiermit ergibt sich aus Gleichung (3):

$$f_3 = 4c(r_3 - r_1) + 4r_1(r_3 - r_1) = \frac{P}{\mathfrak{S}} = 720^{mm^2}, \text{ oder}$$

$$4(r_3 - r_1)(c + r_1) = 720, \text{ oder}$$

$$r_3 - r_1 = \frac{720}{4(c + r_1)} \text{ und } r_3 = r_1 + \frac{720}{4(c + r_1)},$$

$$r_3 = 15 + \frac{720}{4(5 + 15)} = 24^{mm}.$$

Aus Gleichung (4) ist

$$d_0 = \sqrt{\frac{4P}{\pi \mathfrak{S}_1}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 3600}{3{,}14 \cdot 6}}, \; d_0 = 0{,}46 \cdot \sqrt{3600} = 27{,}6 =$$

$$= \text{abgerundet } 28^{mm}.$$

Da die Dicke des Einlegeringes $\delta = d_0' + 2c = 20 + 10 = 30^{mm}$ ist, so hat man $d\delta = 20 \cdot 30 = 600^{mm^2} = \frac{P}{\mathfrak{S}} = \frac{3600}{6}$, also genügend gross für die Druckübertragung. Zur Bestimmung der Laschendicke $h = c + c_1$, haben wir zu bedenken, dass der tragende Querschnitt der beiden Laschenenden, in welche der Ring eingelegt ist, gleich sein muss $\frac{P}{\mathfrak{S}_1} = \frac{3600}{6}$; bei einer entsprechenden Vergrösserung von P können die Laschen in den Querschnitten $\overline{a_0 a_1}$ und $\overline{c_0 c_1}$ in den Augen zerrissen werden, die auf Zug beanspruchte Querschnittsfläche ist daher $f_4 = \frac{P}{\mathfrak{S}_1} = \frac{3600}{6}$ oder

$$600 = [(r_3 - r)c_1 + (r_3 - r_1)c]\,4, \text{ woraus}$$

$$\frac{\frac{600}{4} - c(r_3 - r_1)}{r_3 - r} = c_1 = \frac{150 - 5(24 - 15)}{24 - 10} = 7\tfrac{1}{2},$$

$$c_1 = 7\tfrac{1}{2}^{mm}$$

folgt, daher die Dicke der Lasche $h = c + c_1 = 5 + 7\tfrac{1}{2} = 12\tfrac{1}{2}$, abgerundet $h = 13^{mm}$; hiermit ergibt sich die Breite b der Lasche

$$b = \frac{P}{\mathfrak{S}_1 h} = \frac{3600}{6 \cdot 12\tfrac{1}{2}} = 48^{mm}.$$

45. Zwei schmiedeiserne Stangen von quadratischem Querschnitte mit der Seite b_1 sind an den Enden derart mit einander verbunden, dass in das gabelförmige Ende der einen Stange das Ende der anderen Stange durch einen Keil befestigt ist (siehe Fig. 21);

es sind die Festigkeitsdimensionen dieser Verbindung zu berechnen, wenn die zwei Stangen durch die in entgegengesetzter Richtung wirkenden Kräfte P, P auf Zug beansprucht werden.

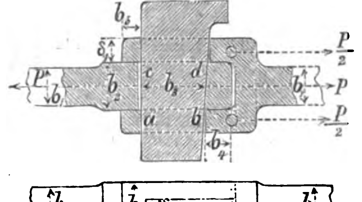


Fig. 21.

Auflösung. Die Kräfte P, P haben das Bestreben, 1. die mit einander zu verbindenden Stangen in der Querschnittsfläche b_1^2 zu zerreissen; 2. den Keil in den Flächen $\overline{ab}.\delta + \overline{cd}.\delta$ abzuscheeren; 3. das verdickte Ende der einen Stange an irgend einer Stelle des Keilloches in dem Querschnitte $b_2^2 - b_3\,\delta$ zu zerreissen; 4. die Gabelarme entweder an den Stellen, wo der Keil durchgeht, in den Querschnittsflächen $2\,(b_3\,\delta_1 - \delta\,\delta_1)$ zu zerreissen, oder an den Enden in den Flächen $4\,\delta_1\,b_5$ auszuscheeren; und endlich 5. die Stange mit dem verdickten Ende in den zwei Flächen $2\,b_4\,b_3$ auszuscheeren.

ad 1. Zur Berechnung der Quadratseite b_1 hat man $b_1^2 = \frac{P}{\mathfrak{S}}$, woraus $b_1 = \sqrt{\frac{P}{\mathfrak{S}}}$ ist; es ist z. B. $P = 5400^{Kg}$, dann wird

$$b_1 = \sqrt{\frac{5400}{6}} = 30^{mm}.$$

ad 2. Zur Berechnung des Keilquerschnittes setzen wir

$$\overline{cd} + \overline{ba} = 2\,b_3,$$

d. i. gleich der doppelten mittleren Keilbreite (in der Richtung der Axe der Stangen gemessen) und erhalten

$$2\,b_3\,\delta = \frac{P}{\mathfrak{S}} = \frac{5400}{5} = 1080^{mm^2}:$$

wir nehmen zwischen b_3 und δ ein Verhältniss an und setzen z. B. $\frac{b_3}{\delta} = 5$, wodurch $2\,\delta\,.\,5\,\delta = \frac{P}{\mathfrak{S}} = 10\,\delta^2$ und $\delta = \sqrt{\frac{P}{10\,\mathfrak{S}}} = \sqrt{\frac{5400}{10\,.\,5}}$, $\underline{\delta = 10{,}4^{mm}}$, ferner $\underline{b_3 = 5\,\delta = 5\,.\,10{,}4 = 52^{mm}}$ sich ergibt.

ad 3. Zur Berechnung der Quadratseite b_2 hat man: $b_2^2 - b_2\,\delta = \frac{P}{\mathfrak{S}}$, woraus, wenn diese quadratische Gleichung aufgelöst wird,

$$b_2 = \frac{\delta}{2} \pm \sqrt{\frac{\delta^2}{4} - \frac{P}{\mathfrak{S}_1}}$$

ist; hier kann man offenbar nur das positive Vorzeichen des Wurzelausdruckes gebrauchen, da b_3 grösser sein muss als $\frac{\delta}{2}$, daher

$$b_3 = \frac{10{,}4}{2} + \sqrt{\left(\frac{10{,}4}{2}\right)^2 + \frac{5400}{6}}, \text{ oder}$$

$$b_3 = 5{,}2 + \sqrt{27{,}04 + 900} = 5{,}2 + 30{,}4467$$

und abgerundet $\underline{b_3 = 36^{mm}}$.

ad 4. Zur Berechnung der Dicke δ_1 der Hebelarme hat man: $2\,(b_3\,\delta_1 - \delta\,\delta_1) = \frac{P}{\mathfrak{S}_1}$, hieraus ist:

$$2\,\delta_1\,(b_3 - \delta) = \frac{P}{\mathfrak{S}_1} \quad \text{und} \quad \delta_1 = \frac{P}{2\,\mathfrak{S}_1\,(b_3 - \delta)} = \frac{5400}{2\,.\,6\,.\,(36 - 10{,}4)},$$

oder $\delta_1 = 17{,}57$, abgerundet $\underline{\delta_1 = 18^{mm}}$; damit die Gabelenden nicht ausgescheert werden, hat man die Dimension b_5 aus der Gleichung: $4\,\delta_1\,b_5 = \frac{P}{\mathfrak{S}}$ mit $b_5 = \frac{P}{4\,\mathfrak{S}\,\delta_1} = \frac{5400}{4\,.\,5\,.\,18} = 15^{mm}$ zu nehmen.

ad 5. Damit die Stange mit dem verdickten Ende in den Flächen $2\,b_4\,b_3$ nicht ausgescheert werde, muss auch $2\,b_4\,b_3 = \frac{P}{\mathfrak{S}}$ gemacht werden. Aus dieser Gleichung folgt:

$$b_4 = \frac{P}{2\,.\,b_3\,\mathfrak{S}} = \frac{5400}{2\,.\,36\,.\,5} = 15^{mm}.$$

46. Es ist bei einer Ankerschraube (siehe beistehende Figur) der Durchmesser d des unteren Bolzentheiles, die Höhe h des Splintes, die Dicke b desselben und die Länge x des Bolzenstückes, welches vom Splintloch nach unten vorsteht, zu berechnen, wenn die Schraube durch die Kraft P auf Zug beansprucht wird.

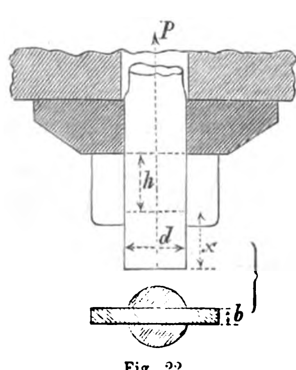


Fig. 22.

Auflösung. Die Kraft P hat das Bestreben, den Bolzen an seiner schwächsten Stelle, d. i. da, wo der Splint durchgeht, in der Fläche $f_1 = \frac{\pi d^2}{4} - b\,d$ abzureissen (wenn wir das Splintloch im Bolzen als ein Rechteck von den Seiten b und d ansehen), ferner den Bolzen unter dem Splint nach der Fläche $f_2 = 2\,x\,d$ auszuscheeren und endlich den Splint nach der Fläche $f_3 = 2\,b\,h$ abzuscheeren.

Soll die Anker-(Fundament-)Schraube in diesen drei durch die Kraft P beanspruchten Flächen f_1, f_2, f_3 gleiche Sicherheit gegen Abreissen, wie gegen Ausscheeren besitzen, so muss offenbar die Gleichung statthaben: $P = f_1 \mathfrak{S} = f_2 \mathfrak{S}_1 = f_3 \mathfrak{S}_1$, worin $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$ die eintretenden, zulässigen Spannungen, bezogen auf absolute und Scheerfestigkeit, bedeuten. In dieser Gleichung die obigen Werthe für f_1, f_2, f_3 eingesetzt, gibt: $P = \left(\frac{\pi d^2}{4} = b d\right) \mathfrak{S} = 2 x d \mathfrak{S}_1 = 2 b h \mathfrak{S}_1$.

Betrachten wir von dieser viertheiligen Gleichung die ersten zwei Theile und setzen darin für b den beliebig, jedoch passend angenommenen Werth $\frac{d}{4}$, so ist:

$$P = \left(\frac{\pi d^2}{4} - \frac{d^2}{4}\right) \mathfrak{S} = \frac{d^2}{4} (\pi - 1) \mathfrak{S}, \text{ woraus } d = \sqrt{\frac{4 P}{(\pi - 1) \mathfrak{S}}}$$

folgt; setzt man hier, wie früher bei der Berechnung der Befestigungsschraube, $\mathfrak{S} = 2{,}6$ ein, so ist:

$$d = \sqrt{\frac{4 P}{(3{,}14 - 1)\, 2{,}6}} = 0{,}85 \sqrt{P};$$

es ist z. B. $P = 2500^{Kg}$, so wird

$$d = 0{,}85 \sqrt{2500} = 0{,}85 \,.\, 50 = 42{,}5^{mm}.$$

Den zweiten und dritten Theil obiger viertheiliger Gleichung betrachtet und darin das Verhältniss der Scheerfestigkeit des Schmiedeisens zur absoluten Festigkeit wie 7 zu 8 eingeführt, gibt:

$$\frac{\pi d^2}{4} - b d = 2 x d \frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}} = \frac{2 x d \,.\, 7}{8} = \frac{7}{4} x d,$$

$b = \frac{d}{4}$ eingesetzt und x bestimmt:

$$\frac{\pi d^2}{4} - \frac{d^2}{4} = \frac{7 x d}{4}, \text{ oder } \frac{d^2}{4} (\pi - 1) = \frac{7 x d}{4},$$

hieraus ist: $x = \frac{d (\pi - 1)}{7} = 0{,}3 d$, oder für d obigen Werth gesetzt, gibt

$$x = 0{,}3 \,.\, 0{,}85 \sqrt{P} = 0{,}255 \sqrt{P} = 0{,}255 \sqrt{2500} = 12{,}75^{mm};$$

bei der Ausführung überschreitet man jedoch diesen Werth und nimmt gewöhnlich $x = 0{,}9 d$. Bestimmt man endlich aus dem dritten und vierten Theil obiger viertheiliger Gleichung den Werth von h, so ist aus:

$$2 x d \mathfrak{S}_1 = 2 b h \mathfrak{S}_1, \; h = \frac{x d}{b} = \frac{4 x d}{d} = 4 x$$

und für x den gefundenen Werth gesetzt, gibt

$$h = 4 . 0{,}255 \sqrt{P} = 1{,}02 \sqrt{P} = 1{,}02 \sqrt{2500} = 51^{mm}.$$

Anmerkung. Die, eine Fundamentschraube auf Zug beanspruchende Kraft P ist dieselbe, nach der die Grösse des Gewichtsfundaments der durch Schrauben auf einem Fundament zu befestigenden Maschine zu berechnen ist. Unter Gewichtsfundament versteht man im Maschinenbau dasjenige an eine Maschine oder einen Theil derselben durch Fundamentschrauben anzuhängende, resp. zu befestigende Steingewicht, welches den grössten in der Maschine auftretenden Kräften das Gleichgewicht zu halten bestimmt ist. Vorausgesetzt, dass das Gewichtsfundament rationell angeordnet und solid ausgeführt wird, so, dass man dasselbe als eine einzige Masse betrachten darf, genügt es, wenn man es so gross macht, dass sein Gewicht das doppelte der grösstmöglichsten zu befürchtenden Kraft beträgt, welche unter den allerungünstigsten Verhältnissen von der Maschine während ihres Betriebes auf das Fundament übertragen werden kann.

47. Welche Kraft muss angewendet werden, zum Durchstossen eines Schmiedeisenbleches von der Stärke $\delta = 10^{mm}$, wenn der Durchmesser d des Loches 20^{mm} betragen soll?

Auflösung. Die durchzustossende oder auszuscheerende Fläche ist $f = \pi d \delta$, daher hat man nach der Formel $P = f \mathfrak{S}$, wenn man darin für f den Werth und $\mathfrak{S} = K_1 = 35 =$ dem Bruchmodul für Abscheeren setzt: $P = \pi d \delta K_1 = 3{,}14 . 20 . 10 . 35 = 21980^{Kg}$, die Grösse der zum Durchstossen aufzuwendenden Kraft.

48. Das Schwungrad einer Dampfmaschine bestehe aus sechs gleichen Theilen, von denen jeder mit einem Arme und dem zugehörigen sechsten Theile der Nabe in einem Stück gegossen ist und am Kranze mit dem nächstfolgenden Theile durch eine eingelegte schmiedeiserne Platte und zwei Querkeile verbunden ist (siehe Fig. 23).

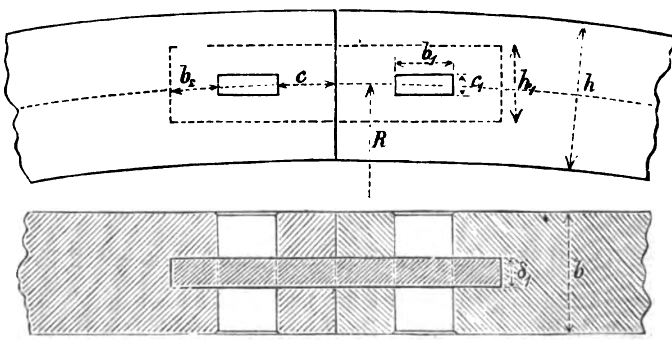


Fig. 23.

Es sind die Querschnittsdimensionen des Schwungringes (Kranzes), die der eingelegten Platte und der Querkeile zu berechnen, wenn die Dampfmaschine N Pferdekräfte hat, u Umdrehungen pro

Minute macht und der mittlere Halbmesser des Schwungringes $R = 3^m$ beträgt.

Auflösung. Die bei der Rotation des Schwungrades entstehende Centrifugalkraft (Fliehkraft) hat das Bestreben, ein Stück des Kranzes in zwei Querschnitten desselben herauszureissen und wird daher durch diese Kraft die absolute Festigkeit des Schwungringes beansprucht, weshalb dieser letztere einen genügend grossen Querschnitt haben muss, um der Fliehkraft zu widerstehen; allein bei Bestimmung des Kranzquerschnittes ist die Rücksicht auf die Festigkeit desselben allein nicht massgebend, sondern der Querschnitt muss auch eine solche Grösse haben, dass das Gewicht des Schwungringes so gross sei, als für den Zweck des Schwungrades, das ist für die Regulirung des Ganges der Maschine, nöthig ist. Wir berechnen daher den Querschnitt des Ringes aus dem Gewichte desselben und controliren dann, ob er auch der Festigkeit wegen die nothwendige Grösse habe. Das Gewicht G des Schwungringes bestimmt sich nach der in den Lehrbüchern der Mechanik abgeleiteten Formel $G = \frac{\psi \, . \, 91\, N}{\delta\, n^3 R^2}$, in welcher Formel ψ und δ zwei von der Construction der Maschine abhängige Grössen sind und worüber hier nicht näher eingegangen werden kann. Angenommen, wir haben das Gewicht des Schwungrades mit $G = 6000^{Kg}$ berechnet, dann ist sein Querschnitt $f = \frac{G}{2 \pi R \gamma}$, wenn γ das Gewicht von 1^{m^3} Gusseisen und R den mittleren Schwungringhalbmesser bedeuten. Setzen wir die Zahlenwerthe ein, so ist:

$$f = \frac{6000}{2 \, . \, 3{,}14 \, . \, 3 \, . \, 7300} = 0{,}043626^{m^2} \text{ oder } f = 43626^{mm^2}.$$

Die Fliehkraft F berechnet sich nach der bekannten Formel: $F = \omega^2 M r$; hierin bedeuten: ω die Winkelgeschwindigkeit des Rades, M die Masse desjenigen Kranzstückes, welches bei einer etwaigen Zerstörung des Rades durch die Fliehkraft herausgerissen würde und r die Entfernung des Schwerpunktes dieses Stückes von der Drehaxe.

Es werde z. B. das Ringstück ACB (siehe nebenstehende Figur) mit dem Centriwinkel 2α in den zwei Querschnitten AA' und BB' herausgerissen durch die Fliehkraft F, welche also die absolute Festigkeit des Materials in diesen beiden Querschnitten AA' und BB' überwinden muss; diese Festigkeit kann aber durch die zwei gleich grossen Kräfte p und q, deren Richtungen senkrecht zu den

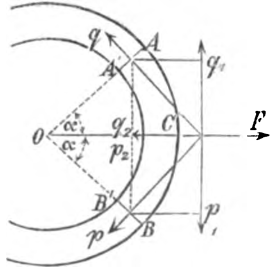


Fig. 24.

Querschnittsebenen AA' und BB' sind, dargestellt werden, und deren Resultirende gleich und entgegengesetzt der Fliehkraft ist. Zerlegt man die Kräfte p und q in je zwei auf einander rechtwinkelige Componenten p_1 und p_2, q_1 und q_2, so hat man, da sich p_1 und q_1 als einander gleich und entgegengesetzt aufheben, $p_2 + q_2 = F$, ferner $p_2 = q_2 = p \sin \alpha$, daher $F = 2p \sin \alpha$, und da $p = 2f\mathfrak{S}$ (wobei f den Querschnitt in AA' oder BB' bedeutet), so ist $F = 2f\mathfrak{S} \sin \alpha$; den grössten Werth, den der Winkel α annehmen kann, ist $\alpha = 90^\circ$, d. h. der halbe Schwungring wird herausgerissen, dann ist $\sin \alpha = \sin 90^\circ = 1$ und $F = 2f\mathfrak{S}$. Die Masse M bestimmt sich aus der Gleichung $M = \frac{G_1}{g}$, wobei G_1 das Gewicht des abzureissenden Ringstückes vom Centriwinkel 2α und $g = 9{,}81^m$ die Fallbeschleunigung der Schwere bedeuten. Da nun der Schwungring aus sechs mit einander verbundenen Theilen besteht, so ist anzunehmen, dass bei einer etwaigen Zerstörung des Ringes durch die Fliehkraft das Abreissen eines Ringstückes an zwei Verbindungsstellen erfolgen werde, da die Festigkeit dieser letzteren nur der Fliehkraft zu widerstehen braucht, der volle Ringquerschnitt hingegen eine viel grössere Festigkeit als eine Verbindungsstelle besitzt (wie weiter unten zu ersehen ist); der Winkel α ergibt sich daher mit $\alpha = 30^\circ$, der grösseren Sicherheit wegen nehmen wir jedoch den Maximalwerth von α und erhalten dadurch das Maximum der Fliehkraft, aus welcher die Querschnittsdimensionen der Verbindungstheile zu berechnen sind. Man hat somit

$$M = \frac{\frac{6000}{2}}{9{,}81} = \frac{3000}{9{,}81} = 306;$$

nehmen wir die minutliche Tourenzahl mit $n = 60$ an, so ist die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3{,}14 \,.\, 60}{30} \text{ und } \omega^2 = \left(\frac{3{,}14 \,.\, 60}{30}\right)^2 = 40.$$

Nach der Lehre vom Schwerpunkte ist

$$r = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \left(\frac{R_1^3 - R_2^3}{R_1^2 - R_2^2}\right),$$

hierin bezeichnen R_1 und R_2 den äusseren und inneren Schwungringhalbmesser. Es ist $R_1 = R + \frac{h}{2}$ und $R_2 = R - \frac{h}{2}$, wenn h die Höhe des Kranzes (in radialer Richtung gemessen) bedeutet. Zerlegen wir den gefundenen Querschnitt $f = 43626$ in die zwei Factoren $h \,.\, b = 250 \,.\, 174{,}504$ oder abgerundet die Kranzbreite

$b = 175^{mm}$ (rechteckigen Querschnitt des Kranzes vorausgesetzt), so ist $R_1 = 3000 + \frac{250}{2}$, $R_1 = 3125$ und $R_2 = 3000 - \frac{250}{2} = 2875$; es ist $\sin\alpha = \sin 30^0 = 0{,}5$, Winkel α im Bogenmass ausgedrückt, ist $\widehat{\alpha} = 2\pi \cdot \frac{30}{360} = \frac{6{,}28}{12} = 0\,523$, daher:

$$r^m = \frac{2}{3} \cdot \frac{0{,}5}{0{,}523} \left[\frac{(3{,}125)^3 - (2{,}875)^3}{(3{,}125)^2 - (2{,}875)^2}\right] = \frac{2}{3} \cdot \frac{0{,}5}{0{,}523} \cdot 4{,}3,$$

oder $r = 2{,}74^m$; hiermit erhält man

$$F = \omega^2 M r = 40 \cdot 306 \cdot 2{,}74 = 11179{,}2^{Kg}.$$

In der Gleichung $F = 2f\mathfrak{S}\sin\alpha$, oder $11179{,}2 = 2f\mathfrak{S} \cdot 0{,}5 = f\mathfrak{S}$ bedeutet f nicht mehr den wirklichen Querschnitt des Kranzes, denn dieser ist ja bereits aus dem Gewichte des Ringes mit $f = 43626^{mm^2}$ bestimmt worden, sondern f bedeutet hier den Querschnitt, welchen der Ring blos zu haben brauchte, wenn nur die Rücksicht auf Festigkeit allein massgebend wäre und der Werth der Fliehkraft sich aus den drei Factoren ω^2, M und r derart zusammensetzen würde, dass das mit diesem Querschnitte f bestimmte Gewicht des Schwungringes hinreichend wäre für den Zweck der Regulirung des Ganges der Maschine; dieser letztere Umstand, dass der Ring nur einen solchen Querschnitt zu haben brauchte, um nur der Festigkeit allein zu genügen, wird nur in sehr seltenen Fällen eintreten, weil dann die Tourenzahl u und der Halbmesser R verhältnissmässig sehr gross ausfallen würden und praktischer oder constructiver Rücksichten wegen das Rad nicht wohl ausführbar wäre; andererseits stellt dann aber auch der Querschnitt f den Querschnitt derjenigen Theile vor, welche zur Verbindung zweier Ringtheile dienen, wie z. B. hier den Querschnitt der eingelegten, schmiedeisernen Platte. Man erhält $f = \frac{F}{2\mathfrak{S}\sin\alpha} = \frac{11179{,}2}{2 \cdot 3 \cdot 0{,}5} = 3727^{mm^2}$; würden wir z. B. annehmen, wir setzen das ganze Rad aus zwei Theilen zusammen, so hätte man wegen $\alpha = 90^0$ und $\sin\alpha = 1$

$$r = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2\pi \cdot \frac{90}{360}} \left[\frac{(3{,}125)^3 - (2{,}875)^3}{(3{,}125)^2 - (2{,}875)^2}\right] = 4{,}3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1{,}57},$$

$$r = 1{,}826^m, \quad F = 40 \cdot 306 \cdot 1{,}826 = 22350{,}24^{Kg} \text{ und}$$

$$f = \frac{F}{2\mathfrak{S} \cdot \sin\alpha} = \frac{22350{,}24}{2 \cdot 3 \cdot 1} = 3725^{mm^2};$$

wie man sieht, kommt in beiden Fällen nahezu derselbe Werth von f heraus, eigentlich müsste in beiden Fällen genau derselbe

Werth von f herauskommen; diese Differenz von 2^{mm^2} rührt blos von den bei der Berechnung uns erlaubten Vernachlässigungen, resp. Abrundungen in den Decimalstellen her. Denn, wenn man in der Gleichung $f = \frac{F}{2 \mathfrak{S} \sin \alpha}$ für F den Werth $F = \omega^2 M r$ einsetzt, so verschwinden die Grössen, die den Winkel α enthalten, wie man in Folgendem ersehen kann: Bezeichnet G das Gewicht des ganzen Schwungringes, so wiegt ein Stück desselben vom Centriwinkel 2α offenbar

$$\frac{G}{\frac{360}{2\alpha^0}} = \frac{G}{\frac{180}{\alpha^0}} \text{ oder } \frac{G}{\frac{\pi}{\widehat{\alpha}}} = \frac{\widehat{\alpha}\, G}{\pi}, \text{ daher } M = \frac{\widehat{\alpha}\, G}{\pi g} \text{ und}$$

$$F = \omega^2 \cdot \frac{\widehat{\alpha}\, G}{\pi g} \cdot r = \omega^2 \cdot \frac{\widehat{\alpha}\, G}{\pi g} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin \alpha}{\widehat{\alpha}} \left(\frac{R_1^3 - R_2^3}{R_1^2 - R_2^2}\right), \text{ oder}$$

$$F = \omega^2 \cdot \frac{G}{\pi g} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sin \alpha \left(\frac{R_1^3 - R_2^3}{R_1^2 - R_2^2}\right), \text{ hiermit wird}$$

$$f = \frac{\omega^2 \cdot G \cdot 2 \cdot \sin \alpha}{\pi g \cdot 3 \cdot 2 \mathfrak{S} \sin \alpha} \cdot \left(\frac{R_1^3 - R_2^3}{R_1^2 - R_2^2}\right) = \frac{\omega^2 G}{3 \pi g \mathfrak{S}} \cdot \left(\frac{R_1^3 - R_2^3}{R_1^2 - R_2^2}\right),$$

$$f = \frac{40 \cdot 6000}{3 \cdot 3{,}14 \cdot 9{,}81 \cdot 3} \cdot \left[\frac{(3{,}125)^3 - (2{,}875)^3}{(3{,}125)^2 - (2{,}875)^2}\right] = \text{abgerundet } 3727^{mm^2}.$$

Man sieht also, dass es für den Querschnitt f der Verbindungstheile zwischen zwei Kranzstücken gleichgiltig ist, aus wie viel Theilen der Schwungring zusammengesetzt wird; nur die Fliehkraft F ändert sich mit dem Winkel α. Wir haben hier die zulässige Spannung $\mathfrak{S} = 3^{Kg}$ gesetzt, also einen ungewöhnlich hohen Sicherheitsgrad angenommen, weil man im Allgemeinen nicht voraussetzen darf, dass die Arbeit an den Verbindungsstellen der Kranztheile so exact ausgeführt wird, dass bei der Rotation des Rades nicht Stösse zwischen den Verbindungstheilen eintreten könnten, wodurch die Festigkeit der Theile bekanntlich bedeutend mehr beansprucht wird, als bei ruhiger Belastung.

Der Querschnitt f_1 der schmiedeisernen Verbindungsplatte wird durch das Loch für den Querkeil um die Fläche $c_1\, \delta_1$ (siehe Figur) geschwächt, daher $f_1 = 3727 + c_1\, \delta_1$; wir machen die Annahmen, $c_1 = 30^{mm}$ und $\delta_1 = 40^{mm}$, somit $f_1 = h_1\, \delta_1 = 3727 + 30 \cdot 40 = = 4927^{mm^2}$, hiermit ergibt sich die Höhe h_1 der Platte:

$$h_1 = \frac{4927}{40} = 123{,}175,$$

abgerundet $h_1 = 124^{mm}$.

Der Keil wird in den zwei Querschnittsflächen $2\, b_1\, c_1$ auf Abscheerung beansprucht, wobei b_1 die Breite des Keiles bedeutet.

Man hat nun: $2 b_1 c_1 \mathfrak{S}_1 = h_1 \delta_1 \mathfrak{S}$, woraus $b_1 = \frac{h_1 \delta_1}{2 c_1} \cdot \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_1}$ ist; das Verhältniss $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_1}$ der Zugspannung zur Scheerspannung bestimmt sich aus dem Verhältniss zwischen Zug- und Scheerfestigkeit des Schmiedeisens, das ist $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_1} = \frac{40}{35} = \frac{8}{7}$, man erhält somit:

$$b_1 = \frac{h_1 \delta_1}{2 c_1} \cdot \frac{8}{7} = \frac{4927}{2 \,.\, 30} \cdot \frac{8}{7} = 94^{mm}.$$

Die Platte vom Querschnitte $h_1 \delta_1$ wird ferner in den zwei Flächen $2 b_2 \delta_1$ auf Ausscheeren der Endstücke beansprucht, weshalb

$$2 b_2 \delta_1 \mathfrak{S}_1 = 2 b_1 c_1 \mathfrak{S}_1 \text{ und } b_2 = \frac{b_1 c_1}{\delta_1} = \frac{94 \,.\, 30}{40} = 70{,}5,$$

abgerundet $b_2 = 71^{mm}$ ist.

Zur Bestimmung der Entfernung c des Keilloches von dem Ende des Ringstückes hat man nur zu bedenken, dass dieses Stück des Kranzes in den zwei Querschnittsflächen $2 c (b - \delta_1) = f = \frac{F}{2 \mathfrak{S}_1 \sin \alpha}$ auf Abscheerung beansprucht wird; wir fanden oben

$$f = \frac{\omega^2 G}{3 \pi g \mathfrak{S}_1} \left(\frac{R_1^3 - R_2^3}{R_1^2 - R_2^2} \right);$$

die Zahlenwerthe, sowie $\mathfrak{S}_1 = \frac{1}{2}$ eingesetzt, gibt:

$$f = \frac{40 \,.\, 6000}{3 \,.\, 3{,}14 \,.\, 9{,}81 \,.\, 0{,}5} \left[\frac{(3{,}125)^3 - (2{,}875)^3}{(3{,}125)^2 - (2{,}875)^2} \right] = 22362^{mm^2};$$

wir nehmen auch hier die Scheerspannung $\mathfrak{S}_1$ für Gusseisen aus demselben Grunde so gering, wie oben die Zugspannung bei der schmiedeisernen Verbindungsplatte.

Man erhält aus der Gleichung $2 c (b - \delta_1) = 22362$

$$c = \frac{22362}{2 (b - \delta_1)} = \frac{22362}{2 (175 - 40)} = 82{,}8,$$

abgerundet $c = 83^{mm}$.

Nun haben wir noch zu untersuchen, ob der Querschnitt des Schwungringes gross genug sei, um der Fliehkraft mit der genügenden Sicherheit zu widerstehen. Der schwächste Querschnitt des Ringes ist da, wo an der Verbindungsstelle zweier Theile die Schmiedeisenplatte eingelegt und der Querkeil hindurchgeht; hier ist der Querschnitt $f = h b - [h_1 \delta_1 + (b - \delta_1) c_1]$, oder da $h b = 43626$ ist, so hat man, wenn die Zahlenwerthe eingesetzt werden:

$$f = 43626 - [124 \,.\, 40 + (175 - 40) 30] = 43626 - 9010,$$

$f = 34616^{mm^2}$; wir fanden oben:

$$f = \frac{\omega^2 G}{3\pi g \mathfrak{S}} \left(\frac{R_1^3 - R_2^3}{R_1^2 - R_2^2} \right),$$

daher hat man:

$$\mathfrak{S} = \frac{\omega^2 \cdot \frac{G}{3\pi g} \left(\frac{R_1^3 - R_2^3}{R_1^2 - R_2^2} \right)}{f},$$

oder die Zahlenwerthe eingesetzt:

$$\mathfrak{S} = \frac{40 \cdot \frac{6000}{3 \cdot 3{,}14 \cdot 9{,}81} \left[\frac{(3{,}125)^3 - (2{,}875)^3}{(3{,}125)^2 - (2{,}875)^2} \right]}{34616} =$$

$$= \frac{40 \cdot 6000 \cdot 4{,}3}{3 \cdot 3{,}14 \cdot 9{,}81 \cdot 34616},$$

oder $\mathfrak{S} = 0{,}48^{Kg}$; wie man sieht, ist die Festigkeit des Schwungringes gross genug, da die eintretende Spannung nur den geringen Werth von $0{,}48^{Kg}$ hat.

49. Zwei Theile eines Schwungrades sind durch zwei an den Seiten des Kranzes eingelegte, schwalbenschweifförmig geformte, schmiedeiserne Platten und durch sechs Schrauben miteinander verbunden (siehe nebenstehende Figur). Es ist der Durchmesser d einer Schraube und die Dimensionen einer der beiden schmiedeisernen Platten zu berechnen, wenn die in Folge der Fliehkraft entstehende, den Kranz auf Abreissen beanspruchende Kraft $P = 10000^{Kg}$ ist und deren Richtung senkrecht zur Trennungsfläche beider Kranztheile steht.

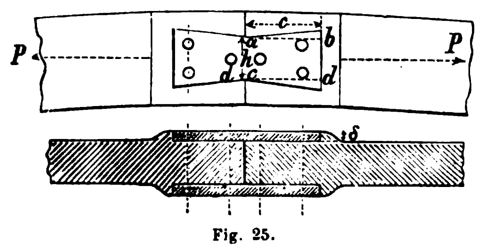


Fig. 25.

Auflösung. Zur Berechnung des Schraubenbolzendurchmessers d hat man die Gleichung: $6 \cdot \frac{d^2\pi}{4} = \frac{P}{\mathfrak{S}}$, woraus

$$d = \sqrt{\frac{2P}{3\pi\mathfrak{S}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10000}{3 \cdot 3{,}14 \cdot 5}} = 20{,}6$$

und abgerundet $d = 21^{mm}$ folgt; man kann jedoch diesen Durchmesser auch kleiner nehmen, da die Schrauben wegen der schwalbenschweifförmigen Einpassung der Platten nicht auf Abscheerung beansprucht werden. Eine jede der beiden Platten wird in der Querschnittsfläche $h\,\delta$ auf Zug beansprucht; in geringer Entfernung

von der Trennungsfuge wird dieser Querschnitt zwar wieder etwas vergrössert, aber auch durch das Schraubenloch geschwächt; der Sicherheit wegen setzen wir daher $2(h\delta - d\delta) = \frac{P}{\mathfrak{S}}$, woraus, wenn man zwischen δ und h das Verhältniss $\frac{h}{\delta} = 3$ annimmt, folgt:

$6\delta^2 - 2d\delta = \frac{P}{\mathfrak{S}}$ oder

$$d^2 - \frac{d\delta}{3} = \frac{P}{6\mathfrak{S}} \text{ und } \delta = \frac{d}{6} \pm \sqrt{\frac{d^2}{36} + \frac{P}{6\mathfrak{S}}}, \text{ oder}$$

$$\delta = \frac{d}{6} \pm \sqrt{\frac{(21)^2 + 6 \cdot \frac{10000}{5}}{36}} = \frac{d \pm \sqrt{12441}}{6};$$

da hier offenbar nur das positive Vorzeichen der Wurzel brauchbar ist, so hat man: $\delta = \frac{21 + 111}{6} = 22^{mm}$, hiermit wird $h = 3\delta = 66^{mm}$.

Eine jede der beiden Platten wird ferner in den zwei Flächen $\overline{ab} \cdot \delta + \overline{cd} \cdot \delta = 2c\delta$ auf Abscheerung durch die Kräfte P beansprucht, daher

$$4c\delta = \frac{P}{\mathfrak{S}_1} \text{ und } c = \frac{P}{4\delta\mathfrak{S}_1}, \text{ oder } c = \frac{10000}{4 \cdot 22 \cdot 3} = 37{,}9^{mm};$$

constructiver Rücksichten wegen wird man aber diese Dimension c grösser, hier etwa zweckmässig 85^{mm} nehmen, um für die Schraubenmuttern den nöthigen Platz zu schaffen.

Dem Fleisse des Lesers bleibt es überlassen, die Festigkeitsdimensionen der in den beiden folgenden Figuren dargestellten Verbindungen (Figur 26 Verbindung zweier Schwungradkranztheile, Fig. 27 Verbindung eines Radkranzes mit einem Arme) zu berechnen.



Fig. 26.

50. Es ist die Wandstärke x einer gusseisernen, hohlen Trommel zu berechnen, die den Haupttheil einer Centrifugaltrockenmaschine bildet, 800 Umdrehungen pro Minute macht und einen inneren Halbmesser von $R = 0{,}5^m$ und eine Höhe von $h = 1{,}5^m$ hat. Die Substanz, die sich in der Trommel befindet und vermöge der Flieh-

kraft gegen die innere Trommelwand gedrückt wird, bildet eine cylindrische Schichte von der in radialer Richtung gemessenen Dicke $d = 100^{mm}$ und hat pro Kubikmeter ein Gewicht von $q_2 = 150^{Kg}$.

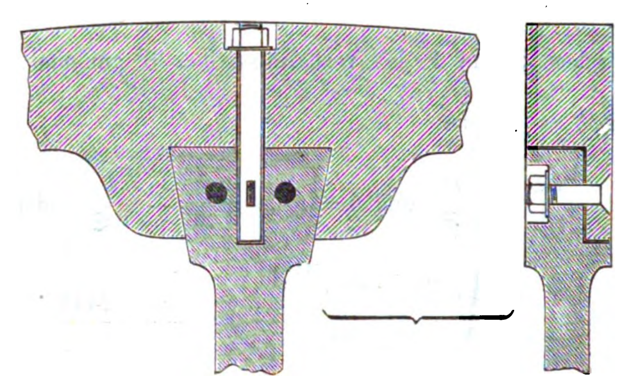


Fig. 27.

Auflösung. Die Substanz wird sich auf der inneren Trommelwand gleichförmig vertheilen und einen hohlen Cylinder bilden von der Höhe h und den Halbmesser R und $R - d$. Wir nehmen auch hier, wie beim Schwungrade an, dass durch die Fliehkraft ein Cylinder, dessen Basis ein ringförmiges Stück vom Centriwinkel 2α und den Halbmessern R und $R + x$ ist, herausgerissen würde. Die Fliehkraft ist hier gleich der Summe der beiden Fliehkräfte $P_1 + P_2$, wovon P_1 durch das Trommelstück mit dem Centriwinkel 2α und P_2 von dem auf diesem wirkenden ringförmigen Substanzstück vom Centriwinkel 2α hervorgerufen wird, daher die Fliehkraft $F = P_1 + P_2$. Nach Früherem ist: $P_1 = \omega^2 M_1 r_1 = \frac{\omega^2 G_1 r_1}{g}$, wobei G_1 das Gewicht des abzureissenden Trommelstückes vom Centriwinkel 2α und den Halbmessern R und $R + x$, ferner g die Fallbeschleunigung $g = 9{,}81^m$ bedeuten. Multiplicirt man das Volumen dieses Ringstückes, d. i.

$\pi[(R + x)^2 - R^2]\, h \cdot \frac{2\alpha}{2\pi} = [(R + x)^2 - R^2]\, h\alpha$ mit dem Gewichte g_1 einer Volumeinheit Gusseisen, und dividirt dieses Product durch g, so erhält man $M_1 = \frac{h\alpha q_1\,[(R + x)^2 - R^2]}{g}$; die Entfernung r_1 des Schwerpunktes dieser Masse M_1 vom Drehpunkt ist nach der Schwerpunktslehre $r_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot \frac{(R + x)^3 - R^3}{(R + x)^2 - R^2}$, somit

$$P_1 = \frac{\omega^2 h\alpha q_1}{g} \cdot \frac{(R + x)^3 - R^3}{(R + x)^2 - R^2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha}\,[(R + x)^2 - R^2], \text{ oder}$$

$P_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \omega^2 h q_1}{g} [(R+x)^3 - R^3]$; in gleicher Weise findet man

$P_2 = \omega^2 M_2 r_2 = \frac{\omega^2 G_2 r_2}{g}$, hier ist $G_2 = \pi [R^2 - (R-d)^2] h q_2 \cdot \frac{2\alpha}{2\pi}$, ferner

$$r_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot \frac{R^3 - (R-d)^3}{R^2 - (R-d)^2}, \text{ daher ist}$$

$$P_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha} \left[\frac{R^3 - (R-d)^3}{R^2 - (R-d)^2}\right] [R^2 - (R-d)^2] \frac{\omega^2 \alpha h q_2}{g}, \text{ oder}$$

$$P_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \omega^2 h q_2}{g} [R^3 - (R-d)^3];$$

man erhält nun durch Addition von P_1 und P_2:

$$F = \frac{\omega^2 \cdot h \frac{2}{3} \sin\alpha}{g} \cdot \left\{[(R+x)^3 - R^3] q_1 + [R^3 - (R-d)^3] q_2\right\}, \text{ oder}$$

$$F = \frac{2\omega^2 h \sin\alpha}{3g} \left[q_1 (R+x)^3 + R^3 (q_2 - q_1) - q_2 (R-d)^3\right];$$

diese Fliehkraft F hat das Bestreben, das Guss-Ringstück vom Centriwinkel 2α in den zwei Querschnitten $2xh$ auszureissen; daher setzen wir auch hier in gleicher Weise, wie bei Berechnung des Schwungrades (siehe dort) die die Festigkeit e i n e s Querschnittes xh ersetzende Kraft $= p$ resp. $= q$, zerlegen diese Kräfte genau wie dort in die Componenten p_1 und q_1 resp. p_2 und q_2 und haben $p_2 = q_2 = p \sin\alpha$; weil ferner $p_2 + q_2 = F$ ist, so hat man auch hier: $F = 2p \sin\alpha$ und da $2p = 2f\mathfrak{S}$, oder $2p = 2xh\mathfrak{S}$ ist, so folgt $F = 2xh\mathfrak{S}\sin\alpha$; man erhält somit, wenn man diesen Werth von F in die Rechnung einführt:

$$2xh\mathfrak{S}\sin\alpha = \frac{2\omega^2 h \sin\alpha}{3g} \left[q_1 (R+x)^3 + R^3 (q_2 - q_1) - q_2 (R-d)^3\right],$$

oder

$$x\mathfrak{S} = \frac{\omega^2}{3g} \left[q_1 (R+x)^3 + R^3 (q_2 - q_1) - q_2 (R-d)^3\right], \text{ oder}$$

$$\frac{3gx\mathfrak{S}}{\omega^2} = q_1 (R+x)^3 + R^3 (q_2 - q_1) - q_2 (R-d)^3, \text{ oder}$$

$$(R+x)^3 - \frac{3gx\mathfrak{S}}{\omega^2 q_1} = \frac{q_2}{q_1} (R-d)^3 - \frac{R^3 (q_2 - q_1)}{q_1};$$

beiderseits $\frac{3\mathfrak{S}gR}{q_1 \omega^2}$ abgezogen, gibt:

$$(R+x)^3 - \frac{3\mathfrak{S}g}{q_1 \omega^2} (R+x) = \frac{q_2}{q_1} (R-d)^3 + R^3 \left(\frac{q_1 - q_2}{q_1}\right) - \frac{3\mathfrak{S}gR}{q_1 \omega^2}.$$

Betrachten wir die Grösse $R + x = y$ als unbekannt, so kann man diese kubische Gleichung entweder streng auflösen nach der Unbekannten y, oder man kann hier, wenn man die Zahlenwerthe einsetzt, durch Probiren für $R + x$, also auch für x einen Werth finden, der der Gleichung genügt. Schlagen wir das letztere Verfahren ein, und setzen probeweise $R + x = 0{,}505^m$, also, weil R mit $0{,}5^m$ gegeben ist, $x = 0{,}005^m = 5^{mm}$, ferner $\mathfrak{S} = 1{,}75^{Kg}$ pro Quadrat-Millimeter, also pro Quadrat-Meter $\mathfrak{S} = 1750000^{Kg}$; wir nehmen die zulässige Spannung deshalb kleiner als sonst, weil die Trommel wegen des Wasserabflusses mit vielen Löchern versehen ist, wodurch ihre Festigkeit geschwächt ist. Man erhält:

$$(0{,}505)^3 - \frac{3 \,.\, 1750000 \,.\, 9{,}81}{7300 \,.\, \left(\frac{3{,}14 \,.\, 800}{30}\right)^2} \,.\, 0{,}505 \overset{?}{=} \frac{150}{7300}\,(0{,}5 - 0{,}1)^3 +$$

$$+ \left(\frac{7300 - 150}{7300}\right)(0{,}5)^3 - \frac{3 \,.\, 1750000 \,.\, 9{,}81 \,.\, 0{,}5}{7300 \,.\, \left(\frac{3{,}14 \,.\, 800}{30}\right)^2},$$

oder wenn man den linken Theil der Gleichung mit L, den rechten Theil mit R bezeichnet und die angezeigten Operationen verrichtet, so folgt:

$$L = 0{,}128787625 - \frac{1750000}{7300 \,.\, 238} \,.\, 0{,}505,$$

$L = -\,0{,}379874744$, der rechte Theil gibt:

$$R = \frac{15}{730} \,.\, 0{,}064 + 0{,}1224315068 - 0{,}5036261079,$$

$$R = -\,0{,}3798795326;$$

wie man sieht, ist der linke Theil der Gleichung gleich dem rechten Theil bis auf die sechste Decimalstelle, und man kann daher den Werth von $x = 5^{mm}$ gelten lassen. Diese Wandstärke ist für die praktische Ausführung zu klein und wird man daher die Cylinderwand wohl nicht unter 9 bis 10^{mm} Stärke ausführen.

51. Es ist die Wandstärke δ eines hohlen, gusseisernen Cylinders vom lichten Durchmesser d und der Länge l zu berechnen, wenn er an den beiden Endflächen geschlossen und mit Dampf von a Atmosphären Spannung gefüllt ist.

Auflösung. Wenn wir hier von der Theorie, welche die Festigkeit der Gefässwände mit innerem Drucke behandelt, absehen, und den Cylinder auf Abreissen berechnen, so haben wir die Projection der gedrückten Fläche, d. i. die Grösse $d\,l$ in Rechnung zu bringen. Wir machen die Annahme, dass das Abreissen in zwei Flächen erfolgt, von denen jede den Querschnitt $\delta\,l$ hat; der Druck,

dem diese Flächen zu widerstehen haben, ist $d l a \alpha$, wo α den Druck einer Atmosphäre bedeutet. Man erhält daher $d l a \alpha = 2 \delta l \mathfrak{S}$, woraus $\delta = \frac{d l a \alpha}{2 l \mathfrak{S}} = \frac{d a \alpha}{2 \mathfrak{S}}$ folgt; verstehen wir unter d den Durchmesser in Centimetern, so ist α der Druck einer Atmosphäre auf 1^{cm^2}, dieser Druck beträgt aber bekanntlich $1{,}0333^{Kg}$ oder angenähert 1^{Kg}, daher $\alpha = 1$ und $\delta^{cm} = \frac{d a}{2 \mathfrak{S}}$; wir setzen $\mathfrak{S} = 200$ (pro Quadrat-Centimeter), somit ist $\delta = \frac{d a}{400}$. Es sei z. B. $d = 60^{cm}$ und $a = 4$, so ist $\delta = \frac{60 \cdot 4}{400} = 0{,}6^{cm} = 6^{mm}$; diese Wandstärke ist zu gering für die praktische Ausführung und ausserdem zu gering für die anderweitigen Bedingungen. die der Dampfcylinder zu erfüllen hat. Dieser soll nicht allein fest genug sein, sondern er soll auch dicht halten, d. h. er soll durch die etwaigen Gussporen keinen Dampf entweichen lassen; er soll ferner gegen Abkühlung geschützt sein und auch die Möglichkeit gewähren, noch einmal ausgebohrt werden zu können, ohne dass dadurch die Wandstärke zu gering würde; dieses Alles erreicht man, wenn man dem durch die Festigkeitsgleichung gefundenen, theoretischen Werthe eine Constante beifügt; man erhält praktisch gut brauchbare Werthe für δ, wenn man setzt: $\delta^{cm} = \frac{d a}{400} + 2^{cm}$ bis $\delta^{cm} = \frac{d a}{400} + 3^{cm}$; eine andere gute empirische Formel für die Wandstärke der Dampfcylinder ist auch $\delta^{mm} = \frac{d^{mm}}{100} + 20^{mm}$.

Im vorliegenden Beispiel würde man nach der ersten Formel. wenn man die Constante mit 2^{cm} annimmt, erhalten:

$$\delta = \frac{d a}{400} + 2 = \frac{60 \cdot 4}{400} + 2 = 0{,}6 + 2 = 2{,}6^{cm} = 26^{mm};$$

nach der zweiten Formel erhielte man: $\delta = \frac{600}{100} + 20 = 26^{mm}$.

52. Eine schmiedeiserne Zugstange von kreisförmigem Querschnitte, welche durch die Kraft $P = 4240^{Kg}$ auf Zug beansprucht wird, ist mittelst eines Bolzens vom Durchmesser d_1, der durch das gabelförmige Ende (Ohr) der Zugstange geht, an irgend einem anderen Körper, z. B. einem eisernen Dachsparren von **T**-förmigem Querschnitte oder an einem gusseisernen Schuh zu befestigen (siehe Fig. 28 und 29); es sind die Festigkeitsdimensionen dieser Verbindung, das sind der Durchmesser d der Zugstange, der Durchmesser d_1 des Bolzens, die Breite b_1 und Dicke b eines Gabelarmes und der Halbmesser r des Gabelohres zu berechnen.

Auflösung. Der Durchmesser d der Zugstange folgt aus der Gleichung: $f = \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{P}{\mathfrak{S}}$, hieraus ist

$$d = \sqrt{\frac{4P}{\pi \mathfrak{S}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 4240}{3{,}14 \cdot 6}} = 30^{mm}.$$

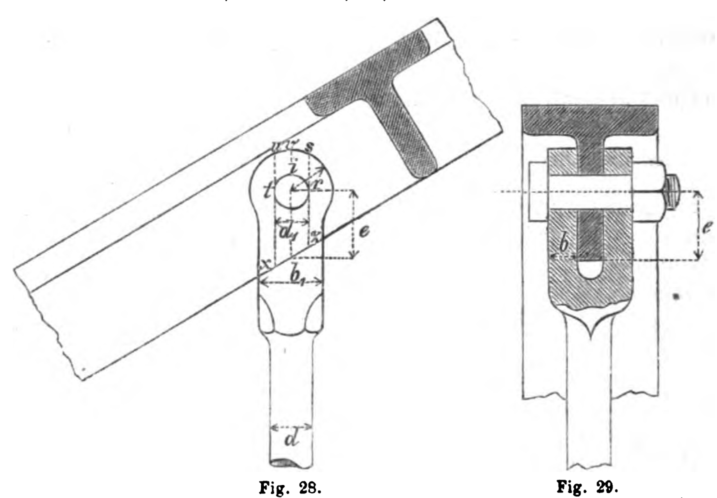


Fig. 28. Fig. 29.

Der Bolzen vom Durchmesser d_1 ist zweischnittig, d. h. er widersteht der ihn auf Abscheerung beanspruchenden Kraft P mit zwei Querschnitten. Zur Berechnung von d_1 dient daher die Gleichung:

$$\frac{2 \pi d_1^2}{4} = \frac{P}{\mathfrak{S}_1}, \text{ woraus } d_1 = \sqrt{\frac{2P}{\pi \mathfrak{S}_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4240}{3{,}14 \cdot 5}} = 23^1/_4{}^{mm};$$

drücken wir den Durchmesser d_1 durch d aus, so hat man:

$$\frac{\pi d^2 \mathfrak{S}}{4} = \frac{2 \pi d_1^2 \mathfrak{S}_1}{4}, \text{ woraus } d_1 = d \sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{2 \mathfrak{S}_1}} = d \sqrt{\frac{8}{2 \cdot 7}}$$

oder $d_1 = 0{,}756\, d$ folgt; zur Berechnung der Breite b_1 und der Dicke b der Gabelarme dient die Bedingung, dass der Querschnitt der beiden Gabelarme gleich dem Querschnitt der Zugstange sein muss, wenn beide dieselbe Widerstandsfähigkeit der Kraft P entgegensetzen sollen; es ist dann: $2 b b_1 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{P}{\mathfrak{S}}$, wir machen die Annahme $b_1 = 1{,}25\, d$, hiermit wird:

$$2b \cdot 1{,}25\, d = \frac{\pi d^2}{4}, \text{ oder } 2{,}5\, b = \frac{\pi d}{4}, \text{ woraus}$$

$$b = \frac{\pi d}{10} = \frac{3{,}14 \cdot 30}{10} = 9{,}42$$

und abgerundet $b = 10^{mm}$, also $b_1 = 1,25 \,.\, 30 = 37,5^{mm}$ folgt. Der Halbmesser r des Gabelohres bestimmt sich aus dem Umstande, dass dasselbe in den zwei Flächen $\overline{ut} \,.\, b$ und $\overline{rs} \,.\, b$, also zusammen in der Fläche $2\overline{ut} \,.\, b$ nach den Geraden ut und rs ausgescheert würde bei entsprechender Vergrösserung von P; der Sicherheit wegen nehmen wir jedoch statt der Dimension ut oder rs das Stück $iv = c = r - \frac{d_1}{2}$ in Rechnung und erhalten:

$$4cb\mathfrak{S}_1 = \frac{\pi d^2 \mathfrak{S}}{4} = P, \text{ woraus}$$

$$c = \frac{\pi d^2}{16b} \cdot \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_1} = \frac{\pi d^2}{16b} \cdot \frac{8}{7} = \frac{\pi d^2}{14b}$$

folgt, wir fanden oben $b = \frac{\pi d}{10}$, diesen Werth eingesetzt:

$$c = \frac{\pi d^2}{14 \,.\, \frac{\pi d}{10}} = \frac{5}{7} d = \frac{5}{7} \cdot \frac{d_1}{0,756} = 0,994\, d_1,$$

abgerundet $c = d_1$; daher folgt aus: $c = r - \frac{d_1}{2}$,

$$r = c + \frac{d_1}{2} = 1,5\, d_1 = 1,5 \,.\, 23 = 34,5^{mm}.$$

Nun bleibt noch zu untersuchen übrig, wie gross die Entfernung e (siehe Figur) im Minimum zu machen ist, dass ein Ausscheeren des Sparrenstückes $txzr$ in der Gesammtfläche $(tx + rz)\,\delta$ nach den Geraden tx und rz nicht erfolge.

Setzen wir $tx + rz = 2e$ und die Dicke der Sparrenrippe, welche von den Gabelarmen umfasst wird, gleich δ, so muss die Gleichung stattfinden:

$$P = 2e\delta\mathfrak{S}_1 = \frac{2\pi d_1^2 \mathfrak{S}_1}{4} = \frac{\pi d^2 \mathfrak{S}}{4} = 2b_1 b\mathfrak{S} = 4\left(r - \frac{d_1}{2}\right)\mathfrak{S}_1;$$

setzen wir $\delta = b = 10^{mm}$, so bestimmt sich e am bequemsten aus der Gleichung:

$$2eb\mathfrak{S}_1 = 2b_1 b\mathfrak{S}, \text{ woraus } e = \frac{b_1 \mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_1} = 37,5 \,.\, \frac{8}{7} = 42,8^{mm}$$

und abgerundet $e = 43^{mm}$ sich ergibt.

53. Die hölzerne Säule eines Hängewerkes hat einen Zug von $P = 8000^{Kg}$ auszuhalten, es soll mit der Säule der horizontale Balken A (siehe Fig. 30), dessen Breite 130^{mm} betrage, mittelst Eisenband und Bolzen verbunden werden. Es sind die Festigkeitsdimensionen dieser Verbindung zu berechnen.

Auflösung. Der Bolzen vom Durchmesser d ist zweischnittig, daher $\frac{2\pi d^2}{4} = f = \frac{P}{\mathfrak{S}_1} = \frac{8000}{5} = 1600$, woraus

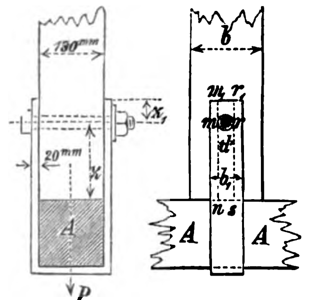


Fig. 30.

$$d = \sqrt{\frac{2 \cdot 1600}{\pi}} = 32^{mm}$$

folgt. Mit Rücksicht auf die Länge des Bolzens ist es zweckmässig, wenn man, um einer etwaigen Biegung vorzubeugen, den Bolzen etwas stärker macht und $d = 40^{mm}$ nimmt.

Die Dicke b der Hängesäule ergibt sich aus der Gleichung:

$$f = 130b - 130d = \frac{P}{\mathfrak{S}}, \text{ woraus}$$

$$b = \left(\frac{P}{\mathfrak{S}} + 130d\right)\frac{1}{130} = \frac{P}{130\,\mathfrak{S}} + d, \text{ oder}$$

$$b = \frac{8000}{130 \cdot 0{,}66} + d = 93{,}2 + 40, \text{ abgerundet } b = 133^{mm} \text{ folgt.}$$

Wählt man für das Eisenband ein Flacheisen von 20^{mm} Stärke, so folgt die Breite b_1 des Bandes aus:

$$f = 2 \cdot 20b_1 - 2d \cdot 20 = \frac{P}{\mathfrak{S}} = \frac{8000}{6}; \text{ hieraus ist}$$

$$b_1 = \frac{\frac{8000}{6} + 40d}{40} = \frac{8000 + 240 \cdot 40}{240} = \frac{17600}{240} = 73{,}3^{mm}.$$

Endlich ist noch zu berechnen, in welcher Entfernung vom unteren Ende der Hängesäule der Bolzen anzuordnen ist, damit ein Ausscheeren des Holzes nicht eintrete, und wie gross die Entfernung der Bolzenmitte vom oberen Rande des Eisenbandes im Minimum sein müsse, dass ein Ausscheeren des Bandes an seinem oberen Ende nicht zu befürchten sei. Bedeutet z die Entfernung der Bolzenmitte vom unteren Ende der Säule, so könnte bei entsprechender Vergrösserung von P ein Ausscheeren des Holzes in den zwei Trennungsflächen $130z$ und $130z$ nach den zwei Geraden mn und rs, also in der Gesammtfläche $(260\,z)^{mm^2}$ stattfinden, der grösseren Sicherheit wegen führen wir jedoch anstatt z die Entfernung $z - \frac{d}{2} = z - 20$ in die Rechnung ein, und haben: $f = 260\,(z - 20) = \frac{P}{\mathfrak{S}} = \frac{8000}{0{,}07}$,

woraus $z - 20 = \frac{8000}{0{,}07 \cdot 260}$ und $z = \frac{8000}{0{,}07 \cdot 260} + 20 = 439{,}5$, abgerundet $z = 440^{mm}$ folgt.

Zur Berechnung der Entfernung z_1 der Bolzenmitte vom oberen Rande des Eisenbandes hat man nur zu bedenken, dass letzteres in vier Trennungsflächen, von denen jede die Grösse $(20 \,.\, \overline{mm_1})^{mm^2}$ hat, nach den Geraden mm_1 und rr_1 auf Ausscheerung durch die Kraft P beansprucht wird; der Sicherheit wegen nehmen wir jedoch statt der Dimension $mm_1 = rr_1 = z_1$ nur $z_1 - \frac{d}{2}$ und erhalten:

$$f = 4 \,.\, 20 \left(z_1 - \frac{d}{2}\right) = \frac{P}{\mathfrak{S}_1}, \text{ woraus}$$

$$z_1 - 20 = \frac{P}{80 \,.\, \mathfrak{S}_1} \text{ und } z_1 = 20 + \frac{8000}{80 \,.\, 5} = 40^{mm} \text{ folgt.}$$

54. Der Sparrer SS_1 des beigezeichneten Pultdaches hat einen Druck $P = 5000^{Kg}$ in der Richtung seiner Axe auszuhalten und ist mit dem horizontalen Balken AB verzapft. Der Zapfen ist 40^{mm} hoch und 130^{mm} breit; es soll berechnet werden, in welcher Entfernung x derselbe vom Ende des Balkens AB anzuordnen ist, damit ein Ausscheeren des Balkens AB in dem Stücke AA_1 nicht stattfinde; in dem rechtwinkeligen Dreiecke $A_1 z v$ ist die eine Kathete $zv = 1^m$ und $A_1 z = 3^m$.

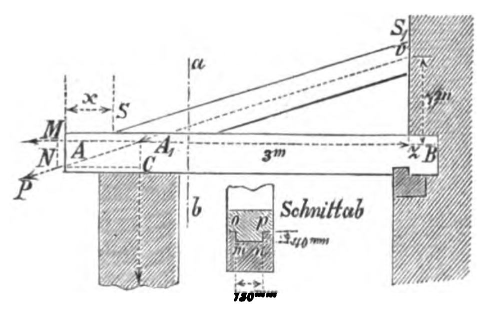


Fig. 31.

Auflösung. Wir zerlegen zunächst die Kraft P in die zwei auf einander rechtwinklig stehenden Componenten $A_1 M = p$ und $A_1 C = q$, so stellt die Gerade $A_1 M$ die Grösse des Horizontalschubes dar, welcher das Balkenstück von der Länge x auszustossen bestrebt ist. Die Kraft p ergibt sich aus der Betrachtung der zwei ähnlichen Dreiecke $A_1 MN$ und $A_1 vz$. Aus der Aehnlichkeit dieser Dreiecke folgt: $A_1 M : A_1 N = A_1 z : A_1 v$, oder da $A_1 M = p$,

$$A_1 z = 3, \; A_1 N = P = 5000 \text{ und } A_1 v = \sqrt{\overline{A_1 z}^2 + \overline{vz}^2},$$

oder $A_1 v = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$ ist, so hat man auch:

$$p : 5000 = 3 : \sqrt{10}, \text{ woraus } p = \frac{3 \,.\, 5000}{\sqrt{10}} = 4744^{Kg} \text{ folgt.}$$

Die bei der Abscheerung entstehenden Trennungsflächen sind: $\overline{mn} \,.\, x = 130x$, $\overline{om} \,.\, x = 40x$, $\overline{pn} \,.\, x = 40x$, daher die gesammte abzuscheerende Fläche

$$f = 130x + 40x + 40x = 210x = \frac{P}{\mathfrak{S}_1} = \frac{4744}{0{,}07}, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{4744}{0{,}07 \,.\, 210} = 322{,}7$$

und abgerundet $x = 323^{mm}$ folgt.

55. Es sind bei einer Nietverbindung (einfache Ueberplattungsnietung, siehe nebenstehende Figur) der Durchmesser d eines Nietbolzens, die Entfernung x zweier benachbarter Nietenmittel einer Nietreihe, die Entfernung y der Mittellinie der Nietreihe vom Blechrande zu bestimmen, wenn die Nietnaht nur eine Nietreihe enthält und die Verbindung von den Kräften P, $-P$, deren Richtung senkrecht zur Nietbolzenaxe ist, derart angegriffen wird, dass sie die zu verbindenden Bleche von der Stärke δ parallel zur Trennungsfläche derselben auseinander zu ziehen und die Nietbolzen abzuscheeren suchen.

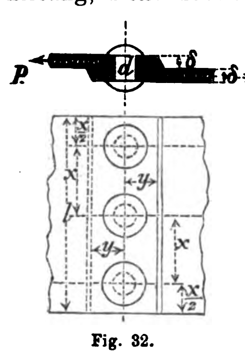


Fig. 32.

Auflösung. Bezeichnet man die Anzahl der Nieten einer Nietreihe mit n und untersucht, welche Wirkung die Kräfte auf die Nietverbindung ausüben, so findet man: Die Kräfte haben das Bestreben, die Nietbolzen in der Gesammtquerschnittsfläche $f_1 = \frac{n d^2 \pi}{4}$ abzuscheeren, ferner das Blech zwischen den Nietlöchern in der Querschnittsfläche $f_2 = \delta (l - n d)$ abzureissen, wobei l die Länge der Nietnaht bedeutet; ausserdem haben die Kräfte P, $-P$ das Bestreben, mit dem Momente $P\delta$ das Blech zu biegen, wodurch die Tragfähigkeit der Verbindung geschwächt wird; von dieser letzteren Einwirkung wollen wir jedoch hier absehen. Bemerkt sei nur, dass die Wirkung dieses Momentes bei eintretender Biegung der Bleche durch die dabei erfolgte Verkleinerung des Hebelarmes $\frac{\delta}{2}$ geringer wird, und pflegt man daher den Blechen gleich von vornherein eine dauernde Biegung zu geben, wie nebenstehende Figur anzeigt.

Fig. 33.

Machen wir die Annahme, dass die beiden Nietenmittel an den Enden der Nietnaht je $\frac{x}{2}$ vom Blechrande abstehen (in der Richtung der Länge der Nietnaht gemessen), so kann man auch $f_2 = [(x - d)\ (n - 1) + x - d]\,\delta$ setzen, oder reducirt:

$$f_2 = (n x - n d - x + d + x - d)\,\delta = n\delta\,(x - d).$$

Soll nun die Nietverbindung in allen ihren Theilen gleiche Festigkeit haben, so muss offenbar die Gleichung statthaben: $P = f_1 \mathfrak{S}_1 = f_2 \mathfrak{S}$. Für die Widerstandsfähigkeit der Nietungen haben, sowie insbesondere von Fairbairn bei Gelegenheit des Baues der Britanniabrücke angestellte Versuche ergeben, dass, wenn die Festigkeit an der Nietstelle ebenso gross, wie diejenige des vollen Bleches sein soll, d. h. wenn der Bruch mit gleicher Wahrscheinlichkeit in den Nieten und im Bleche eintreten soll, die zulässige Schubspannung pro Quadrat-Millimeter Nietbolzenquerschnitt gleich der zulässigen Zugspannung pro Quadrat-Millimeter Blechquerschnitt gesetzt werden könne. Wir erhalten daher aus obiger Gleichung, wenn wir für f_1 und f_2 die Werthe setzen: $P = \frac{\pi n d^2 \mathfrak{S}_1}{4} = n \delta (x - d) \mathfrak{S}$; setzt man $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}$, so folgt aus den beiden ersten Theilen dieser dreitheiligen Gleichung der Nietbolzendurchmesser $d = \sqrt{\frac{4P}{\pi n \mathfrak{S}}}$; die Anzahl n der Nietbolzen kann man zwar beliebig wählen, jedoch muss man dieses immer mit Rücksicht auf den Umstand thun, dass der von der Anzahl der Bolzen zum Theil abhängige Durchmesser desselben nicht zu gross ausfalle im Verhältnisse zur Blechstärke δ; gewöhnlich nimmt man $\frac{d}{\delta} = 2$, es ist jedoch nicht gleichgiltig, wie gross man dieses Verhältniss macht; denn das Blech überträgt den empfangenen Zug auf den Nietbolzen in einer Berührungsfläche, welche die Hälfte ABC (siehe nebenstehende Figur) eines Cylindermantels vom Durchmesser d und der Höhe δ ist. Die Projection dieser gedrückten Fläche auf eine zur Druckrichtung senkrechte Ebene ist $d\,\delta$ und wenn $\mathfrak{S}_1$ die rückwirkende Festigkeit (Druckspannung) pro Quadrat-Millimeter Querschnitt bezeichnet, so ist $P = d\,\delta\,\mathfrak{S}_1$, daher auch $P = \frac{\pi d^2 n \mathfrak{S}}{4} = \mathfrak{S}_1 d\,\delta\, n$, oder $\delta = \frac{d}{2}$ gesetzt, und $\mathfrak{S}_1$ bestimmt, so ist $\mathfrak{S}_1 = \frac{\pi \mathfrak{S}}{2} = 1{,}57\,\mathfrak{S}$; man sieht, dass die Druckspannung, welche das Blech im halben Nietloch auszuhalten hat, schon grösser ist, als die Zugspannung des Bleches; würde man $\frac{d}{\delta} > 2$ nehmen, so würde das Blech im Nietloche eine zu grosse rückwirkende Spannung auszuhalten haben, und man würde befürchten müssen, dass in Folge davon an dem Nietloch auf der Druckseite aufgeworfene Ränder entstehen würden; je kleiner man also $\frac{d}{\delta}$ nimmt, desto geringer ist die erwähnte Gefahr des Aufwerfens des Bleches am Nietloche. Aus dem zweiten und dritten

Fig. 34.

Theile obiger dreitheiliger Gleichung folgt: $\frac{\pi n d^2}{4} = n \delta (x - d)$; setzt man $\delta = \frac{d}{2}$ ein, so ist: $\frac{\pi d^2}{4} = \frac{d}{2}(x - d)$, woraus

$$\frac{\pi d}{2} = x - d \text{ und } x = \frac{\pi d}{2} + d = d\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) = 2{,}57\, d$$

folgt, oder für d den Werth gesetzt:

$$d = \sqrt{\frac{4P}{n \pi \mathfrak{S}}}, \text{ gibt } x = 2{,}57 \sqrt{\frac{4P}{\pi n \mathfrak{S}}}.$$

Die Vernietung könnte ausser durch Abscheerung der Nietbolzen oder durch Abreissen des Bleches zwischen den Nieten noch dadurch zerstört werden, dass das zwischen den Nietbolzen und dem Blechrande befindliche Blech ausgescheert, hinausgeschoben wird, wenn die Entfernung y des Nietenmittels vom Blechrande zu klein wäre; allein, es ist nicht wahrscheinlich, dass ein Ausscheeren des Bleches zwischen Blechrand und Bolzen in den zwei Querschnittsflächen $\overline{ab} \,.\, \delta$ und $\overline{cd} \,.\, \delta$ nach den Geraden ab und cd (siehe Figur der Vernietung) erfolgen würde, sondern es ist anzunehmen, dass nur eine einzige Trennungsfläche von der Grösse $\left(y - \frac{d}{2}\right) \delta$ sich bilden und durch Biegung des Bleches eine Oeffnung für den Durchgang des Bolzens sich darbieten würde. Diese Dimension y entzieht sich gänzlich der Berechnung. Man geht aber sicher, wenn man $y \delta = \frac{\pi d^2}{4}$ setzt, woraus man mit $\delta = \frac{d}{2}$ erhält: $y = \frac{\pi d}{2} = 1\,57\, d$; da ferner aus dem gefundenen Werthe von $x = 2{,}57\, d$ folgt, $x - d = 1{,}57\, d$, so hat man auch: $y = x - d$.

Die Anzahl n der Nietbolzen bestimmt sich bei gegebener Länge l der Nietnaht aus der Gleichung: $f_2 = \delta (l - n d) = \delta n (x - d)$, woraus $l - n d = n x - n d$ und $n = \frac{l}{x}$ folgt; für x den Werth gesetzt, $x = 2{,}57\, d$, so ist $n = \frac{l}{2{,}57\, d} = 0{,}389 \frac{l}{d}$ und für d den gefundenen Werth gesetzt, gibt:

$$n = \frac{0{,}389\, l}{\sqrt{\frac{4P}{n \pi \mathfrak{S}}}} = 0{,}389\, l \sqrt{\frac{n \pi \mathfrak{S}}{4P}},$$

oder die Gleichung quadrirt:

$$n^2 = (0{,}389)^2\, l^2 \,.\, \frac{n\,\pi\, \mathfrak{S}}{4\,P},$$ woraus

$$n = \frac{0{,}1188\, \mathfrak{S}\, l^2}{P}$$ und abgerundet

$$n = \frac{0{,}12\, \mathfrak{S}\, l^2}{P}$$

folgt. Setzt man diesen Werth von n in die Gleichung für d ein, so ist:

$$d = \sqrt{\frac{4\,P}{\pi\, \mathfrak{S}\,.\, \frac{0{,}12\, \mathfrak{S}\, l^2}{P}}} = \frac{2\,P}{\mathfrak{S}\, l \sqrt{0{,}12\, \pi}} \text{ oder } d = \frac{3{,}274\, P}{l\, \mathfrak{S}}.$$

Es sei z. B. die Länge l der Nietzahl $l = 1^m$, die die Nietverbindung angreifende Kraft $P = 20000^{Kg}$, dann ist, wenn man $\mathfrak{S} = 5$ setzt, die Nietenanzahl $n = \frac{0{,}12\,.\,5\,(1000)^2}{20000} = 30$. Die Entfernung x zweier benachbarter Nietenmittel kann entweder nach der Formel $x = 2{,}57 \sqrt{\frac{4\,P}{n\,\pi\,\mathfrak{S}}}$, oder bequemer nach der Formel $x = \frac{l}{n}$ bestimmt werden; in beiden Fällen erhält man denselben Werth; $x = \frac{1000}{30} = 33\,^1/_3{}^{mm}$. Der Nietbolzendurchmesser kann entweder nach der Formel $d = \sqrt{\frac{4\,P}{\pi\, n\, \mathfrak{S}}}$ oder aus der Gleichung $x = 2{,}57\, d$ mit $d = \frac{x}{2{,}57} = \frac{33\,^1/_3}{2{,}57}$ oder endlich nach der Formel: $d = \frac{3{,}274\, P}{l\, \mathfrak{S}}$ berechnet werden, in allen drei Fällen erhält man denselben Werth $d = 13^{mm}$. Die Entfernung y des Nietenmittels vom Blechrande wird $y = 1{,}57\, d = 1{,}57\,.\,13 = 20{,}4$ und abgerundet $y = 21^{mm}$.

Ist die Nietverbindung eine mehrfache Ueberplattungsvernietung, d. h. besteht die Nietnaht aus mehr als einer Nietreihe und heisse die Anzahl der Nietreihen i, so muss, wenn die Nietbolzen dieselbe Widerstandsfähigkeit gegen Abscheeren, wie das Blech zwischen den Nieten gegen Abreissen haben sollen, die Gleichung erfüllt sein: $P = \frac{n\, i\, \pi\, d^2\, \mathfrak{S}}{4} = \delta\,(l - n\,d)\, \mathfrak{S}$, wobei wieder l die Länge der Nietnaht und n die Anzahl Nietbolzen in einer Reihe bezeichnen. Wir

treffen die Anordnung so, dass die Nieten in den einzelnen Reihen gegen einander versetzt erscheinen (siehe beistehende Figur), dann ist:

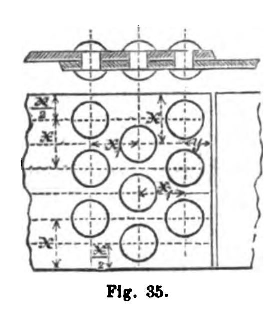


Fig. 35.

$$l - nd = (x - d)(n - 1) + \frac{3}{2}x - d, \text{ oder}$$

$$l - nd = n(x - d) + \frac{x}{2}, \text{ daher}$$

$$P = \frac{n i \pi d^2 \mathfrak{S}}{4} = \left[n(x - d) + \frac{x}{2}\right] \delta \mathfrak{S};$$

aus den ersten zwei Theilen dieser Gleichung folgt: $d = \sqrt{\frac{4P}{\pi i n \mathfrak{S}}}$; aus dem zweiten und dritten Theile der Gleichung folgt:

$$\frac{n i \pi d^2}{4} = \left(nx - nd + \frac{x}{2}\right)\delta,$$

oder $\delta = \frac{d}{2}$ eingesetzt, gibt

$$\frac{n i \pi d^2}{4} = \frac{ndx}{2} - \frac{nd^2}{2} + \frac{xd}{4},$$

oder beiderseits durch $\frac{d}{2}$ dividirt:

$$\frac{n i \pi d}{2} = nx - nd + \frac{x}{2}, \text{ woraus}$$

$$x\left(n + \frac{1}{2}\right) = nd\left(\frac{i\pi}{2} + 1\right) \text{ und}$$

$$x = \frac{nd(i\pi + 2)}{2\left(n + \frac{1}{2}\right)} = \frac{nd(i\pi + 2)}{2n + 1}$$

folgt, oder für d den Werth gesetzt:

$$x = \frac{n(i\pi + 2)}{2n + 1}\sqrt{\frac{4P}{\pi i n \mathfrak{S}}}.$$

Die Anzahl n der Nieten bestimmt sich hier wieder aus der Gleichung:

$$l - nd = (x - d)(n - 1) + \frac{3x}{2} - d; \text{ hieraus ist:}$$

$$l - nd = xn - nd - x + d + \frac{3x}{2} - d, \text{ oder:}$$

$$l = nx + \frac{x}{2}, \text{ woraus } n = \frac{l - \frac{x}{2}}{x} = \frac{2l - x}{2x}$$

sich ergibt; für x den Werth gesetzt, gibt:

$$n = \frac{2l - \frac{nd(i\pi + 2)}{2n+1}}{\frac{2nd(i\pi + 2)}{2n+1}} = \frac{4nl + 2l - nd(i\pi + 2)}{2nd(i\pi + 2)}, \text{ oder}$$

$$2n^2 d(i\pi + 2) = 4nl + 2l - nd(i\pi + 2), \text{ oder}$$

$$n^2 - n\left[\frac{4l - d(i\pi + 2)}{2d(i\pi + 2)}\right] = \frac{l}{d(i\pi + 2)};$$

setzen wir der Kürze wegen den Ausdruck $d(i\pi + 2) = a$, so ist:

$$n^2 - n\frac{(4l - a)}{2a} = \frac{l}{a}.$$

Diese quadratische Gleichung nach n aufgelöst:

$$n = \frac{4l - a}{4a} \pm \sqrt{\left(\frac{4l - a}{4a}\right)^2 + \frac{l}{a}} = \frac{4l - a \pm \sqrt{(4l - a)^2 + 16al}}{4a},$$

oder

$$n = \frac{4l - a \pm \sqrt{16l^2 - 8al + a^2 + 16al}}{4a} = \frac{4l - a \pm \sqrt{(4l + a)^2}}{4a},$$

oder

$$n = \frac{4l - a \pm (4l + a)}{4a};$$

das negative Vorzeichen der Wurzelgrösse kann hier offenbar nicht gebraucht werden, weil sonst n negativ herauskäme, was keinen Sinn hätte, daher $n = \frac{4l - a + 4l + a}{4a} = \frac{2l}{a}$ oder für a wieder den Werth gesetzt, gibt: $n = \frac{2l}{d(i\pi + 2)}$. Einfacher gelangt man zu diesem Werthe von n wie folgt: In der Gleichung: $n = \frac{2l - x}{2x}$ im Zähler und Nenner des rechten Theiles durch x dividirt:

$$n = \frac{\frac{2l}{x} - 1}{2}, \text{ oder } 2n = \frac{2l}{x} - 1$$

und für x obigen Werth $x = \frac{nd\,(i\pi + 2)}{2n + 1}$ eingesetzt, gibt:

$$2n + 1 = \frac{2l\,(2n + 1)}{nd\,(i\pi + 2)} \text{ oder } 1 = \frac{2l}{nd\,(i\pi + 2)},$$

woraus $n = \frac{2l}{d\,(i\pi + 2)}$ folgt; in diese Gleichung für d den Werth

gesetzt $d = \sqrt{\frac{4P}{\pi i n \mathfrak{S}}}$, gibt:

$$n = \frac{2l}{(i\pi + 2)\sqrt{\frac{4P}{\pi i n \mathfrak{S}}}}, \text{ hieraus } n \text{ bestimmt:}$$

$$n = \frac{2l}{i\pi + 2} \cdot \sqrt{\frac{\pi i n \mathfrak{S}}{4P}}, \text{ quadrirt:}$$

$$n^2 = \frac{4l^2 \pi i n \mathfrak{S}}{(i\pi + 2)^2 \cdot 4P} \text{ und } n = \left(\frac{l}{\pi i + 2}\right)^2 \frac{\pi i \mathfrak{S}}{P};$$

diesen Werth von n in die Gleichung für d eingesetzt, gibt den Nietbolzendurchmesser unabhängig von der Nietenanzahl, aber abhängig von der Länge l der Nietnaht, wie folgt:

$$d = \sqrt{\frac{4P}{\pi i \mathfrak{S} \cdot \frac{l^2 \pi i \mathfrak{S}}{P(i\pi + 2)^2}}} = \frac{2P(i\pi + 2)}{\pi i \mathfrak{S} l};$$

setzt man hierin $i = 1$, so erhält man wieder den bereits gefundenen Ausdruck für d, entsprechend der einfachen Ueberplattungsvernietung. Es sei z. B. $P = 20000^{Kg}$ $i = 2$, $l = 1^m$, dann erhält man:

$$n = \frac{(1000)^2 \cdot 3{,}14 \cdot 2 \cdot 5}{20000\,(2 \cdot 3{,}14 + 2)^2} = \frac{1570}{(8{,}28)^2} = 22{,}96,$$

abgerundet $\underline{n = 23}$; der Nietbolzendurchmesser d kann wieder

nach der Formel $d = \sqrt{\frac{4P}{\pi i n \mathfrak{S}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 20000}{3{,}14 \cdot 2 \cdot 23 \cdot 5}} = 10{,}52$, und

abgerundet $d = 11^{mm}$, oder nach der Formel $d = \frac{2P(i\pi + 2)}{\pi i \mathfrak{S} l}$,

$d = \frac{2 \cdot 20000\,(2 \cdot 3{,}14 + 2)}{3{,}14 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 1000} = \frac{33{,}12}{3{,}14} = 10{,}54$ und abgerundet

$d = 11^{mm}$ gefunden werden.

Die Entfernung x zweier benachbarter Nietenmittel einer Nietreihe wird $x = \frac{2l}{2n+1} = \frac{2000}{2.23+1} = \frac{2000}{47} = 42{,}55$, abgerundet $x = 43^{mm}$; es wird ferner die Entfernung

$$y = \frac{\pi d^2}{4\delta} = 0{,}785 \cdot 2 \cdot 11 = 17{,}27^{mm}.$$

Die Entfernung x_1 je zweier Nietreihen von einander ist beliebig; man nimmt gewöhnlich $x_1 = 2^1/_2\, d$ bis $3d$, oder betrachtet auch x_1 als die Höhe eines gleichseitigen Dreieckes, von dem zwei Eckpunkte in zwei einander benachbarten Nietenmitteln einer Nietenreihe, und der dritte Eckpunkt in dem Nietenmittel der nächst liegenden Nietreihe sich befinden.

Untersuchen wir noch, wie sich bei der einfachen Ueberplattungsvernietung die Tragkraft des vollen Bleches zu der in der Nietnaht verhält, so hat man aus der Gleichung: $\frac{n\pi d^2}{4} = (l - nd)\delta = (l - nd)\frac{d}{2}$; wenn man diese nach l auflöst:

$$\frac{nd\pi}{2} = l - nd \text{ und } l = nd\left(\frac{\pi}{2} + 1\right),$$

der volle Blechquerschnitt ist $l\delta = l\frac{d}{2}$ und für l den eben gefundenen Werth eingesetzt, $\frac{nd^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)$, die Tragkraft des vollen Bleches ist daher: $P = \frac{nd^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)\mathfrak{S}$, die Tragkraft der Nietstelle ist: $P_1 = \frac{n\pi d^2\mathfrak{S}}{4}$; vergleichen wir diese beiden Tragkräfte, so ist:

$$P : P_1 = \frac{nd^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)\mathfrak{S} : \frac{nd^2\pi\mathfrak{S}}{4}, \text{ oder}$$

$$P : P_1 = \frac{\pi}{2} + 1 : \frac{\pi}{2} = 2{,}57 : 1{,}57, \text{ oder}$$

$P : P_1 = 1 : 0{,}61 = 100 : 61$; die Tragkraft des vollen Bleches ist daher 39% grösser als die der Nietstelle; da nun diese letztere unter allen Umständen so fest sein muss, dass sie den auf sie wirkenden Kräften mit der genügenden Sicherheit widerstehen kann, so folgt daraus, dass bei dieser Anordnung der Nieten (sämmtliche Nieten in eine Reihe zu stellen) die Festigkeit des Bleches nicht ganz ausgenützt wird. Um die Verringerung der Tragkraft der Niet-

stelle zu vermindern, ordnet man die Nieten in mehreren Reihen an, in welchen sie gegen einander versetzt erscheinen, wodurch die relative Verschwächung der Tragkraft der Nietstelle kleiner wird, wie nachfolgende Rechnung zeigt: Die Anzahl der Nietenreihen einer Nietnaht sei i, die Anzahl Nieten einer Reihe sei n, so hat man aus der Gleichung: $\frac{n\pi d^2 i}{4} = (l - nd)\frac{d}{2}$, wenn man diese nach l auflöst:

$$\frac{n\pi d}{2} i = l - nd \text{ und } l = nd\left(\frac{\pi i}{2} + 1\right);$$

die Tragkraft des vollen Bleches ist: $P = l\delta\mathfrak{S}$ und für l den eben gefundenen Werth und $\delta = \frac{d}{2}$ eingesetzt, gibt:

$$P = \frac{\mathfrak{S} d}{2} \,.\, nd\left(\frac{\pi i}{2} + 1\right);$$

die Tragkraft der Nietstelle ist:

$$P_1 = \frac{n\pi d^2 i \mathfrak{S}}{4}, \text{ daher:}$$

$$P : P_1 = \frac{nd^2}{2}\left(\frac{\pi i}{2} + 1\right)\mathfrak{S} : \frac{n\pi d^2 i \mathfrak{S}}{4}, \text{ oder:}$$

$$P : P_1 = \frac{\pi i}{2} + 1 : \frac{\pi i}{2} = \pi i + 2 : \pi i = 1 : \frac{\pi i}{\pi i + 2}, \text{ oder}$$

$$P : P_1 = 1 : \frac{1}{1 + \frac{2}{\pi i}};$$

man sieht, dass der Bruch $\frac{1}{1 + \frac{2}{\pi i}}$ sich immer mehr der Einheit nähert, je grösser i d. i. die Anzahl der Nietreihen wird; für $i = 2$, wird $\frac{P}{P_1} = \frac{8,28}{6,28} = \frac{828}{628} = \frac{1}{0,75} = \frac{100}{75}$, für $i = 3$, wird $\frac{P}{P_1} = \frac{11,42}{9,42} = \frac{1142}{942} = \frac{1}{0,825} = \frac{1000}{825}$ und abgerundet $\frac{P}{P_1} = \frac{100}{83}$; wie man sieht, ist bei zwei Nietreihen die Tragkraft der Nietstelle nur um 25%, bei drei Nietreihen nur um circa 17% kleiner als die Tragkraft des vollen Bleches, woraus erhellt, dass mit der Zunahme der Anzahl der Nietreihen die Festigkeit der Nietnaht sich der des vollen Bleches immer mehr und mehr nähert.

Untersuchen wir endlich noch, welchen Einfluss das Verhältniss $\frac{d}{\delta}$ auf die Festigkeit der Nietstelle hat. Wir hatten bei der einfachen Ueberplattungsvernietung die Gleichung:

$$\frac{n\pi d^2}{4} = n\delta(x - d) \text{ oder } \frac{\pi d^2}{4} = \delta x - d\delta,$$

beiderseits durch δ^2 dividirt:

$$\frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2 + \frac{d}{\delta} = \frac{x}{\delta};$$

die relative Verschwächung des Bleches in der Nietstelle kann dargestellt werden durch den Ausdruck $\frac{x-d}{x}$; aus der letzten Gleichung folgt: $\frac{x}{\delta} - \frac{d}{\delta} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2$, oder $x - d = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2\delta$ und da $x = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2\delta + d$ ist, so hat man, wenn man die beiden letzten Gleichungen durch einander dividirt:

$$\frac{x-d}{x} = \frac{\frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2\delta}{\frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2\delta + d};$$

im rechten Theile der Gleichung Zähler und Nenner des Bruches durch den Zähler dividirt,

$$\frac{x-d}{x} = \frac{1}{1 + \frac{d}{\frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2\delta}} = \frac{1}{1 + \frac{4\delta}{\pi d}};$$

aus dieser Gleichung und der Gleichung $\frac{x}{\delta} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2 + \frac{d}{\delta}$ ist ersichtlich, dass, je kleiner das Verhältniss $\frac{d}{\delta}$ genommen wird, desto kleiner auch $\frac{x}{\delta}$, also desto dichter die Fuge wird; man wird daher für $\frac{d}{\delta}$ ein möglichst kleines Verhältniss nehmen bei den sogenannten Gefässnietungen, d. i. bei genieteten Gefässen, welche wegen ihres flüssigen oder gasförmigen Inhaltes dicht halten müssen, wie Dampf-

kessel, Reservoire; je grösser $\frac{d}{\delta}$ genommen wird, desto mehr nähert sich der Bruch $\frac{x-d}{x}$ der Einheit, d. h. desto kleiner wird die relative Verschwächung des Bleches in der Nietstelle. Diese Vergrösserung des Verhältnisses $\frac{d}{\delta}$ kann jedoch bei der Anordnung, sämmtliche Nieten in eine Reihe zu stellen, nur bis zu der Grenze gehen, dass die Grösse des Normaldruckes zwischen dem Nietbolzen und seiner halbcylindrischen Stützfläche im Nietloche einen gewissen, noch zulässigen, bereits früher ermittelten Werth $\mathfrak{S}_1 = 1{,}57\,\mathfrak{S}$ $\left(\text{bei } \frac{d}{\delta} = 2\right)$ nicht viel überschreitet, damit keine aufgeworfenen Ränder an den Druckseiten der Nietlöcher entstehen. Soll diese Druckspannung $\mathfrak{S}_1 = \frac{P}{d\delta}$ nicht grösser sein, als die auf die Nietbolzen ausgeübte Scheerspannung, so muss $d\delta\mathfrak{S} = \frac{\pi d^2 \mathfrak{S}}{4}$ sein, beiderseits durch δ^2 dividirt:

$$\frac{d}{\delta} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2, \text{ woraus } \frac{d}{\delta} = \frac{4}{\pi} = 1{,}27 \text{ folgt.}$$

Man wird daher das Verhältniss $\frac{d}{\delta}$ bei den sogenannten Festigkeitsnietungen, wie Brückenträger und überhaupt genietete Blechbalken, grösser und bei Gefässnietungen des dichten Verschlusses wegen kleiner nehmen. Man findet z. B. bei:

$$\frac{d}{\delta} = 1{,}5, \quad 2, \quad 2{,}5$$

$$\frac{x}{\delta} = 3{,}27, \quad 5{,}14, \quad 7{,}41$$

$$\frac{y}{\delta} = 1{,}77, \quad 3{,}14, \quad 4{,}91$$

$$\frac{x-d}{x} = 0{,}54, \quad 0{,}61, \quad 0.66.$$

Ebenso zeigt sich auch bei der mehrfachen Ueberplattungsvernietung dieser Einfluss des Verhältnisses $\frac{d}{\delta}$ auf die Nietstelle. Wir nehmen wieder an, dass die Nieten je zwei benachbarter Nietreihen einer Nietnaht gegeneinander versetzt sind, dann ist

$$l - n d = n (x - d) + \frac{x}{2}$$

und man hat

$$\frac{i \pi d^2 n}{4} = (l - n d) \delta = \left[n (x - d) + \frac{x}{2} \right] \delta, \text{ oder}$$

$$\frac{i \pi d^2 n}{4} = \delta n x - d \delta n + \frac{x \delta}{2} = x \delta \left(n + \frac{1}{2} \right) - d \delta n,$$

beiderseits durch δ^2 dividirt, gibt:

$$\frac{i \pi n}{4} \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 = \frac{x}{\delta} \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{d n}{\delta}, \text{ woraus}$$

$$\frac{x}{\delta} = \frac{\frac{i \pi n}{4} \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 + \frac{d n}{\delta}}{n + \frac{1}{2}} = \frac{i \pi n \left(\frac{d}{\delta} \right)^2}{4 \left(n + \frac{1}{2} \right)} + \frac{\frac{d n}{\delta}}{n + \frac{1}{2}} \text{ oder}$$

$$\frac{x}{\delta} = \frac{i \pi n}{2 (2 n + 1)} \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 + \frac{2 n}{2 n + 1} \cdot \frac{d}{\delta}$$

folgt. Um diesen Ausdruck zu vereinfachen, erlauben wir uns die Vernachlässigung, im rechten Theile statt $2 n + 1$ nur $2 n$ zu setzen, wodurch ein nur sehr geringer, vernachlässigbarer Fehler im Resultat entsteht; man erhält dann:

$$\frac{x}{\delta} = \frac{i \pi}{4} \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 + \frac{d}{\delta}; \text{ hieraus ist}$$

$$\frac{x}{\delta} - \frac{d}{\delta} = \frac{i \pi}{4} \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 \text{ und } x - d = \frac{i \pi d^2}{4 \delta},$$

beiderseits durch $x = \frac{i \pi d^2}{4 \delta} + d$ dividirt:

$$\frac{x - d}{x} = \frac{\frac{i \pi d^2}{4 \delta}}{\frac{i \pi d^2}{4 \delta} + d} = \frac{1}{1 + \frac{d}{\frac{i \pi d^2}{4 \delta}}} = \frac{1}{1 + \frac{4 \delta}{i \pi d}}.$$

Aus dieser Gleichung und der Gleichung für $\frac{x}{\delta}$ ist bezüglich des Verhältnisses $\frac{d}{\delta}$ dasselbe ersichtlich, was bereits bei der einfachen Ueberplattungsnietung über den Einfluss dieses Verhältnisses

auf die Festigkeit und die Dichtheit der Nietnaht gesagt wurde. Wir setzen auch hier $y\delta = \frac{\pi d^2}{4}$ und statt des rechten Theiles dieser Gleichung den Werth, der sich für $\frac{\pi d^2}{4}$ aus der Gleichung:

$$\frac{i n \pi d^2}{4} = \left[n(x-d) + \frac{x}{2}\right]\delta$$

ergibt; man erhält:

$$y\delta = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\left[n(x-d) + \frac{x}{2}\right]\delta}{i n} = \frac{\delta\,[2n(x-d) + x]\,\delta}{2 i n}, \text{ oder}$$

$$y = \frac{2nx - 2nd + x}{2in} = \frac{x(2n+1) - 2nd}{2in};$$

wir können, ohne einen wesentlichen Fehler zu begehen, zur Vereinfachung des für y gefundenen Ausdruckes statt $2n+1$ im rechten Theile $2n$ setzen, und erhalten daher $y = \frac{x-d}{i}$; so findet man für $i = 2$ und

$$\frac{d}{\delta} = 1{,}5, \quad 2, \quad 2{,}5$$

$$\frac{x}{\delta} = 5{,}03, \quad 8{,}28, \quad 12{,}32$$

$$\frac{x-d}{x} = 0{,}7, \quad 0{,}76, \quad 0{,}8.$$

Zu bemerken ist noch, dass die relative Verschwächung des Bleches durch die Nietlöcher dann nicht berücksichtigt zu werden braucht, wenn die Bleche nicht gezogen, sondern gedrückt werden; wie dies z. B. bei den unteren Gurtungen der Brückenträger vorzukommen pflegt, weil dann nämlich die Nietbolzen, wenn sie gut eingepasst werden, den Druck ebenso gut übertragen, als das volle Blech das zu thun vermag. Der Querschnitt der Nietbolzen bestimmt sich in gleicher Weise. wie bei gezogenen Blechen. Bei Dampfkesselnietungen wird die Entfernung x zweier Nietenmittel einer Nietreihe im Maximum zu $x = 2{,}5\,d$ genommen. Bei Festigkeitsnietungen nimmt man im Maximum $\frac{d}{\delta} = 2{,}5$.

56. Es sind bei einer einfachen zweiseitigen Laschennietung (Kettennietung, Bandnietung), siehe Fig. 36, der Durchmesser d

eines Nietbolzens, die Entfernung x zweier benachbarter Nietmittel einer Nietreihe und die Entfernung y der Mittellinie einer Nietreihe vom Blechrande zu bestimmen, wenn die Nietverbindung von den Kräften P, — P, deren Richtung senkrecht zur Nietbolzenaxe steht, derart angegriffen wird, dass sie die verbundenen Bleche auseinander zu ziehen und die Nietbolzen abzuscheeren bestrebt sind.

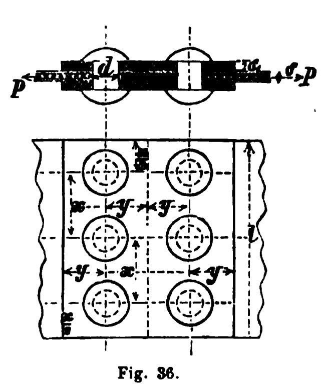


Fig. 36.

Auflösung. Diese Nietverbindung kann durch die Kräfte P, — P entweder dadurch zerstört werden, dass die Nietbolzen abgescheert, oder das Blech zwischen den Nieten abgerissen wird. Ein jeder Nietbolzen widersteht hier den Kräften mit zwei Querschnittsflächen, also in der Gesammtfläche $2 \cdot \frac{\pi d^2}{4}$, weshalb eine solche Vernietung eine zweischnittige genannt wird. Es heisse die Länge der Nietnaht l und die Nieten am Ende derselben stehen wieder je um das Stück $\frac{x}{2}$ vom Blechrande ab, so ist der tragende Blechquerschnitt einer Nietreihe von n Nieten

$$f_1 = (l - n d)\,\delta = [(x - d)(n - 1) + x - d]\,\delta = n\,\delta\,(x - d);$$

aus der Gleichung $f_1 = \frac{n \pi d^2}{2} = \frac{P}{\mathfrak{S}}$ ergibt sich der Nietbolzendurchmesser $d = \sqrt{\frac{2P}{\pi n \mathfrak{S}}}$. Da die Nietbolzen beim Abscheeren denselben Widerstand entgegensetzen sollen, wie das Blech zwischen den Nieten dem Abreissen, so muss die Gleichung stattfinden:

$$\frac{n \pi d^2}{2} = (l - n d)\,\delta = n\,\delta\,(x - d);$$

nehmen wir wieder $\frac{d}{\delta} = 2$ und berechnen den Werth von x, so ist, wenn man beiderseits durch $\frac{n d}{2}$ dividirt:

$$\pi d = x - d \text{ und } x = d\,(\pi + 1) = 4{,}14\,d,$$

oder für d obigen Werth gesetzt: $x = 4{,}14 \sqrt{\frac{2P}{\pi n \mathfrak{S}}}$. Zur Berechnung von y benutzen wir wieder die empirische Formel $y\,\delta = \frac{\pi d^2}{4}$,

woraus mit $\delta = \frac{d}{2}$, sich $y = \frac{\pi d}{2} = 1{,}57\sqrt{\frac{2P}{\pi n \mathfrak{S}}}$ ergibt; da ferner aus der Gleichung $\frac{n\pi d^2}{2} = n\delta(x - d)$ mit $\delta = \frac{d}{2}$ folgt: $\frac{\pi d}{2} = \frac{x - d}{2}$, so hat man auch: $y = \frac{x - d}{2}$. Die Anzahl n der Nieten einer Nietreihe bestimmt sich aus der Gleichung:

$$f_1 = (l - nd)\,\delta = n\delta\,(x - d),$$

woraus $l - nd = nx - dn$ und $n = \frac{l}{x}$, oder für x seinen Werth gesetzt, $n = \frac{l}{4{,}14\,d}$ folgt. Setzt man hierin auch für d seinen Werth, so wird $n = \frac{l}{4{,}14\sqrt{\frac{2P}{\pi n \mathfrak{S}}}}$ oder beiderseits quadrirt:

$$n^2 = \frac{l^2 \pi n \mathfrak{S}}{(4{,}14)^2 .\, 2P}, \text{ hieraus ist}$$

$$n = \frac{l^2 \pi \mathfrak{S}}{(4{,}14)^2 .\, 2P} = \frac{0{,}0915\, l^2 \mathfrak{S}}{P}, \text{ oder abgerundet}$$

$$n = \frac{0{,}092\, l^2 \mathfrak{S}}{P};$$

diesen Werth von n in die Gleichung für d eingesetzt, gibt:

$$d = \sqrt{\frac{2P}{\pi\mathfrak{S} .\, \frac{l^2 \pi \mathfrak{S}}{(\pi + 1)^2\, 2P}}} \text{ oder } d = \sqrt{\frac{4P^2(\pi + 1)^2}{\pi^2 \mathfrak{S}^2 l^2}} \text{ oder}$$

$$d = \frac{2P(\pi + 1)}{\pi \mathfrak{S} l} = \frac{2P .\, 4{,}14}{3{,}14\, \mathfrak{S} l} = \frac{2{,}6369\, P}{\mathfrak{S} l}.$$

Untersuchen wir, wie sich bei dieser Nietverbindung die Tragkraft des vollen Bleches zur Tragkraft der Nietstelle verhält, so hat man aus der Gleichung:

$$\frac{nd^2\pi}{2} = (l - nd)\,\delta = (l - nd)\,\frac{d}{2}: \quad nd\pi = l - nd$$

und hieraus $l = nd\,(\pi + 1)$, daher der volle Blechquerschnitt $l\delta = \frac{ld}{2} = \frac{nd^2}{2}\,(\pi + 1)$, die Tragkraft dieses Querschnittes

ist $P = \frac{n d^2}{2} (\pi + 1) \mathfrak{S}$, die Tragkraft P_1 der Nietstelle ist $P_1 = \frac{n \pi d^2 \mathfrak{S}}{2}$, daher die Proportion:

$$P : P_1 = \frac{n d^2}{2} (\pi + 1) \mathfrak{S} : \frac{\pi n d^2 \mathfrak{S}}{2} = \pi + 1 : \pi, \text{ oder}$$

$$P : P_1 = 4{,}14 : 3{,}14 = 414 : 314 = 1 : 0{,}758 = 1000 : 758;$$

wie man sieht, beträgt die relative Verschwächung des Bleches durch die Nieten nur circa 24%. Zur Verminderung dieser relativen Verschwächung des Bleches kann man zweckmässig auch hier jedes der beiden stumpf aneinander stossenden Blechenden durch mehrere Nietreihen mit den Laschen verbinden.

Es heisse die Anzahl dieser Nietreihen, durch welche je ein Blechende mit den Laschen verbunden ist, i, so hat man die Tragkraft der Nietstelle $P_1 = \frac{n i \pi d^2 \mathfrak{S}}{2}$, die Tragkraft des vollen Bleches ist $P = l \delta \mathfrak{S} = l \frac{d}{2} \mathfrak{S}$, hierin für l den Werth gesetzt, der sich aus der Gleichung: $\frac{n i \pi d^2}{2} = \frac{d}{2} (l - n d)$ ergibt,

$n i \pi d = l - n d$ und $l = n d (i \pi + 1)$, so ist: $P = \frac{n d^2}{2} (i \pi + 1) \mathfrak{S}$

durch Vergleichung von P_1 und P_2 ergibt sich die Proportion:

$$P : P_1 = \frac{n d^2}{2} (i \pi + 1) \mathfrak{S} : \frac{n d^2 i \pi \mathfrak{S}}{2} = i \pi + 1 : i \pi. \text{ oder}$$

$$P : P_1 = 1 : \frac{i \pi}{i \pi + 1} = 1 : \frac{1}{1 + \frac{1}{i \pi}};$$

man ersieht aus dieser Proportion, dass sich der Werth des Bruches $\frac{1}{1 + \frac{1}{i \pi}}$ umsomehr der Einheit, also die Tragkraft der Nietstelle sich umsomehr der Tragkraft des vollen Bleches nähert, je grösser i wird; für $i =$ würde man z. B. erhalten $\frac{P}{P_1} = \frac{1}{0{,}905} = \frac{100}{90{,}5}$, es würde also die Tragkraft der Nietstelle nur um $9\frac{1}{2}$% kleiner, als die des vollen Bleches sein. Der Einfluss des Verhältnisses $\frac{d}{\delta}$

auf die Festigkeit der Nietung zeigt sich auch hier, wie bei der Ueberplattungsnietung, wie folgt: Ist jedes Blechende nur durch eine Nietreihe mit den Laschen verbunden, so hat man:

$$\frac{\pi d^2 n}{2} = n \delta (x - d), \text{ hieraus ist}$$

$$\frac{\pi d^2}{2} = (x - d) \delta = x \delta - \delta d,$$

beiderseits durch δ^2 dividirt und $\frac{x}{\delta}$ bestimmt:

$$\frac{x}{\delta} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{d}{\delta}\right)^2 + \frac{d}{\delta}, \text{ ferner ist hieraus}$$

$$\frac{x}{\delta} - \frac{d}{\delta} = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{d}{\delta}\right)^2, \text{ oder}$$

$$\frac{x - d}{x} = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{d^2}{\delta}}{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{d^2}{\delta} + d} = \frac{1}{1 + \frac{2\delta}{\pi d}};$$

man ersieht aus dieser Gleichung und der Gleichung für $\frac{x}{\delta}$, dass, je kleiner das Verhältniss $\frac{d}{\delta}$ genommen wird, desto kleiner das Verhältniss $\frac{x}{\delta}$, also desto dichter die Fuge wird; je grösser $\frac{d}{\delta}$ genommen wird, desto mehr nähert sich der Bruch $\frac{x - d}{x}$ der Einheit, d. h. desto kleiner wird die relative Verschwächung des Bleches durch die Nieten; die Vergrösserung des Verhältnisses $\frac{d}{\delta}$ kann auch hier nur bis zu der im vorigen Beispiele erwähnten Grenze $\frac{d}{\delta} = 2{,}5$ genommen werden.

Für die mehrfache zweiseitige Laschennietung hat man:

$$\frac{i \pi d^2 n}{2} = \left[n (x - d) + \frac{x}{2}\right] \delta = (l - n d) \delta, \text{ oder}$$

$$\frac{i \pi d^2 n}{2} = \delta n (x - d) + \frac{x \delta}{2} = \delta n x - d \delta n + \frac{x \delta}{2}, \text{ oder}$$

$$\frac{i \pi d^2 n}{2} = x \delta \left(n + \frac{1}{2}\right) - d \delta n,$$

beiderseits durch δ^2 dividirt, gibt:

$$\frac{i\pi n}{2}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2 = \frac{x}{\delta}\left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{dn}{\delta},\ \text{hieraus ist:}$$

$$\frac{x}{\delta} = \frac{\frac{i\pi n}{2}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2 + \frac{dn}{\delta}}{n+\frac{1}{2}} = \frac{i\pi n}{2n+1}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2 + \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{d}{\delta};$$

um diesen Ausdruck zu vereinfachen, können wir, ohne einen wesentlichen Fehler zu begehen, mit einer für die Praxis genügend genauen Annäherung statt $2n+1$ nur $2n$ schreiben, und erhalten dadurch:

$$\frac{x}{\delta} = \frac{i\pi}{2}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2 + \frac{d}{\delta},\ \text{hieraus ist:}\ x - d = \frac{i\pi}{2}\cdot\frac{d^2}{\delta},$$

diese Gleichung durch den Werth von $x = \frac{i\pi}{2}\cdot\frac{d^2}{\delta} + d$ dividirt, gibt:

$$\frac{x-d}{x} = \frac{\frac{i\pi}{2}\cdot\frac{d^2}{\delta}}{\frac{i\pi d^2}{2\delta} + d} = \frac{1}{1+\frac{2\delta}{i\pi d}};$$

auch aus dieser Gleichung und der Gleichung für $\frac{x}{\delta}$ ist bezüglich des Verhältnisses $\frac{d}{\delta}$ dasselbe ersichtlich, was bereits bei der einfachen zweiseitigen Laschennietung gesagt wurde.

Berechnung der Werthe d, x, n, y.

Der Durchmesser d des Nietbolzens berechnet sich bei der mehrfachen, zweiseitigen Laschennietung aus der Gleichung:

$$\frac{d^2\pi n i \mathfrak{S}}{2} = P,\ \text{woraus}\ d = \sqrt{\frac{2P}{\pi n i \mathfrak{S}}}$$

ist. Die Entfernung x zweier Nietenmittel einer Nietreihe berechnet sich aus: $\frac{d^2\pi n i}{2} = \left[n(x-d) + \frac{x}{2}\right]\delta$, wir setzen $\delta = \frac{d}{2}$ und dividiren beiderseits durch $\frac{d}{2}$, man erhält dadurch:

$$d\pi n i = nx - nd + \frac{x}{2},\ \text{woraus}$$

$$x\left(n+\frac{1}{2}\right)=nd(\pi i+1) \text{ und } x=\frac{nd(\pi i+1)}{n+\frac{1}{2}}, \text{ oder}$$

$$x=\frac{2nd(\pi i+1)}{2n+1}$$

folgt; setzen wir für d obigen Werth ein, so hat man auch:

$$x=\frac{2n(\pi i+1)}{2n+1}\cdot\sqrt{\frac{2P}{\pi i n \mathfrak{S}}}.$$

Die Nietenanzahl n einer Nietreihe bestimmt sich aus:

$$(l-nd)\,\delta=\left[n(x-d)+\frac{x}{2}\right]\delta; \text{ hieraus ist}$$

$$l-nd=nx-nd+\frac{x}{2} \text{ und } n=\frac{l-\frac{x}{2}}{x}=\frac{2l-x}{2x},$$

hierin für x den gefundenen Werth gesetzt, gibt:

$$n=\frac{2l}{2x}-\frac{x}{2x}=\frac{l}{x}-\frac{1}{2}, \text{ oder}$$

$$n+\frac{1}{2}=\frac{l}{\frac{2n(\pi i+1)}{2n+1}\sqrt{\frac{2P}{\pi i n \mathfrak{S}}}}=\frac{l(2n+1)}{2n(\pi i+1)}\sqrt{\frac{\pi i n \mathfrak{S}}{2P}}, \text{ oder}$$

$$\frac{2n+1}{2}=\frac{l(2n+1)}{2n(\pi i+1)}\sqrt{\frac{\pi i n \mathfrak{S}}{2P}},$$

beiderseits durch $\frac{2n+1}{2}$ dividirt, gibt:

$$1=\frac{l}{n(\pi i+1)}\sqrt{\frac{\pi i n \mathfrak{S}}{2P}}, \text{ oder}$$

$$n(\pi i+1)=l\sqrt{\frac{\pi i n \mathfrak{S}}{2P}}, \text{ beiderseits quadrirt:}$$

$$n^2(\pi i+1)^2=l^2\cdot\frac{\pi i n \mathfrak{S}}{2P}, \text{ hieraus ist}$$

$$n=\frac{l^2\pi i\mathfrak{S}}{2P(\pi i+1)^2};$$

setzt man diesen Werth von n in die Gleichung für d ein, so hat man:

$$d = \sqrt{\frac{2P}{\pi i \mathfrak{S} \cdot \frac{l^2 \pi i \mathfrak{S}}{2P(\pi i + 1)^2}}}, \text{ oder}$$

$$d = \sqrt{\frac{4P^2(\pi i + 1)^2}{(\pi i \mathfrak{S})^2 l^2}} = \frac{2P(\pi i + 1)}{l \mathfrak{S} \pi i}.$$

Der Werth von y berechnet sich bei der einfachen, wie mehrfachen, zweiseitigen Laschennietung aus der empirischen Formel $y\delta = \frac{\pi d^2}{4}$ mit $y = \frac{\pi d^2}{4\delta} = \frac{\pi d}{4} \cdot \left(\frac{d}{\delta}\right)$, oder, da aus der Gleichung $\frac{n\pi d^2}{2} = n(x - d)\delta$ folgt: $\frac{\pi d^2}{4\delta} = \frac{x - d}{2}$, so hat man auch $y = \frac{x - d}{2}$, oder wenn man das Verhältniss $\frac{y}{\delta}$ ausdrücken will, so ergibt sich aus der Gleichung $y = \frac{\pi d^2}{4\delta}$, wenn man beiderseits durch δ dividirt, $\frac{y}{\delta} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2$. Es sei z. B. $P = 20000^{Kg}$, $l = 1000^{mm}$, $i = 2$, so erhält man $d = \frac{2 \cdot 20000(2 \cdot 3{,}14 + 1)}{1000 \cdot 5 \cdot 3{,}14 \cdot 2} = \frac{14{,}56}{1{,}57} = 9{,}27$, abgerundet $d = 10^{mm}$. Die Nietenanzahl n wird

$$n = \frac{l^2 \pi i \mathfrak{S}}{2P(\pi i + 1)^2} = \frac{(1000)^2 \cdot 3{,}14 \cdot 2 \cdot 5}{2 \cdot 20000(3{,}14 \cdot 2 + 1)^2} = \frac{785}{52{,}2784} = 14{,}811$$

und rund $n = 15$. Die Entfernung x ergibt sich mit

$$x = \frac{2nd(\pi i + 1)}{2n + 1} = \frac{2 \cdot 15 \cdot 9{,}27\,(6{,}28 + 1)}{2 \cdot 15 + 1},$$

$\underline{x = 65^{mm}}$; der Werth von x lässt sich übrigens auch direct aus den gegebenen Werthen finden, wenn man in die Gleichung

$$x = \frac{2n(\pi i + 1)}{2n + 1}\sqrt{\frac{2P}{\pi i n \mathfrak{S}}}$$

den Werth für $n = \frac{l^2 \pi i \mathfrak{S}}{2P(\pi i + 1)^2}$ einsetzt; man vermeidet hierbei, einen ausgerechneten, mit einem etwaigen kleinen Fehler (durch Vernachlässigung oder Abrundung von Decimalstellen) behafteten Werth in die Gleichung für x einzuführen. Diese Substitution durchgeführt, gibt:

$$x = \frac{\dfrac{2\,l^2 \pi i \mathfrak{S}(\pi i + 1)}{2\,P(\pi i + 1)^2}}{\dfrac{2\,l^2 \pi i \mathfrak{S}}{2\,P(\pi i + 1)^2} + 1} \sqrt{\frac{2\,P}{\pi i \mathfrak{S} \,.\, \dfrac{l^2 \pi i \mathfrak{S}}{2\,P(\pi i + 1)^2}}}, \text{ oder}$$

$$x = \frac{l^2 \pi i \mathfrak{S} \,.\, P(\pi i + 1)^2}{P(\pi i + 1)\,[l^2 \pi i \mathfrak{S} + P(\pi i + 1)^2]} \cdot \frac{2\,P(\pi i + 1)}{\pi i \mathfrak{S} l}, \text{ oder}$$

$$x = \frac{2\,Pl\,(\pi i + 1)^2}{l^2 \pi i \mathfrak{S} + P(\pi i + 1)^2} =$$

$$= \frac{2 \,.\, 20000 \,.\, 1000\,(3{,}14 \,.\, 2 + 1)^2}{(1000)^2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 2 \,.\, 5 + 20000\,(3{,}14 \,.\, 2 + 1)^2} = 65{,}3.$$

Vergleichen wir ferner bei der mehrfachen zweiseitigen Laschennietung die Tragkraft P des vollen Bleches mit der der Nietstelle, so hat man, da $P = l \delta \mathfrak{S}$ und $P_1 = \dfrac{\pi d^2 i n \mathfrak{S}}{2}$ ist, die Proportion: $P : P_1 = l \delta \mathfrak{S} : \dfrac{\pi d^2 i n \mathfrak{S}}{2}$; setzen wir $\delta = \dfrac{d}{2}$ und für l den Werth, der sich aus der Gleichung: $\dfrac{i \pi d^2 n}{2} = (l - nd)\delta = (l - nd)\dfrac{d}{2}$, oder $i \pi d n = l - nd$ mit $l = nd\,(i\pi + 1)$ ergibt, so erhält man:

$$P : P_1 = \frac{nd^2}{2}(i\pi + 1) : \frac{n i \pi d^2}{2}, \text{ oder}$$

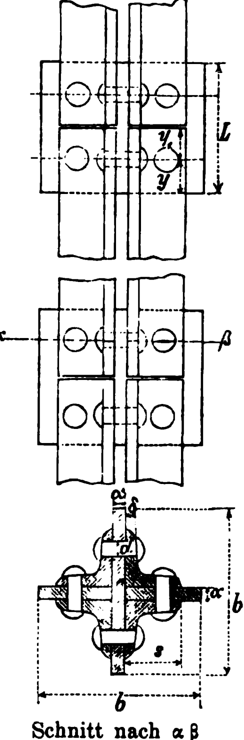
$$P : P_1 = (i\pi + 1) : i\pi = 1 : \frac{i\pi}{i\pi + 1}, \text{ oder}$$

$$P : P_1 = 1 : \frac{1}{1 + \dfrac{1}{i\pi}};$$

man ersieht aus dem vierten Gliede dieser Proportion, dass sich die Tragkraft der Nietstelle umsomehr der Tragkraft des vollen Bleches nähert, je grösser i wird; für $i = 3$ z. B. erhält man $P : P_1 = 1 : 0{,}904$. Was nun die Stärke δ_1 der Laschen betrifft, so haben beide Laschen zusammengenommen denselben Zug P auszuhalten, wie die Bleche und würde es daher genügen, denselben eine Stärke $\delta_1 = \dfrac{\delta}{2}$ zu geben; der Sicherheit wegen nimmt man gewöhnlich $\delta_1 = 0{,}6\,\delta$. Endlich sei noch bemerkt, dass die ein- oder mehrfache einseitige Laschennietung (zwei stumpf an einander stossende Bleche durch ein auf einer Seite darübergelegtes und mit beiden Blechenden vernietetes Blechband (Lasche) verbunden) ebenso zu be-

rechnen ist, wie die ein- oder mehrfache Ueberplattungsvernietung, auch mit denselben Nachtheilen verbunden ist, wie diese.

57. Eine Stange, die aus vier Winkeleisen zusammengesetzt, resp. vernietet ist, wird durch eine Kraft $P = 15072^{Kg}$ auf Zug beansprucht. Die vier Winkeleisen eines Stosses sind mit den vier Winkeleisen des nächstfolgenden Stosses durch kreuzförmig gestellte kurze schmiedeiserne Platten vernietet (siehe beistehende Figur). Es sind die Querschnittsdimensionen dieser Stange an einer Verbindungsstelle zu berechnen.



Schnitt nach α β

Fig. 87.

Auflösung. Die schwächste Stelle der Winkeleisen und der Verbindungsplatten ist offenbar da, wo die Nietbolzen durchgehen, deshalb machen wir für die Nietstelle die Berechnung. Diese Nietverbindung kann zum Bruche gelangen, entweder durch Abscheeren der Nietbolzen, oder durch Zerreissen der Winkeleisen, oder der Verbindungsplatten an der Stelle, wo die Nietbolzen durchgehen.

Ein jeder Nietbolzen widersteht hier dem Abscheeren mit der Querschnittsfläche $2 \cdot \frac{\pi d^2}{4}$ (die Verbindung ist zweischnittig), daher die abzuscheerende Fläche

$$F = \frac{8 \pi d^2}{4} = \frac{P}{\mathfrak{S}} = \frac{15072}{6} = 2512^{mm^2};$$

wir setzen hier die Scheerspannung $\mathfrak{S} = 6$, weil die Reibung, die in Folge des Zusammenziehens der Nieten bei der Erkaltung nach dem Einbringen zwischen den Blechen entsteht, eine Kraft darstellt, die auch der Zugkraft P entgegengesetzt wirkt, welche Reibung wir aber nicht in Rechnung gezogen haben, daher die zulässige Scheerspannung gleich der zulässigen Zugspannung setzen. Es ergibt sich daher der Durchmesser d eines Nietbolzens mit

$$d = \sqrt{\frac{P}{2 \pi \mathfrak{S}}} = \sqrt{\frac{15072}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6}} = 20^{mm}.$$

Berechnung der Schenkellänge s und der Stärke δ eines Winkeleisens.

Es heisse die Querschnittsfläche eines Winkeleisens f_1, so muss offenbar für die Nietstelle $f_1 - 2 d \delta = \frac{F}{4} = \frac{2512}{4} = 628$ sein,

und da die Querschnittsfläche eines Winkeleisens $f_1 = 2s\delta - \delta^2$ ist, so hat man auch: $2s\delta - \delta^2 = 628 + 2d\delta$.

Zwischen der Schenkellänge s und der Schenkeldicke δ wird im Maschinenbau allgemein die Beziehung angenommen, $s^{mm} = 6\delta + 10^{mm}$, diese Beziehung eingeführt:

$$2\delta(6\delta + 10) - \delta^2 = 628 + 2d\delta, \text{ oder mit } d = 20,$$

$$20\delta + 12\delta^2 - \delta^2 - 40\delta = 628, \text{ oder: } 11\delta^2 - 20\delta = 628,$$

oder beiderseits durch 11 dividirt: $\delta^2 - \frac{20\delta}{11} = \frac{628}{11}$, diese quadratische Gleichung aufgelöst, gibt:

$$\delta = \frac{10}{11} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{11}\right)^2 + \frac{628}{11}} = \frac{10}{11} \pm \sqrt{\frac{7008}{121}}, \text{ oder } \delta = \frac{10 \pm \sqrt{7008}}{11};$$

da man hier offenbar nur das positive Vorzeichen des Wurzelausdruckes gebrauchen kann (da beim negativen Vorzeichen δ negativ würde, was keinen Sinn hätte), so hat man

$$\delta = \frac{10 + 83{,}7138}{11} = 8.52$$

und abgerundet $\delta = 9^{mm}$. Die Schenkellänge s wird daher:

$$s = 10 + 6 \,.\, 8{,}52 = 61{,}12$$

und abgerundet $s = 62^{mm}$.

Berechnung der Querschnittsdimensionen der Verbindungsplatten.

Es heisse der Gesammtquerschnitt der Verbindungsplatten f_2, so muss, wenn α die Plattendicke bezeichnet, $f_2 - 4d\alpha = F = 2512$, oder $2b\alpha - \alpha^2 - 4 \,.\, 20\alpha = 2512$ sein, wobei b die Breite der Platten bedeutet. Nehmen wir $\alpha = 10^{mm}$ an, so ist $20b - 100 - - 800 = 2512$, woraus

$$b = \frac{2512 + 900}{20} = \frac{3412}{20} = 170{,}6$$

und abgerundet $b = 171^{mm}$ folgt.

Die Entfernung y_1 eines Nietenmittels vom Rande des Winkeleisens in der Richtung der Länge des Winkeleisens gemessen, erhält man aus der Gleichung: $y_1 \delta = \frac{\pi d^2}{4}$ mit $y_1 = \frac{\pi d^2}{4\delta}$, oder

$$y_1 = \frac{3{,}14\,(20)^2}{4 \,.\, 9} = 34{,}9 \text{ und abgerundet } y_1 = 35^{mm}.$$

Die Entfernung y eines Nietenmittels vom Rande der Verbindungsplatten, gemessen in der Richtung der Länge der Winkeleisen, ergibt sich aus der Gleichung $y\alpha = \frac{\pi d^2}{4}$ mit $y = \frac{\pi d^2}{4\alpha}$, oder

$$y = \frac{3{,}14\,(20)^2}{4\,.\,10} = 31{,}416$$

und abgerundet $y = 32^{mm}$; die ganze Länge L der Platte ist somit $L = 2\,(y + y_1) = 2\,(32 + 35) = 134^{mm}$.

Anmerkung. Wie schon früher erwähnt, widerstehen bei den Nietverbindungen die Nietbolzen einer durch die Zugkraft P angestrebten Lösung der Verbindung nicht nur durch ihre Festigkeit gegen Abscheeren, sondern auch vermöge der Reibung, welche zwischen den Blechen in Folge einer im Bolzen vorhandenen Längenspannung hervorgerufen wird. Da nämlich ein Nietbolzen gewöhnlich rothglühend in das Loch eingebracht und in diesem Zustande der Schliesskopf der Niete gebildet wird, so entsteht durch die nach der Herstellung des Schliesskopfes eintretende Erkaltung des Bolzens eine Zusammenziehung desselben und in Folge dessen eine starke Pressung der Platten gegen einander; die hierdurch zwischen den letzteren erzeugte Reibung kann unter Umständen so gross werden, dass sie allein der Zugkraft P das Gleichgewicht hält und der Nietbolzen gar nicht auf Abscheerung beansprucht wird. So haben Versuche ergeben, dass der Reibungswiderstand beider einem Nietbolzen angehörigen Reibungsflächen pro Quadrat-Millimeter Nietbolzenquerschnitt zwischen 10 und 14^{Kg} betrage; da nun der Reibungscoëfficient auf höchstens ein Drittel geschätzt werden kann, so ergibt sich die in dem Nietbolzen in Folge seines Erkaltens eintretende Längenspannung mit $\mathfrak{S} = \frac{10}{2\,.\,\frac{1}{3}} = 15^{Kg}$ bis $\mathfrak{S} = \frac{14}{2\,.\,\frac{1}{3}} = 21^{Kg}$, also eine Spannung, bei welcher schon an und für sich ohne Hinzutritt der Scheerspannung die Elasticitätsgrenze erreicht, resp. überschritten ist. Da aber auf diese durch die Erkaltung des Bolzens hervorgerufene Längenspannung niemals mit voller Sicherheit zu rechnen ist, indem die Zusammenziehung des Bolzens von zu vielen, der Berechnung sich entziehenden Nebenumständen abhängig ist (wie die Temperatur, bei der das Stauchen des Schliesskopfes aufhört, die Temperatur, welche das Blech während des Nietens angenommen hat, die Geschicklichkeit der Arbeiter u. s. w.), so pflegt man von dieser Reibung bei der Berechnung von Nietverbindungen abzusehen und sie nur als eine besondere Sicherheit zu betrachten.

Anwendungsbeispiele aus der Lehre von der Biegungsfestigkeit.

1. Ein Balken aus Fichtenholz ist in horizontaler Lage an einem Ende eingemauert und am anderen Ende frei. Die Länge des frei vorstehenden Endes beträgt 4^m; der Balken hat einen rechteckigen Querschnitt von 200^{mm} Höhe und 150^{mm} Breite. Wie gross ist die Tragkraft des Balkens bei Berücksichtigung des Eigengewichtes, *a*) wenn die Last am Ende des Balkens vertical nach abwärts wirkt, *b*) wenn die Last über der ganzen freien Länge des Balkens gleichmässig vertheilt ist.

Auflösung. *ad a)* Das Eigengewicht G des Balkens ist gleich dem Volumen desselben, multiplicirt mit dem Gewichte γ einer Volumeinheit des Balkens. Das Volumen ist $V = 4 \,.\, 0{,}2 \,.\, 0{,}15 = 0{,}12^{m^3}$; das Gewicht einer Volumeinheit ist: $\gamma = 1000 \,.\, 0{,}47 = 470^{Kg}$ = Gewicht eines Kubikmeters Fichtenholzes; hierbei wurde die Dichte desselben mit 0,47 angenommen; daher $G = V\gamma = 0{,}12 \,.\, 470 = 56{,}4^{Kg}$. Die hier anzuwendende Festigkeitsformel ist: $\left(P_1 + \frac{1}{2} G\right) l = \frac{\mathfrak{S} J}{c}$, wobei l die Länge des Balkens, P_1 die Tragkraft am Ende, $\mathfrak{S}$ die einzusetzende, zulässige Spannung und der Quotient $\frac{J}{c}$ den Querschnittsmodul bedeuten. Dieser letztere ist

$$\frac{J}{c} = \frac{1}{6} b h^2 = \frac{1}{6} \,.\, 150\,(200)^2 = 1000000;$$

die Spannung $\mathfrak{S}$ nehmen wir $\mathfrak{S} = 0{,}75$, da der Bruchmodul für Zug 9 und der Bruchmodul für Druck 5 ist; wir erhalten daher $\frac{\mathfrak{S} J}{c} = 0{,}75 \,.\, 1000000 = 750000 = \left(P_1 + \frac{1}{2} G\right) l$, diese Gleichung nach P_1 aufgelöst, gibt: $P_1 = \frac{750000}{l} - \frac{G}{2}$, oder die Zahlenwerthe eingesetzt, gibt:

$$P_1 = \frac{750000}{4000} - \frac{56{,}4}{2} = 187{,}5 - 28{,}2 = 159{,}3^{Kg}.$$

ad b) Die hier anzuwendende Festigkeitsformel ist:

$$\left(P_2 + G\right)\frac{l}{2} = \frac{\mathfrak{S}J}{c};$$

hierin bedeutet P_2 die auf der ganzen Länge des Balkens gleichmässig vertheilte Last, die noch um das Eigengewicht des Balkens, welches ebenfalls als eine über der ganzen Länge gleichförmig vertheilte Last anzusehen ist, vermehrt wird. Die letzte Gleichung nach P_2 aufgelöst, gibt:

$$P_2 = \frac{2\,\mathfrak{S}J}{c\,l} - G = \frac{2 \,.\, 750000}{4000} - 56{,}4 = 318{,}6^{Kg};$$

übrigens ist es bekannt, dass die Tragkraft des Balkens doppelt so gross ist, wenn die Last gleichförmig über der ganzen Länge vertheilt ist, als wenn die Last am Ende des Balkens wirkt, und hätten wir daher das letzte Resultat $P_2 = 318{,}6$ auch sofort erhalten, wenn wir das zuerst gefundene $P_1 = 159{,}3$ mit 2 multiplicirt hätten.

2. Ein prismatischer Balken aus Eichenholz von rechteckigem Querschnitte mit 150^{mm} Breite ist in horizontaler Lage an einem Ende eingemauert. Der Balken hat eine freie Länge von $l = 2^m$ und sei mit $P = 250^{Kg}$ belastet. Welche Höhe h muss der Balken erhalten, *a*) wenn die Last am äussersten Ende vertical nach abwärts wirkt, *b*) wenn die Last gleichmässig über der ganzen Länge des Balkens vertheilt ist, *c*) wenn in den Fällen *a*) und *b*) das Eigengewicht des Balkens berücksichtigt wird.

Auflösung. *ad a)* Die hier zur Querschnittsbestimmung anzuwendende Festigkeitsformel ist: $Pl = \frac{\mathfrak{S}J}{c}$; da der Querschnitt rechteckig ist, so hat man $\frac{\mathfrak{S}J}{c} = \frac{1}{6}\,bh^2\mathfrak{S}$, als zulässige Spannung nehmen wir $\mathfrak{S} = 0{,}8$, daher $\frac{\mathfrak{S}J}{c} = \frac{1}{6}\,bh^2 \,.\, 0{,}8$, man erhält somit $Pl = \frac{0{,}8\,bh^2}{6}$, woraus folgt:

$$h = \sqrt{\frac{6\,Pl}{0{,}8\,b}} = \sqrt{\frac{6 \,.\, 250 \,.\, 2000}{0{,}8 \,.\, 150}} = 158^{mm}.$$

ad b) Wenn die Last gleichmässig über der ganzen Länge des Balkens vertheilt ist, so ist die Festigkeitsformel anzuwenden:

$$\frac{1}{2}\,Gl = \frac{1}{2}\,Pl = \frac{\mathfrak{S}J}{c} = \frac{0{,}8\,bh^2}{6}, \text{ woraus}$$

$$h = \sqrt{\frac{6\,Pl}{2 \,.\, 0{,}8 \,.\, b}} = \sqrt{\frac{6 \,.\, 250 \,.\, 2000}{2 \,.\, 0{,}8 \,.\, 150}} = 112^{mm} \text{ ist.}$$

ad c) Dieser Fall zerfällt in zwei Unterabtheilungen. c_1) Die Last P ist am Ende des Balkens wirksam und das Eigengewicht G des Balkens ist zu berücksichtigen, c_2) die Last ist über der ganzen Länge gleichmässig vertheilt und das Eigengewicht G ist zu berücksichtigen.

ad c_1) Hier ist die Formel anzuwenden:

$$\left(P + \frac{1}{2} G\right) l = \frac{\mathfrak{S} J}{c} = \frac{1}{6} b h^2 \mathfrak{S},$$

das Gewicht des Balkens ist $G = l b h \gamma$, wobei γ das Gewicht einer Volumeinheit Eichenholz bedeutet; die Dichte des Eichenholzes zu 0,7 angenommen, so beträgt das Gewicht von 1^{m^3} Eichenholz $\gamma = 0{,}7 \,.\, 1000 = 700^{Kg}$. Den Werth von G in obige Festigkeitsformel eingesetzt, gibt:

$$\left(P + \frac{1}{2} l b h \gamma\right) l = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{6}, \text{ oder}$$

$$6 P l + 3 l^2 b h \gamma = \mathfrak{S} b h^2, \text{ oder } h^2 - \frac{3 l^2 h \gamma}{\mathfrak{S}} = \frac{6 P l}{\mathfrak{S} b};$$

diese quadratische Gleichung nach h aufgelöst, gibt:

$$h = \frac{3 l^2 \gamma}{2 \mathfrak{S}} \pm \sqrt{\frac{9 l^4 \gamma^2}{4 \mathfrak{S}^2} + \frac{6 P l}{\mathfrak{S} b}},$$

oder die Zahlenwerthe eingesetzt, erhält man:

$$h^m = \frac{3 \,.\, 2^2 \,.\, 700}{2 \,.\, 800000} \pm \sqrt{\frac{9 \,.\, 2^4 (700)^2}{4 (800000)^2} + \frac{6 \,.\, 250 \,.\, 2}{800000 \,.\, 0{,}15}} \text{ oder}$$

$h^m = 0{,}00525 \pm 0{,}1582$; da man hier offenbar nur das positive Vorzeichen des Wurzelausdruckes gebrauchen kann (da sonst h negativ herauskäme, was keinen Sinn hat), so hat man

$$h^m = 0{,}00525 + 0{,}1582 = 0{,}16345 \text{ oder } h = 163{,}45^{mm}.$$

Will man diese etwas umständliche Rechnung umgehen, so kann man folgendes Annäherungsverfahren einschlagen: Man berechne zuerst die gesuchte Dimension h ohne Berücksichtigung des Eigengewichtes aus der Formel $Pl = \frac{\mathfrak{S} J}{c}$, was bereits oben bei Fall *a)* geschehen ist, dort fanden wir $h = 158^{mm}$, hierauf bestimme man das Gewicht G des Balkens

$$G = l b h \gamma = 2 \,.\, 0{,}15 \,.\, 0{,}158 \,.\, 700 = 33{,}18^{Kg}.$$

Dieses Balkengewicht ist etwas zu klein, da die Dimension h wegen Nichtberücksichtigung des Eigengewichtes zu klein in die Gewichts-

formel eingesetzt wurde. Setzt man nun diesen angenäherten Werth von G in die Festigkeitsformel, welche das Eigengewicht des Balkens berücksichtigt, ein, so ist $\left(P + \frac{1}{2} \cdot 33{,}18\right) l = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{6}$, woraus $6 Pl + 3 \cdot 33{,}18 \, l = \mathfrak{S} b h^2$ und

$$h = \sqrt{\frac{6 Pl + 99{,}54 \, l}{\mathfrak{S} b}} = \sqrt{\frac{2000 \, (6 \cdot 250 + 99{,}54)}{0{,}8 \cdot 150}}$$

$h = 163{,}2^{mm}$ sich ergibt; wir sehen somit, dass wir auch durch dieses Verfahren nahezu denselben Werth von h erhalten haben, wie nach der ersten Methode. Will man mit dem Annäherungsverfahren noch genauere Resultate erzielen, so bestimmt man mit dem zum zweiten Male gefundenen Werthe von h noch einmal das Gewicht G des Balkens und setzt dieses in die Festigkeitsformel, welche das Eigengewicht berücksichtigt, ein und berechnet noch einmal die Dimension h; auf diese Weise kann man durch wiederholte Rechnung einen beliebigen Grad von Genauigkeit im Resultate erzielen.

ad c_2) Die auf der ganzen Länge des Balkens gleichmässig vertheilte Last heisse P, man hat dann zur Querschnittsbestimmung die Formel: $(P + G) \frac{l}{2} = \frac{\mathfrak{S} J}{c} = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{6}$; in dieser Gleichung ist G unbekannt, man. kann daher entweder, wie im Falle c_1 für G den Werth $G = l b h \gamma$ einführen und die dadurch entstehende quadratische Gleichung nach h auflösen, oder das angegebene Annäherungsverfahren einschlagen; wählen wir das letztere, so hat man aus der Formel, welche das Eigengewicht nicht berücksichtigt, $\frac{Pl}{2} = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{6}$ den vorläufigen Werth von

$$h = \sqrt{\frac{6 Pl}{2 \mathfrak{S} b}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 250 \cdot 2000}{2 \cdot 0{,}8 \cdot 150}} = 112^{mm};$$

das angenäherte Gewicht ist nun

$$G = l b h \gamma = 2 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}112 \cdot 700 = 23{,}52^{Kg};$$

setzt man nun diesen Werth von G in die genaue Formel

$$(P + G) \frac{l}{2} = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{6}$$

ein, sowie auch die übrigen Zahlenwerthe und bestimmt h, so ist:

$$h = \sqrt{\frac{3 l (P + G)}{\mathfrak{S} b}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 2000 \, (250 + 23{,}52)}{0{,}8 \cdot 150}} = 116^{mm},$$

womit der angenäherte Werth von h bestimmt ist. Rechnen wir

noch den genauen Werth von h aus, um zu sehen, wie viel bei dem Annäherungsverfahren gefehlt ist, so hat man aus der Gleichung:

$$(P + G)\frac{l}{2} = \frac{\mathfrak{S}bh^2}{6},$$

wenn man darin $G = lbh\gamma$ setzt,

$$(P + lbh\gamma)\frac{l}{2} = \frac{\mathfrak{S}bh^2}{6} \text{ oder:}$$

$$3Pl + 3l^2bh\gamma = \mathfrak{S}bh^2, \text{ oder}$$

$$h^2 - \frac{3l^2h\gamma}{\mathfrak{S}} = \frac{3Pl}{\mathfrak{S}b}, \text{ woraus}$$

$$h = \frac{3l^2\gamma}{2\mathfrak{S}} \pm \sqrt{\left(\frac{3l^2\gamma}{2\mathfrak{S}}\right)^2 + \frac{3Pl}{\mathfrak{S}b}}$$

folgt; die Zahlenwerthe eingesetzt, gibt:

$$h = \frac{3 \,.\, 2^2 \,.\, 700}{2 \,.\, 800000} \pm \sqrt{\left(\frac{3 \,.\, 4 \,.\, 700}{2 \,.\, 800000}\right)^2 + \frac{3 \,.\, 250 \,.\, 2}{800000 \,.\, 0{,}15}},$$

oder $h = 0{,}00525 \pm 0{,}1119$; da man nur das positive Vorzeichen des zweiten Gliedes gebrauchen kann, so ist

$$h = 0{,}00525 + 0{,}1119 = 0{,}11715^m \text{ oder } h = 117{,}15^{mm}.$$

3. Vier Balken aus Eichenholz sind mit je einem Ende in horizontaler Lage eingemauert und bilden die Unterlage zu einem Balkon. Den Boden des letzteren bilden Granitplatten von 125^{mm} Dicke. Die freie Länge der Balken sei 2^m, die Entfernung vom ersten bis zum letzten, d. h. die Länge des Balkons sei 3^m. Es sind die Abmessungen des rechteckigen Querschnittes eines Balkens zu bestimmen, wenn die Breite b sich zur Höhe h wie 1 zu 3 verhalten und der Balken genügende Stärke besitzen soll, um an seinem äussersten Ende eine zufällige Belastung von $P = 350^{Kg}$ zu tragen. Die Granitplatten bilden eine über die ganze Länge sämmtlicher Balken gleichmässig vertheilte Last, von deren Gewicht auf einen Balken der vierte Theil entfällt.

Auflösung. Die zur Querschnittsbestimmung hier anzuwendende Festigkeitsformel ist:

$$\left(P + \frac{1}{2}G\right)l = \frac{\mathfrak{S}J}{c} = \frac{\mathfrak{S}bh^2}{6},$$

da $b = \frac{h}{3}$ ist, so hat man:

$$\left(P+\frac{1}{2}G\right)l=\frac{\mathfrak{S}h^3}{18}, \text{ woraus } h=\sqrt[3]{\frac{18\left(P+\frac{1}{2}G\right)l}{\mathfrak{S}}}$$

ist, die gleichförmig vertheilte Last G ist

$$G=\frac{3\,.\,2\,.\,0{,}125\,.\,1000\,.\,2{,}7}{4}$$

(wobei die Dichte des Granits mit 2,7 angenommen ist), oder

$$G=\frac{2025}{4}=506{,}25^{Kg};$$

diese Last hat jeder der vier Balken gleichmässig über der ganzen Länge vertheilt, zu tragen; diesen Werth von G, sowie die übrigen Zahlenwerthe in die Gleichung für h eingesetzt, gibt:

$$h=\sqrt[3]{\frac{18\left(350+\frac{1}{2}\,.\,506{,}25\right)2000}{0{,}8}}=310^{mm},$$

$$b=\frac{h}{3}=\frac{310}{3}=103\,{}^1/_3{}^{mm}.$$

Die grösste Einsenkung s, welche die Balken erleiden, ist

$$s=\frac{l^3}{EJ}\left(\frac{P}{3}+\frac{G}{8}\right),$$

wobei E den Elasticitätsmodul des Eichenholzes $E=1200$ bedeutet. Die Zahlenwerthe eingesetzt, gibt:

$$s=\frac{(2000)^3}{1200\,.\,\frac{103{,}3\,(310)^3}{12}}\left(\frac{350}{3}+\frac{506{,}25}{8}\right)=4{,}67^{mm},$$

eine Durchbiegung, welche den $\frac{2000}{4{,}67}=428$ten Theil der ganzen freien Länge des Balkens ausmacht, daher nur sehr gering ist und als zulässig erachtet werden kann.

Berechnung von Zapfen.

4. Ein einer Tragaxe angehöriger Stirnzapfen wird von einer Kraft P, welche in der Mitte der Zapfenlänge angreifend, vertical nach aufwärts wirkt, auf Biegung beansprucht; es ist der Durchmesser d und die Länge l des cylindrischen Zapfens zu berechnen.

Auflösung. Bei der Berechnung der Festigkeitsdimensionen d und l eines cylindrischen Tragzapfens hat man nicht nur auf die Festigkeit, sondern auch auf seine Abnützung in Folge der Reibung des Zapfens in seinem Lager die nöthige Rücksicht zu nehmen. Man hat daher dem Zapfen solche Dimensionen zu geben, dass er nicht nur fest genug sei, um der ihn auf Biegung beanspruchenden Kraft mit der genügenden Sicherheit zu widerstehen, sondern dass auch seine Abnützung eine möglichst geringe sei. Da ein Stirnzapfen einer Tragaxe einen an einem Ende eingemauerten Balken darstellt, welcher am anderen Ende frei und in der Mitte seiner Länge durch die Kraft P auf Biegung beansprucht ist, so lautet die zur Querschnittsbestimmung hier anzuwendende Festigkeitsformel:

$$M = \mathfrak{S}\, Z, \text{ oder } \frac{Pl}{2} = \frac{\mathfrak{S}\,\pi d^3}{32};$$

die Wurzel des Zapfens, d. i. die Stelle, wo der letztere in den Körper der Axe übergeht, stellt den Einmauerungspunkt dar.

Zwischen der Länge l und dem Durchmesser d nehmen wir ein Verhältniss an und setzen $\frac{l}{d} = \varphi$; diesen Quotienten nehmen wir vorläufig als eine bekannte Grösse an und ist über deren Annahme das Nähere weiter unten gesagt. Aus obiger Festigkeitsformel folgt:

$$\frac{P}{2} = \frac{\mathfrak{S}\,\pi d^2}{32} \cdot \frac{d}{l} = \frac{\mathfrak{S}\,\pi d^2}{32\,\varphi}, \text{ woraus}$$

$$d = \sqrt{\frac{16\, P \varphi}{\mathfrak{S}\,\pi}} = 2{,}26 \sqrt{\frac{P \varphi}{\mathfrak{S}}} \text{ folgt.}$$

Das Verhältniss $\frac{l}{d} = \varphi$ ist so zu wählen, dass die Abnützung des Zapfens in Folge der Reibung und der Effectverlust durch die letztere möglichst klein seien. Die Grösse der Reibung hängt ab von der Grösse des Zapfendruckes P und dem Reibungscoëfficienten zwischen Zapfen- und Lagerschalenmaterial; sind aber diese Materialien aus praktischen Rücksichten einmal festgestellt und der Zapfendruck durch die ganze Anordnung der Construction, der die Axe mit ihren Zapfen angehört, bestimmt, so ist die Grösse der Reibung dadurch auch bestimmt und kann nur durch Anwendung eines geeigneten Schmiermaterials vermindert werden. Um nun die Abnützung des Zapfens zu verkleinern, vergrössert man die Auflagefläche desselben und verringert dadurch den Druck auf die Flächeneinheit (Flächendruck); den Zapfendruck P betrachten wir hierbei als Resultante von mehreren parallelen Kräften, die gleichmässig auf der ganzen Zapfenlänge vertheilt, angreifen (siehe

nebenstehende Figur). Den Flächendruck p erhält man offenbar, wenn man den Zapfendruck P durch die Grösse der gedrückten Fläche F dividirt; diese letztere ist aber nichts anderes als die Projection der Mantelfläche des Zapfencylinders auf eine zur Druckrichtung senkrechte Ebene, daher $F = l d$ und $p = \frac{P}{l d}$. Aus dieser Gleichung folgt, dass der Flächendruck p dadurch verkleinert werden kann, dass man die Dimensionen l und d entsprechend vergrössert; hierbei ist jedoch der Umstand zu beachten, dass durch die Vergrösserung von d zugleich auch das Reibungsmoment vergrössert und hiermit der Effectverlust vermehrt wird; man soll daher den Zapfen nicht ohne Noth stärker machen, als es seine Festigkeit verlangt. Vergrössert man andererseits die Zapfenlänge l und lässt d unverändert, so wird in dem belasteten verlängerten Zapfen eine grössere Spannung eintreten, seine Festigkeit also geringer werden, weil der Hebelarm der Kraft P grösser wurde. Will man daher die Abnützung durch Vergrösserung der Auflagefläche des Zapfens vermindern, so muss man, wenn die Festigkeit des letzteren ungeändert bleiben soll, l und d entsprechend vergrössern, und den dadurch bedingten grösseren Effectverlust durch Vergrösserung des Reibungsmomentes mit in den Kauf nehmen, da die Rücksicht auf Festigkeit in erster Reihe massgebend ist; übrigens beträgt diese Vergrösserung des Effectverlustes durch Vermehrung von d, wie weiter unten durch Rechnung gezeigt wird, nur sehr wenig. Setzt man in der Formel für den Flächendruck $p = \frac{P}{l d}$, für P den Werth, der sich aus der Gleichung $\frac{P l}{2} = \frac{\mathfrak{S} \pi d^3}{32}$ mit $P = \frac{\mathfrak{S} \pi d^3}{16 l}$ ergibt, so ist

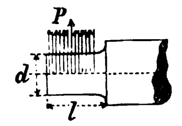


Fig. 38.

$$p = \frac{\mathfrak{S} \pi d^3}{16 l . l d} = \frac{\mathfrak{S} \pi}{16} \left(\frac{d}{l}\right)^2 = \frac{\mathfrak{S} \pi}{16} \left(\frac{1}{\varphi}\right)^2;$$

man ersieht aus dieser Gleichung, dass der Flächendruck p durch Verringerung der Spannung $\mathfrak{S}$ (erzielt durch Vergrösserung von d) und durch Vergrösserung des Verhältnisses φ verringert und dadurch die Abnützung herabgezogen wird.

Aus der letzten Gleichung für p folgt:

$$\frac{16 p}{\mathfrak{S} \pi} = \frac{1}{\varphi^2}, \text{ oder } \varphi^2 = \frac{\mathfrak{S} \pi}{16 p} \text{ und } \varphi = \sqrt{\frac{\mathfrak{S} \pi}{16 p}}, \text{ oder}$$

$$\varphi = 0{,}443 \sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{p}};$$

man ersieht hieraus, wovon das Verhältniss φ abhängig ist, die Spannung $\mathfrak{S}$ ist bedingt durch die Festigkeit des Zapfens; der

Flächendruck p hingegen oder andererseits der Werth von φ ist ein Erfahrungsresultat und kann nicht durch Rechnung bestimmt werden. So hat sich z. B. durch die Erfahrung herausgestellt, dass für einen schmiedeisernen Stirnzapfen, der in Metall- (Bronze-) Lagern läuft und pro Minute 100 oder weniger Umdrehungen macht, das günstigste Verhältniss zwischen Länge und Durchmesser $\varphi = 1{,}5$ ist; dem würde, wenn wir $\mathfrak{S} = 6$ annehmen, ein Flächendruck von $p = \frac{\mathfrak{S}\pi}{16\varphi^2} = \frac{6 \,.\, 3{,}14}{16\,(1{,}5)^2} = 0{,}5233^{Kg}$ entsprechen.

Da aber auch die Abnützung fortschreitet mit der Zunahme der minutlichen Tourenzahl, so kann man zur Berechnung von φ auch die von Reuleaux angegebene empirische Formel $\frac{l}{d} = 0{,}12\sqrt{u}$ für einen schmiedeisernen Zapfen, in Metallschalen laufend, anwenden, wobei u die minutliche Tourenzahl des Zapfens bedeutet. Für einen gusseisernen Stirnzapfen, in Metallschalen laufend, nehme man $\frac{l}{d} = \frac{4}{3}$, welchem Verhältnisse bei der Annahme von $\mathfrak{S} = 3$ ein Flächendruck von $p = 0{,}33^{Kg}$ entspricht. Für einen schmiedeisernen Zapfen, in Gusseisenschalen laufend, nehme man $\frac{l}{d} = 1{,}75$; für einen Gussstahlzapfen, in Metallschalen laufend, nehme man bei $u < 150$, $\frac{l}{d} = 1{,}78$, für $u > 150$, nehme man $\frac{l}{d} = 0{,}15\sqrt{u}$.

Die Vergrösserung der Auflagefläche F des Zapfens zum Zwecke der Verminderung des Flächendruckes p kann auf zweifache Art geschehen. 1. Man vergrössert l und d auf l_1 und d_1, jedoch so, dass $\frac{l_1}{d_1} = \frac{l}{d} = \varphi$ ist, dieses Verhältniss also nicht geändert wird; hingegen muss dann die Spannung $\mathfrak{S}$ kleiner werden und zwar, wie weiter unten die Rechnung zeigt, ebenso vielmal kleiner als die Auflagefläche des neuen Zapfens grösser wird als die des alten, von den Dimensionen d und l. 2. Man vergrössert l und d auf l_1 und d_1, jedoch so, dass auch $\frac{l_1}{d_1} > \frac{l}{d}$, also $\varphi_1 > \varphi$ wird und die Spannung im neuen Zapfen, also dessen Festigkeit ebenso gross ist, als im alten Zapfen.

ad 1. Die Mantelfläche F des Zapfens (ld) soll z. B. wegen Abnützungsrücksichten um das αfache vergrössert werden, so, dass die Mantelfläche des neuen Zapfens $F_1 = \alpha F$, oder $l_1 d_1 \pi = l d \pi \alpha$ ist, woraus $l_1 d_1 = l d \alpha$ folgt; nun ist auch $\frac{l_1}{d_1} = \frac{l}{d}$, aus diesen zwei Gleichungen kann man die beiden Unbekannten l_1 und d_1 bestimmen. In der

ersten Gleichung beiderseits durch d_1^2 dividirt, gibt: $\frac{l_1}{d_1} = \frac{l d \alpha}{d_1^2}$, oder, da $\frac{l_1}{d_1} = \frac{l}{d}$ ist, so hat man auch: $\frac{l}{d} = \frac{l d \alpha}{d_1^2}$, woraus $l d^2 \alpha = l d_1^2$ und $d_1 = d\sqrt{\alpha}$ folgt; ferner ist $l_1 = \frac{l}{d} \cdot d_1 = \frac{l}{d} \cdot d\sqrt{\alpha} = l\sqrt{\alpha}$. Aus der Gleichung $\frac{P l_1}{2} = \frac{\mathfrak{S}_1 \pi d_1^3}{32}$ folgt: $\mathfrak{S}_1 = \frac{16 P l_1}{\pi d_1^3} = \frac{16 P}{\pi d_1^2}\left(\frac{l_1}{d_1}\right)$, oder, da $\frac{l_1}{d_1} = \frac{l}{d}$ und $d_1 = d\sqrt{\alpha}$, also $d_1^2 = d^2 \alpha$ ist, so erhält man: $\mathfrak{S}_1 = \frac{16 P}{\pi d^2 \alpha} \cdot \frac{l}{d}$; es folgt jedoch aus der für den Zapfen (l, d) geltenden Festigkeitsgleichung $\frac{P l}{2} = \frac{\mathfrak{S} \pi d^3}{32}$ der Werth von

$$\mathfrak{S} = \frac{16 P l}{\pi d^3} = \frac{16 P}{\pi d^2}\left(\frac{l}{d}\right),$$

daher erhält man $\mathfrak{S}_1 = \frac{\mathfrak{S}}{\alpha}$; da $\alpha > 1$ angenommen wird, so folgt daraus, dass die Festigkeit des Zapfens (l_1, d_1) grösser als die des Zapfens (l, d) ist. Der Flächendruck p_1 des neuen Zapfens ist $p_1 = \frac{\mathfrak{S}_1 \pi}{16}\left(\frac{d_1}{l_1}\right)^2 = \frac{\mathfrak{S} \pi}{\alpha . 16}\left(\frac{d}{l}\right)^2$, da aber $\frac{\mathfrak{S} \pi}{16}\left(\frac{d}{l}\right)^2 = p =$ dem Flächendruck des Zapfens (l, d) ist, so hat man $p_1 = \frac{p}{\alpha}$; der neue Flächendruck ist also sovielmal kleiner, als der alte, als die neue Mantelfläche grösser ist, als die des alten Zapfens.

ad 2. Das Verhältniss φ soll so abgeändert werden, dass die Spannung $\mathfrak{S}$ unverändert bleibe, man hat daher für den Zapfen (d, l): $\mathfrak{S} = \frac{16 P}{\pi d^2}\left(\frac{l}{d}\right) = \frac{16 P}{\pi d^2} . \varphi$, für den Zapfen (d_1, l_1) ist

$$\mathfrak{S} = \frac{16 P}{\pi d_1^2}\left(\frac{l_1}{d_1}\right) = \frac{16 P}{\pi d_1^2} . \varphi_1,$$

unserer Bedingung gemäss findet daher die Gleichung statt:

$$\frac{16 P}{\pi d^2}\left(\frac{l}{d}\right) = \frac{16 P}{\pi d_1^2}\left(\frac{l_1}{d_1}\right), \text{ hieraus ist } \frac{l}{d^3} = \frac{l_1}{d_1^3};$$

die zweite hinzuzufügende Bedingungsgleichung ist dieselbe wie *ad* 1 in Bezug der Vergrösserung der Mantelfläche, nämlich

$$l d \pi \alpha = l_1 d_1 \pi, \text{ oder } l d \alpha = l_1 d_1;$$

aus diesen zwei Gleichungen $\frac{l}{d^3} = \frac{l_1}{d_1^3}$ und $l\,d\,\alpha = l_1\,d_1$ sind die zwei Unbekannten l_1 und d_1 zu bestimmen. Diese beiden Gleichungen mit einander multiplicirt, gibt: $\frac{l^2\,\alpha}{d^2} = \frac{l_1^2}{d_1^2}$, oder $\varphi^2\,\alpha = \varphi_1^2$, woraus $\varphi_1 = \varphi\sqrt{\alpha}$ folgt. Diese Gleichung kann man auch schreiben: $\frac{l_1}{d_1} = \frac{l}{d}\sqrt{\alpha}$, hieraus ist $l_1 = \frac{l\,d_1}{d}\sqrt{\alpha}$, diesen Werth von l_1 in die Gleichung $l\,d\,\alpha = l_1\,d_1$ gesetzt, gibt: $l\,d\,\alpha = \frac{l\,d_1^2}{d}\sqrt{\alpha}$, oder $d^2\,\alpha =$ $= d_1^2\sqrt{\alpha}$, oder beiderseits durch $\sqrt{\alpha}$ dividirt und d_1 bestimmt, ist $d_1 = d\sqrt[4]{\alpha}$, hiermit wird $l_1 = \frac{l}{d}\,.\,d\sqrt[4]{\alpha}\,.\,\sqrt{\alpha}$, oder $l_1 = l\sqrt[4]{\alpha^3}$; wie man sieht, wird hier d_1 nicht so gross, als im ersten Falle, also auch das Reibungsmoment und hiermit der Effectverlust kleiner als im ersten Falle, weshalb dieses zweite Verfahren der Vergrösserung der Auflagefläche des Zapfens dem ersten Verfahren vorzuziehen ist. Bei einer αfachen Vergrösserung der Auflagefläche des Zapfens durch Vergrösserung von φ nimmt der aus der Reibung entstehende Effectverlust ebenso wie der Zapfendurchmesser um das $\sqrt[4]{\alpha}$fache zu. Setzt man die Auflagefläche und den Durchmesser bei einem Zapfen, für welchen $\frac{l}{d} = \varphi = 1$ ist, beide gleich der Einheit, so drücken die in der folgenden kleinen Tabelle für F und d zusammengestellten Werthe die Verhältnisse der Auflageflächen und Durchmesser von Zapfen aus, für welche φ verschiedene Werthe hat, zu der Auflagefläche und dem Durchmesser eines Zapfens, für welchen $\varphi = 1$ ist.

Wenn φ =	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,8	2
so ist F =	1	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56	3,24	4
so ist d =	1	1,05	1,10	1,14	1,18	1,22	1,26	1,34	1,41

Hat sich z. B. für einen Zapfen, dessen Länge gleich dem Durchmesser ist, als wünschenswerth herausgestellt, ihn durch einen anderen Zapfen von doppelt so grosser Auflagefläche zu ersetzen, so zeigt die Tabelle, dass für diesen neuen Zapfen, wo $F = 1{,}96$ ist (siehe Tabelle), $\varphi = 1{,}4$ sein muss und $d = 1{,}18$mal dem Durchmesser des vorhandenen Zapfens zu nehmen ist. Beide Zapfen haben dann gleiche Sicherheit, dabei ist beim neuen Zapfen trotz der Verdoppelung der Auflagefläche der Effectverlust nur 1,18mal grösser als beim ersten Zapfen. Kennt man für einen Stirnzapfen irgend eines Materials das durch die Erfahrung bestimmte günstigste Ver-

hältniss $\varphi = \frac{l}{d}$, so kann man für einen anderen, gleich langen und gleich belasteten Stirnzapfen eines anderen Materials das Verhältniss zwischen Länge und Durchmesser $\varphi_1 = \frac{l}{d_1}$ wie folgt finden:

Ein Schmiedeisenzapfen habe z. B. die Dimensionen l und d, die in demselben auftretende Spannung im belasteten Zustande sei $\mathfrak{S}$, ein Gusseisenzapfen von gleicher Belastung habe die Länge l und den Durchmesser d_1, die in demselben herrschende Spannung sei $\mathfrak{S}_1$, so fragt es sich um das Verhältniss $\varphi_1 = \frac{l}{d_1}$.

Aus der Formel $\frac{Pl}{2} = \frac{\mathfrak{S} \pi d^3}{32}$ folgt:

für den Schmiedeisenzapfen: $d = \sqrt[3]{\frac{16\,Pl}{\mathfrak{S}\pi}}$,

» » Gusseisenzapfen: $d_1 = \sqrt[3]{\frac{16\,Pl}{\mathfrak{S}_1 \pi}}$,

hieraus ist

$$d : d_1 = \sqrt[3]{\frac{16\,Pl}{\mathfrak{S}\pi}} : \sqrt[3]{\frac{16\,Pl}{\mathfrak{S}_1 \pi}}, \text{ oder}$$

$$d : d_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{\mathfrak{S}}} : \frac{1}{\sqrt[3]{\mathfrak{S}_1}}, \text{ oder } \frac{1}{d} : \frac{1}{d_1} = \sqrt[3]{\mathfrak{S}} : \sqrt[3]{\mathfrak{S}_1}, \text{ oder}$$

$$\frac{l}{d} : \frac{l}{d_1} = \sqrt[3]{\mathfrak{S}} : \sqrt[3]{\mathfrak{S}_1}, \text{ oder } \varphi : \varphi_1 = \sqrt[3]{\mathfrak{S}} : \sqrt[3]{\mathfrak{S}_1},$$

hieraus ist $\varphi_1 = \varphi \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}}}$; soll jedoch auch die Länge l_1 des Gusseisenzapfens verschieden sein, von der Länge l des Schmiedeisenzapfens, so hat man durch Vergleichung der beiden Werthe

$$d = \sqrt[3]{\frac{16\,Pl}{\mathfrak{S}\pi}} \text{ und } d_1 = \sqrt[3]{\frac{16\,Pl_1}{\mathfrak{S}_1 \pi}}, \text{ die Proportion}$$

$$d : d_1 = \sqrt[3]{\frac{l}{\mathfrak{S}}} : \sqrt[3]{\frac{l_1}{\mathfrak{S}_1}}, \text{ hieraus ist}$$

$$d_1 = d \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{S}\, l_1}{\mathfrak{S}_1\, l}}, \text{ oder } \frac{1}{d_1} = \frac{1}{d} \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{S}_1\, l}{\mathfrak{S}\, l_1}},$$

beiderseits mit l_1 multiplicirt, gibt

$$\frac{l}{d_1} = \varphi_1 = \frac{l_1}{d} \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{S}_1\, l}{\mathfrak{S}\, l_1}}, \text{ oder}$$

$$\varphi_1 = \frac{l}{d\,.\,l} \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{S}_1\, l_1^3\, l}{\mathfrak{S}\, l_1}} = \varphi \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{S}_1\, l_1^3\, l}{\mathfrak{S}\, l_1\, l^3}} = \varphi \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{S}_1\, l_1^2}{\mathfrak{S}\, l^2}},$$

für $l_1 = l$ erhält man wieder den früheren Werth für φ_1. Will man nun einen schmiedeisernen Zapfen von den Dimensionen l und d durch einen aus einem anderen Material gefertigten Zapfen (l_1, d_1) von gleicher Tragfähigkeit und gewählter oder vorgeschriebener Länge l_1 ersetzen, so benütze man zur Berechnung von d_1 die obige Gleichung $d_1 = d \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{S}\, l_1}{\mathfrak{S}_1\, l}}$, wobei $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$ die den Zapfen d und d_1 entsprechenden zulässigen Spannungen bedeuten. Will man jedoch bei einem Zapfen aus irgend einem Grunde die Länge l verändern in l_1, so muss auch d verändert werden in d_1, und zwar hat man, da das Zapfenmaterial dasselbe bleiben soll, also $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}$ ist, aus der letzten Gleichung für d_1 den Durchmesser des neuen Zapfens $d_1 = d \sqrt[3]{\frac{l_1}{l}}$. Setzt man in die Formel für den Durchmesser d eines Stirnzapfens $d = 2{,}26 \sqrt{\frac{P\varphi}{\mathfrak{S}}}$, $\varphi = 1{,}5$ und $\mathfrak{S} = 6$ ein, so erhält man zur Berechnung eines schmiedeisernen Stirnzapfens die Formel $d_s = 2{,}26 \sqrt{\frac{P\, 1{,}5}{6}} = 1{,}3 \sqrt{P}$, für Gusseisen nehmen wir $\varphi = \frac{4}{3}$, $\mathfrak{S} = 3$, dies gibt: $d_g = 2{,}26 \sqrt{\frac{4}{3} \cdot \frac{P}{3}} = 1{,}5 \sqrt{P}$. Für Zapfen, die nicht dauernd laufen, sondern nur schwingen, genügt es, zu nehmen: für Schmiedeisen $\mathfrak{S}_s = 7{,}5$, für Gusseisen $\mathfrak{S}_g = 3{,}75$. Da bei diesen Zapfen die Abnützung bedeutend geringer ist, als bei continuirlich laufenden Zapfen, so nimmt man hier für φ geringere Werthe an, von $\varphi = \frac{4}{3}$ bis $\varphi = \frac{1}{2}$, für $\varphi = 1$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$.

Hat man für den Durchmesser des schmiedeisernen schwingenden Zapfens, bei $\mathfrak{S}_s = 7{,}5$,

$$d_s = 0{,}82 \sqrt{P},\ 0{,}71 \sqrt{P},\ 0{,}58 \sqrt{P},$$

für den Durchmesser des Gusseisenzapfens: bei $\mathfrak{S}_g = 3{,}75$

$$d_g = 1{,}16 \sqrt{P},\ \sqrt{P},\ 0{,}82 \sqrt{P}.$$

5. Ein einer horizontal liegenden Axe angehörender, gusseiserner, hohler Stirnzapfen (von Kreisringquerschnitt) wird von

einer Kraft P, welche, in der Mitte der Zapfenlänge angreifend, vertical nach abwärts wirkt, auf Biegung beansprucht; es ist der äussere Durchmesser d_0, der innere Durchmesser d_1 und die Länge l_0 des Zapfens zu berechnen.

Auflösung. Setzt man in der Grundformel der Biegungsfestigkeit $M = \mathfrak{S} Z$ für M den Werth des Biegungsmomentes $M = \frac{P l_0}{2}$ und für Z den Werth des Querschnittsmoduls $Z = \frac{\pi}{32}\left(\frac{d_0^4 - d_1^4}{d_0}\right)$, so hat man: $\frac{P l_0}{2} = \frac{\mathfrak{S}\pi}{32}\left(\frac{d_0^4 - d_1^4}{d_0}\right)$. Zwischen dem äusseren Durchmesser d_0 und dem inneren Durchmesser d_1 des Zapfens nehmen wir ein Verhältniss an und setzen $\frac{d_1}{d_0} = \psi$, so dass also ψ als eine bekannte Grösse zu betrachten sei; setzt man nun $d_1 = d_0 \psi$ in die letzte Festigkeitsgleichung ein, so ist:

$$\frac{P l_0}{2} = \frac{\mathfrak{S}\pi}{32}\left(\frac{d_0^4 - d_0^4 \psi^4}{d_0}\right) = \frac{\mathfrak{S}\pi d_0^4}{32 d_0}(1 - \psi^4) \text{ oder}$$

$$\frac{P}{2} = \frac{\mathfrak{S}\pi d_0^2}{32} \cdot \frac{d_0}{l_0}(1 - \psi^4);$$

zwischen dem äusseren Durchmesser d_0 und der Länge l_0 des Zapfens nehmen wir ebenfalls ein Verhältniss an und setzen $\frac{l_0}{d_0} = \varphi$, wobei also φ als eine bekannte Grösse zu betrachten ist.

Man erhält somit $P = \frac{\mathfrak{S}\pi d_0^2}{16\varphi}(1 - \psi^4)$, hieraus ist

$$d_0 = \sqrt{\frac{16 P\varphi}{\mathfrak{S}\pi(1 - \psi^4)}} = 2{,}26\sqrt{\frac{P\varphi}{\mathfrak{S}(1 - \psi^4)}}.$$

Bezüglich des Verhältnisses φ gilt hier dasselbe, was bereits im vorigen Beispiele beim massiven Zapfen gesagt wurde. Das Verhältniss ψ ist so zu wählen, dass die dadurch bedingte Wandstärke des hohlen Zapfens $w = \frac{d_0 - d_1}{2}$ so gross werde, dass der praktischen Ausführung keine Schwierigkeiten gemacht werden, dass also die Wandstärke nicht zu klein (mindestens 10^{mm}) und nicht zu gross ausfalle. Ein sehr gebräuchliches Höhlungsverhältniss ist $\psi = 0{,}6$; hat man nun durch die erstmalige Rechnung unter Annahme von ψ eine unpassende Wandstärke erhalten, so mache man die Rechnung mit entsprechend veränderter Annahme von ψ noch einmal und wird dann in der Regel eine passende Wandstärke er-

halten. Will man diese mehrmalige Rechnung vermeiden, so kann man auch die Wandstärke im Vorhinein nach Gutdünken annehmen und in der Formel $P = \frac{\pi \mathfrak{S}}{16} \left(\frac{d_0^4 - d_1^4}{d_0 l_0} \right)$ für d_1 setzen: $d_1 = d_0 - 2w$; man erhält dadurch

$$\frac{16 P d_0^2 \varphi}{\pi \mathfrak{S}} = d_0^4 - (d_0 - 2w)^4 = 8 w d_0^3 - 24 w^2 d_0^2 + 32 w^3 d_0 - 16 w^4,$$

oder

$$8 w d_0^3 - d_0^2 \left(24 w^2 + \frac{16 P \varphi}{\pi \mathfrak{S}} \right) + 32 w^3 d_0 = 16 w^4, \text{ oder}$$

$$d_0^3 - \left(\frac{24 \pi \mathfrak{S} w^2 + 16 P \varphi}{8 \pi \mathfrak{S} w} \right) d_0^2 + 4 w^2 d_0 = 2 w^3.$$

Die Auflösung dieser kubischen Gleichung dürfte jedoch mehr Zeit in Anspruch nehmen, als das zuerst oben angegebene Rechnungsverfahren. Hat man den äusseren Durchmesser d_0 bestimmt, so ergibt sich der innere Durchmesser mit $d_1 = d_0 \psi$, die Zapfenlänge $l_0 = d_0 \varphi$.

Ein anderes, bequemes Verfahren, die Dimensionen eines hohlen Zapfens zu bestimmen, besteht in Folgendem: Man bezieht den äusseren Durchmesser d_0 auf den Durchmesser d eines dem hohlen Zapfen gleichwerthigen massiven Zapfens, d. h. auf einen Zapfen, der ebenso belastet ist, wie der hohle und dieselbe Tragkraft hat, wie dieser.

Macht man die Annahme, dass die Länge l des massiven Zapfens ebenso gross sei, als die des hohlen, also $l_0 = l$, so hat man aus den den beiden Zapfen entsprechenden Festigkeitsgleichungen:

$$\frac{Pl}{2} = \frac{\mathfrak{S} \pi d^3}{32} \text{ und } \frac{P l_0}{2} = \frac{\mathfrak{S} \pi}{32} \left(\frac{d_0^4 - d_1^4}{d_0} \right),$$

die beiden Werthe von P einander gleich zu setzen, und erhält dadurch:

$$\frac{\mathfrak{S} \pi d^3}{16 l} = \frac{\mathfrak{S} \pi}{16 l_0} \left(\frac{d_0^4 - d_1^4}{d_0} \right),$$

oder wegen $l_0 = l$ ist $d^3 = \frac{d_0^4 - d_1^4}{d_0}$. Hierbei wird jedoch vorausgesetzt, dass beide Zapfen aus demselben Materiale seien, weil wir in den beiden Werthen von P die gleiche Spannung $\mathfrak{S}$ eingesetzt haben. Die letzte Gleichung kann man auch schreiben:

$$d^3 = \frac{d_0^4}{d_0} \left[1 - \left(\frac{d_1}{d_0} \right)^4 \right] = d_0^3 (1 - \psi^4), \text{ woraus}$$

$$d_0 = \frac{d}{\sqrt[3]{1 - \psi^4}}$$

folgt, oder für d den bereits bekannten Werth

$$d = 2{,}26 \sqrt{\frac{P\varphi}{\mathfrak{S}}}$$

gesetzt, erhält man auch:

$$d_0 = \frac{2{,}26 \sqrt{\frac{P\varphi}{\mathfrak{S}}}}{\sqrt[3]{1 - \psi^4}},$$

für Gusseisen erhält man, bei $\varphi = \frac{4}{3}$ und $\mathfrak{S} = 3$, $d_0 = \frac{1{,}5 \sqrt{P}}{\sqrt[3]{1 - \psi^4}}$.

So ergibt sich z. B. für verschiedene Werthe von

$$\psi = \frac{d_1}{d_0} = 0{,}8, \quad 0{,}75, \quad 0{,}7, \quad 0{,}6, \quad 0{,}5, \quad 0{,}4, \quad 0{,}3, \quad 0{,}2$$

$$\frac{d_0}{d} = 1{,}19, \quad 1{,}13, \quad 1{,}1, \quad 1{,}05, \quad 1{,}02, \quad 1{,}01, \quad 1{,}003, \quad 1{,}0004.$$

Es werde z. B. der hohle Gusszapfen mit $P = 2500^{Kg}$ belastet, so hat man den Durchmesser d des dem hohlen gleichwerthigen, massiven, gusseisernen Stirnzapfens

$$d = 1{,}5 \sqrt{P} = 1{,}5 \sqrt{2500} = 75^{mm};$$

nehmen wir das Höhlungsverhältniss $\psi = 0{,}6$, so ist nach der letzten Tabelle, die aus der Formel $d_0 = \frac{d}{\sqrt[3]{1 - \psi^4}}$ für verschiedene Werthe von ψ berechnet ist, $\frac{d_0}{d} = 1{,}05$, also $d_0 = 1{,}05 d = 1{,}05 . 75 = 78{,}75$ und abgerundet $d_0 = 79^{mm}$; hiermit wird $d_1 = \psi d_0 = 0{,}6 . 79 = 47{,}4$ und abgerundet $d_1 = 48^{mm}$; die Wandstärke wird

$$w = \frac{d_0 - d_1}{2} = \frac{79 - 48}{2} = 15\tfrac{1}{2}^{mm};$$

die Länge $l_0 = \frac{4}{3} d = \frac{4}{3} . 75 = 100^{mm}$. Wünscht man jedoch, dass beim hohlen Zapfen dasselbe Verhältniss φ eingehalten werde, wie beim massiven, gleichwerthigen Zapfen, so hat man $\varphi = \frac{l}{d} = \frac{l_0}{d_0}$ in die Rechnung einzuführen. Man hat dann, wenn man aus den beiden Festigkeitsgleichungen

$$\frac{Pl_0}{2} = \frac{\mathfrak{S}\pi}{32}\left(\frac{d_0^4 - d_1^4}{d_0}\right) \text{ und } \frac{Pl}{2} = \frac{\mathfrak{S}\pi d^3}{32}$$

die Werthe von P einander gleich setzt:

$$P = \frac{\mathfrak{S}\pi}{16 l_0}\left(\frac{d_0^4 - d_1^4}{d_0}\right) = \frac{\mathfrak{S}\pi d^3}{16 l}, \text{ oder}$$

$$\frac{d_0^4}{l_0 d_0}\left[1 - \left(\frac{d_1}{d_0}\right)^4\right] = \frac{d \, . \, d^3}{l}, \text{ oder } \frac{d_0^3}{\varphi}(1 - \psi^4) = \frac{d^3}{\varphi},$$

woraus $d_0 = \frac{d}{\sqrt[3]{1 - \psi^4}}$ ist. Man sieht, dass hier d_0 stärker ausfällt, als im vorigen Falle; für das vorliegende Zahlenbeispiel würde man erhalten, bei $\psi = 0{,}6$

$$d_0 = \frac{75}{\sqrt[3]{1 - (0{,}6)^4}} = \frac{75}{\sqrt[3]{0{,}8704}} = \frac{75}{0{,}933} = 80{,}38^{mm},$$

man erhält ferner

$$d_1 = 0{,}6 \, . \, 80{,}38 = 48{,}228^{mm}, \; l_0 = \frac{4}{3} \, . \, d_0 = \frac{4}{3} \, . \, 80{,}38,$$

$$l_0 = 107{,}17^{mm}.$$

6. Ein Gabel- oder Bolzenzapfen vom Durchmesser d_1 (siehe beistehende Figuren) ist durch die Kraft P auf Biegung beansprucht. Es ist der Durchmesser d_1 und die Länge l_1 des Zapfens zu berechnen.

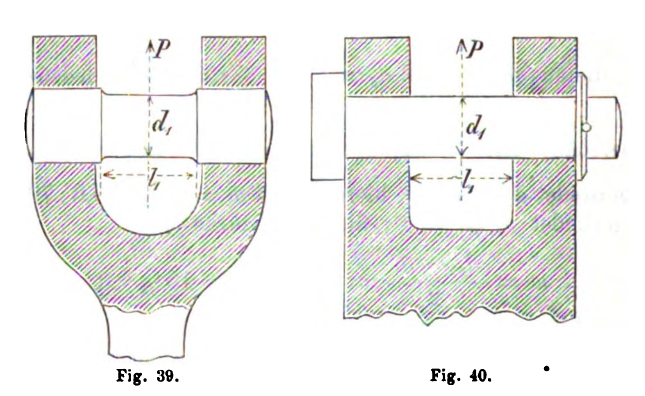


Fig. 39. Fig. 40.

Auflösung. Der Gabel- oder Bolzenzapfen ist als ein an seinen beiden Enden eingeklemmter oder eingemauerter, horizontal liegender Balken von prismatischem Querschnitte zu betrachten; daher die zur Querschnittsberechnung anzuwendende Formel $M = \mathfrak{S} Z$, oder $\frac{P l_1}{8} = \frac{\mathfrak{S}\pi d_1^3}{32}$; hieraus ist $\frac{4P}{\mathfrak{S}\pi} = \frac{d_1^3}{l_1} = \left(\frac{d_1}{l_1}\right) d_1^2$; zwischen l_1 und

d_1 nehmen wir ein als bekannt vorauszusetzendes Verhältniss $\varphi = \frac{l_1}{d_1}$ an, wobei in Bezug dieses Verhältnisses dasselbe gilt, was bereits beim Stirnzapfen darüber gesagt wurde; wir erhalten daher:

$$\frac{4P}{\mathfrak{S}\pi} = \frac{d_1^2}{\varphi}, \text{ woraus } d_1 = \sqrt{\frac{4P\varphi}{\mathfrak{S}\pi}} = 1{,}12866\sqrt{\frac{P\varphi}{\mathfrak{S}}},$$

oder abgerundet $d_1 = 1{,}129\sqrt{\frac{P\varphi}{\mathfrak{S}}}$ folgt.

Bezieht man jedoch den Durchmesser d_1 des Gabelzapfens auf den Durchmesser d eines aus demselben Materiale gefertigten, und dem Gabelzapfen gleichwerthigen Stirnzapfens, so erhält man aus den den beiden Zapfen entsprechenden Festigkeitsgleichungen:

$$\frac{Pl_1}{8} = \frac{\mathfrak{S}\pi d_1^3}{32} \text{ und } \frac{Pl}{2} = \frac{\mathfrak{S}\pi d^3}{32} \text{ die Durchmesser}$$

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{4Pl_1}{\mathfrak{S}\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4Pl_1}{\mathfrak{S}\pi}\cdot\frac{d_1}{d_1}} = \sqrt[3]{\frac{4Pd_1\varphi}{\mathfrak{S}\pi}} = \sqrt{\frac{4P\varphi}{\mathfrak{S}\pi}} \text{ und}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16Pl}{\mathfrak{S}\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16Pl}{\mathfrak{S}\pi}\cdot\frac{d}{d}} = \sqrt[3]{\frac{16Pd\varphi}{\mathfrak{S}\pi}} = \sqrt{\frac{16P\varphi}{\mathfrak{S}\pi}}.$$

Durch Vergleichung dieser beiden Durchmesser erhält man:

$$d_1 : d = \sqrt{\frac{4P\varphi}{\mathfrak{S}\pi}} : \sqrt{\frac{16P\varphi}{\mathfrak{S}\pi}} = 2 : 4 = 1 : 2,$$

daher $d_1 = 0{,}5\,d$; zu demselben Resultat gelangt man auch, wenn man aus den beiden Festigkeitsgleichungen die Werthe von P oder $\mathfrak{S}$ bestimmt und einander gleich setzt. Es sei noch bemerkt, dass bei der letzten Berechnung von d_1 angenommen wurde, das Verhältniss φ beim Gabelzapfen ist dasselbe, wie bei dem demselben gleichwerthigen Stirnzapfen, also $\frac{l_1}{d_1} = \frac{l}{d}$. Will man aus irgend einem Grunde den Durchmesser $d_1 > 0{,}5\,d$ machen, so nehme man auch l_1 grösser, als es sich aus der Gleichung $\frac{l_1}{d_1} = \varphi$ mit $l_1 = d_1\varphi$ ergibt, und zwar wie folgt: Aus den beiden oben erwähnten Festigkeitsgleichungen der beiden Zapfen ist

$$P = \frac{\mathfrak{S}\pi d_1^3}{4l_1} = \frac{\mathfrak{S}\pi d^3}{16l}, \text{ woraus}$$

$$\frac{d^3}{16\,l} = \frac{d_1^3}{4\,l_1}, \text{ oder } \frac{d^3}{4\,l} = \frac{d_1^3}{l_1}$$

folgt. Hieraus ist

$$\frac{l_1}{d_1} = \frac{4\,l\,d_1^2}{d^3} = 4\left(\frac{l}{d}\right)\left(\frac{d_1}{d}\right)^2, \text{ oder } \varphi_1 = 4\,\varphi\left(\frac{d_1}{d}\right)^2;$$

man erhält somit

$$l_1 = 4\,d_1\,\varphi\left(\frac{d_1}{d}\right)^2 = \frac{4\,l\,d_1^3}{d^3} = 4\,l\left(\frac{d_1}{d}\right)^3.$$

Ist hingegen die Länge l_1 angenommen oder vorgeschrieben, so bestimmt sich d_1 aus der letzten Gleichung mit:

$$d_1 = d\sqrt[3]{\frac{l_1}{4\,l}} = 0{,}63\,d\sqrt[3]{\frac{l_1}{l}};$$

für $l_1 = l$, wird $d_1 = 0{,}63\,d$. Es empfiehlt sich, die Länge l_1 des Gabelzapfens aus der Gleichung $l\,d = l_1\,d_1$ mit $l_1 = \frac{l\,d}{d_1}$ zu bestimmen. Mit diesem Werthe von l_1 ergibt sich d_1 wie folgt: Aus den für die beiden Zapfen geltenden Festigkeitsgleichungen wurde der Werth von P mit $P = \frac{\mathfrak{S}\,\pi\,d_1^3}{4\,l_1} = \frac{\mathfrak{S}\,\pi\,d^3}{16\,l}$ gefunden, hieraus ist $\frac{d_1^3}{l_1} = \frac{d^3}{4\,l}$, hierin für l_1 obigen Werth eingesetzt, gibt:

$$\frac{d_1^3 \cdot d_1}{l\,d} = \frac{d^3}{4\,l}, \text{ oder } d_1^4 = \frac{d^4}{4}, \text{ woraus}$$

$d_1^2 = \frac{d^2}{2}$ und $d_1 = d\sqrt{\frac{1}{2}}$, oder $d_1 = 0{,}707\,d$ folgt; hiermit wird

$$l_1 = \frac{l\,d}{0{,}707\,d} \text{ oder } l_1 = 1{,}414\,l.$$

Anmerkung. Wenn ein Tragzapfen Halszapfen ist, d. h. zwischen anderen Theilen des Stückes sitzt, welchem er angehört (Lagerstelle einer Transmissionswelle), so wird er in der Regel entweder durch verdrehende, oder durch biegende Kräfte stärker beansprucht, als wenn er ein Stirnzapfen von demselben directen Drucke wäre: er muss dann daher einen grösseren Durchmesser erhalten, als der gleich belastete und aus demselben Materiale gefertigte Stirnzapfen von derselben Umdrehungszahl; seine Berechnung hat nach den Regeln der Torsions- oder Biegungsfestigkeit, je nachdem er auf Torsion oder Biegung, oder nach den Regeln der zusammengesetzten Festigkeit zu geschehen, wenn er auf Torsion und Biegung beansprucht wird. Soll der Halszapfen dieselbe Abnützung erleiden, wie der ihm gleichwerthige Stirnzapfen, so ist seine Länge ebenso gross zu nehmen, wie die des Stirnzapfens; seine Länge grösser zu machen, wie eben angegeben, ist unschädlich; die Abnützung wird dadurch nur verringert.

7. Es ist der Durchmesser d der Kugel eines Kugelzapfens zu berechnen, der durch die Kraft P auf Biegung beansprucht wird.

Auflösung. Ein Kugelzapfen (siehe beistehende Figur) ist ein Stirnzapfen, der anstatt einer cylindrischen Fläche eine Kugelfläche zur Mantelfläche hat. Seine Berechnung hat wie bei einem cylindrischen Stirnzapfen zu geschehen. Angenommen, der Kugelzapfen sei aus Schmiedeisen, so ist der Durchmesser

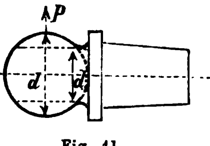


Fig. 41.

d_1 des dem letzteren gleichwerthigen cylindrischen, schmiedeisernen Stirnzapfens $d_1 = 1{,}13\sqrt{P}$, die Länge l_1 desselben $l_1 = \frac{3}{2}d_1$, der Kugelzapfen erhält an der Wurzel ebenfalls die Stärke d_1 und da der Kugelform wegen die Länge l_1 gleich dem Kugeldurchmesser d sein muss, so folgt:

$$d = l_1 = \frac{3}{2}d_1 = \frac{3}{2} \cdot 1{,}13\sqrt{P} = 1{,}695\sqrt{P};$$

da wir für einen cylindrischen Zapfen allgemein die Gleichungen hatten:

$$d_1 = 2{,}26\sqrt{\frac{P\varphi}{\mathfrak{S}}} \text{ und } l_1 = d_1\varphi = 2{,}26\,\varphi\sqrt{\frac{P\varphi}{\mathfrak{S}}},$$

so hat man für einen Kugelzapfen allgemein zur Berechnung des Kugeldurchmessers die Gleichung: $d = 2{,}26\sqrt{\frac{P\varphi^3}{\mathfrak{S}}}$, wobei $\varphi = \frac{d}{d_1}$ als eine bekannte Grösse zu betrachten ist.

Anmerkung. Bekanntlich finden Kugelzapfen im Maschinenbau da Anwendung, wo eine dauernde, genaue Lage eines cylindrischen Zapfens nicht zu erwarten und ein Klemmen desselben in seinem Lager zu befürchten ist, oder die Bewegung der mit dem Zapfen verbundenen Theile leicht ein Klemmen des letzteren (wenn er cylindrisch wäre) herbeiführen könnte (verticale Mühlspindel, Zapfen der Sägegatter).

8. Es ist der Durchmesser d einer cylindrischen, gusseisernen, horizontal liegenden, nicht auf Verdrehung beanspruchten Welle zu berechnen, deren Zapfenlager 6^m von einander entfernt sind, und die 2^m von dem einen Ende entfernt ein 600^{Kg} schweres Rad zu tragen hat. Das eigene Gewicht der Welle soll berücksichtigt werden.

Auflösung. Wir bestimmen zunächst einen angenäherten Werth von d ohne Berücksichtigung des Eigengewichtes. Die Welle stellt einen an den Endpunkten unterstützten und zwischen den Unterstützungspunkten irgendwo belasteten, horizontal liegenden Balken dar; man hat daher zur Querschnittsberechnung ohne Rücksicht auf Eigengewicht die diesem Belastungs- und Unterstützungsfall ent-

sprechende Formel $\frac{P(l-a)a}{l} = \frac{\mathfrak{S} J}{c} = \frac{\mathfrak{S} \pi d^3}{32}$ zu benutzen, wobei $P = 600$ ist, l und a die in der nebenstehenden Figur angedeuteten Dimensionen bezeichnen, also $l = 6^m$, $a = 2^m$. Aus der Festigkeitsgleichung folgt:

Fig. 42.

$$d = \sqrt[3]{\frac{32\,P(l-a)\,a}{l\,\mathfrak{S}\,\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32\,.\,600\,(6000 - 2000)\,2000}{6000\,.\,2{,}5\,.\,3{,}14}},$$

oder $d = 148^{mm}$; hiermit wird das angenäherte Gewicht G der Welle:

$$G = \frac{\pi\,(148)^2}{4}\,.\,6000\,.\,0{,}0000073 = 753{,}5^{Kg}.$$

Nun ist der genauere Werth von d aus der Gleichung

$$\left(\frac{l-b}{l}\right)\left(Pa + \frac{1}{2}\,G\,b\right) = \frac{\mathfrak{S} J}{c} = \frac{\pi d^3 \mathfrak{S}}{32}$$

zu bestimmen. Diese Gleichung entspricht dem Fall, dass ein horizontal liegender, an beiden Enden unterstützter Balken in der Entfernung a von dem einen Ende durch eine vertical nach abwärts wirkende Einzellast P und ausserdem noch durch eine auf der ganzen Länge gleichmässig vertheilte Belastung auf Biegung beansprucht wird. Die Dimension b bedeutet die Entfernung des Angriffspunktes der Resultante von P und G von dem einen Unterstützungspunkte (siehe beistehende Figur). Die Entfernung b bestimmt sich aus dem Satze der Statik „Das Moment der Resultante ist gleich der algebraischen Summe der Momente der Seitenkräfte",

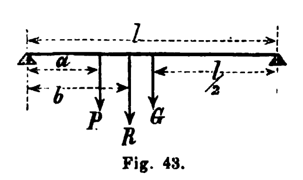


Fig. 43.

daher $Rb = Pa + \frac{1}{2}\,Gl$ und da $R = P + G$ ist, so hat man

$$q = \frac{Pa + \frac{1}{2}\,Gl}{P + G}.$$ Setzen wir die Zahlenwerthe ein, so ist:

$$b = \frac{600\,.\,2000 + \frac{1}{2}\,.\,753{,}5\,.\,6000}{600 + 753{,}5} = 2556{,}7^{mm}.$$

Aus der Gleichung $\left(\frac{l-b}{l}\right)\left(Pa + \frac{1}{2}\,G\,b\right) = \frac{\pi d^3 \mathfrak{S}}{32}$ ergibt sich:

$$d = \sqrt[3]{32\left(\frac{l-b}{l}\right)\left(\frac{Pa+\frac{1}{2}Gb}{\mathfrak{S}\pi}\right)},$$

die Zahlenwerthe eingesetzt, erhält man:

$$d = \sqrt[3]{32\left(\frac{6000-2556{,}7}{6000}\right)\left(\frac{600\,.\,2000+\frac{1}{2}\,.\,753{,}5\,.\,2556{,}7}{2{,}5\,.\,3{,}14}\right)},$$

gibt abgerundet $d = 172^{mm}$. Will man den Werth von d noch genauer haben, so berechne man mit dem jetzt gefundenen Werthe von d das Eigengewicht G der Welle, mit diesem neuen Werthe von G die Dimension b nach obiger Formel und mit diesen neuen Werthen von b und G berechne man schliesslich den Durchmesser d nach der für denselben zuletzt aufgeschriebenen Formel; auf diese Weise kann man durch wiederholte Rechnung einen beliebigen Grad von Genauigkeit erzielen. Selbstverständlich kann man den Durchmesser d auch direct finden, aus der letzten Gleichung für d, wenn man darin für G den Werth $G = \frac{\pi d^2}{4} l\gamma$ und

$$b = \frac{Pa + \frac{1}{2}\,.\,\frac{\pi d^2}{4} l\gamma\,.\,l}{P + \frac{\pi d^2}{4} l\gamma} = \frac{8\,Pa + \pi d^2 l^2 \gamma}{2\,(4\,P + \pi d^2 l\gamma)}$$

einsetzt, und dann die Gleichung, die dadurch entsteht, nämlich

$$d = \sqrt[3]{32\left\{\frac{l - \frac{8\,Pa+\pi d^2 l^2\gamma}{2(4P+\pi d^2 l\gamma)}}{l}\right\}\left\{\frac{Pa + \frac{1}{2}\,.\,\frac{\pi d^2}{4} l\gamma\left[\frac{8\,Pa+\pi d^2 l^2\gamma}{2(4P+\pi d^2 l\gamma)}\right]}{\mathfrak{S}\pi}\right\}}$$

nach d auflöst. Dass die Auflösung dieser Gleichung nach d mehr Zeit beansprucht und mehr Schwierigkeiten macht, als das vorherige Rechnungsverfahren, liegt auf der Hand.

9. An einer hohlen, cylindrischen, nicht auf Verdrehung beanspruchten Welle aus Gusseisen, welche in zwei Punkten gelagert ist, wirken die Lasten von $P_1 = 500^{Kg}$, $P_2 = 400^{Kg}$, $P_3 = 300^{Kg}$ in den Entfernungen $a_1 = 1^m$, $a_2 = 2^m$, $a_3 = 3^m$ von dem einen Unterstützungspunkte. Die Entfernung der beiden Unterstützungspunkte (Länge der Welle) ist $l = 5^m$. Wie gross ist der äussere Durchmesser d_0 und der innere Durchmesser d_1 der Welle zu machen, wenn man das Gewicht derselben berücksichtigt?

Auflösung. Wir berechnen zunächst wieder angenäherte Werthe von d_0 und d_1, indem wir vorläufig das Wellengewicht nicht berück-

sichtigen; wir haben daher zur Querschnittsberechnung die Formel:

$$\frac{P(l-a)a}{l} = \frac{\mathfrak{S}\pi}{32}\left(\frac{d_0^4 - d_1^4}{d_0}\right).$$

In dieser Formel bedeuten jedoch: P die Resultante der gegebenen Kräfte P_1, P_2, P_3, also

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 500 + 400 + 300 = 1200^{Kg};$$

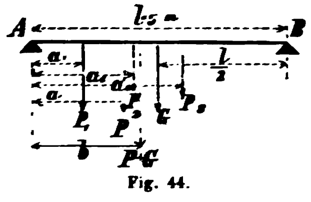


Fig. 44.

a die Entfernung des Angriffspunktes der Resultante P von dem einen Unterstützungspunkte (siehe beistehende Figur). Diese Entfernung a ergibt sich aus dem Satze, dass das Moment aP der Resultante P der Kräfte P_1, P_2, P_3 gleich sein müsse für den Gleichgewichtszustand der Summe der Momente der Componenten. Auf den Punkt A als festen Punkt diese Momente bezogen, erhält man zur Bestimmung von a die Gleichung:

$$Pa = P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3, \text{ woraus}$$

$$a = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3}{P} = \frac{500 \,.\, 1000 + 400 \,.\, 2000 + 300 \,.\, 3000}{1200}$$

$a = 1833{,}33^{mm}$ ist. Nehmen wir zwischen d_0 und d_1 das Verhältniss $\frac{d_1}{d_0} = 0{,}6$, also $d_1^4 = (0{,}6\, d_0)^4$ an, so hat man

$$\frac{P(l-a)a}{l} = \frac{\mathfrak{S}\pi d_0^3}{32}(1 - 0{,}129) = \frac{0{,}871 \,.\, 2{,}5 \,.\, 3{,}14\, d_0^3}{32} = 0{,}22\, d_0^3,$$

hieraus ist $d_0 = \sqrt[3]{\frac{P(l-a)a}{0{,}22\, l}}$, oder

$$d_0 = \sqrt[3]{\frac{1200\,(5000 - 1833{,}33)\,1833{,}33}{0{,}22 \,.\, 5000}} = 185^{mm}$$

und $d_1 = 0{,}6\, d_0 = 0{,}6 \,.\, 185 = 111^{mm}$. Diese Werthe von d_0 und d_1 sind nur die angenäherten, weil das Eigengewicht der Welle nicht berücksichtigt wurde. Mit diesen Annäherungswerthen von d_0 und d_1 berechnet sich das Wellengewicht angenähert (jedoch zum Zwecke der Querschnittsdimensionberechnung genügend genau für die Praxis) mit

$$G = \frac{l\pi}{4}(d_0^2 - d_1^2)\, 7{,}3 = \frac{50}{4}[(1{,}85)^2 - (1{,}11)^2]\, 3{,}14 \,.\, 7{,}3 = 493^{Kg}.$$

Hiermit berechnet sich die Entfernung b des Angriffspunktes der Resultirenden $R = P + G$ von dem Unterstützungspunkte in A aus der Gleichung $Rb = Pa + \frac{1}{2} Gl$, woraus

$$b = \frac{Pa + \frac{1}{2} Gl}{R} = \frac{Pa + \frac{1}{2} Gl}{P + G} = \frac{1200 . 1833{,}33 + \frac{1}{2} . 493 . 5000}{1200 + 493}$$

$b = 2027{,}46^{mm}$ folgt.

Wir benützen jetzt zur Bestimmung von d_0 und d_1 die Formel, in welcher das Eigengewicht G berücksichtigt erscheint und haben:

$$\left(\frac{l-b}{l}\right)\left(Pa + \frac{1}{2} Gb\right) = \frac{\mathfrak{S}\pi}{32}\left(\frac{d_0^4 - d_1^4}{d_0}\right) = 0{,}22\, d_0^3,$$

wenn wir nämlich, wie oben $\mathfrak{S} = 2{,}5$ und $d_1 = 0{,}6\, d_0$ setzen; man erhält somit

$$d_0 = \sqrt[3]{\left(\frac{l-b}{l}\right)\left(\frac{Pa + \frac{1}{2} Gb}{0{,}22}\right)}, \text{ oder}$$

$$d_0 = \sqrt[3]{\left(\frac{5000 - 2027{,}46}{5000}\right)\left(\frac{1200 . 1833{,}33 + \frac{1}{2} . 493 . 2027{,}46}{0{,}22}\right)},$$

$$d_0 = 194^{mm}, \quad d_1 = 0{,}6\, d_0 = 0{,}6 . 194 = 116{,}4^{mm}.$$

Wollte man diese Werthe von d_0 und d_1 noch genauer haben, so würde man G noch einmal mit den zuletzt gefundenen Werthen d_0 und d_1 berechnen und aus der Festigkeitsformel, welche das Eigengewicht berücksichtigt, noch einmal d_0 und d_1 ausrechnen.

10. Eine schmiedeiserne, nicht auf Verdrehung beanspruchte Welle von 4^m Länge und quadratischem Querschnitte ist an ihren Enden gelagert und in den Entfernungen von $a_1 = \frac{1^m}{2}$, $a_2 = 1^m$, $a_3 = 2^m$, $a_4 = 3^m$ von dem einen Ende mit $P_1 = 600^{Kg}$, $P_2 = 1500^{Kg}$, $P_3 = 900^{Kg}$, $P_4 = 2000^{Kg}$ belastet. Wie gross ist die Seite s des Querschnitts zu machen, *a)* wenn man das Gewicht der Welle nicht berücksichtigt, *b)* wenn man es berücksichtigt?

Fig. 45.

Auflösung. *ad a)* Wir haben hier zur Querschnittsbestimmung die Festigkeitsformel zu gebrauchen:

$$\frac{P(l-a)a}{l} = \frac{\mathfrak{S} J}{c} = 6 . \frac{1}{2} s^3 = s^3, \text{ woraus}$$

$$s = \sqrt[3]{\frac{P(l-a)\,a}{l}}$$

folgt; in dieser Gleichung ist P die Resultante der Kräfte P_1, P_2, P_3 und P_4, also

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 600 + 1500 + 900 + 2000 = 5000^{Kg},$$

a ist die Entfernung des Angriffspunktes dieser Resultanten von dem Unterstützungspunkte in A und bestimmt sich aus der Gleichung $Pa = P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3 + P_4 a_4$ mit

$$a = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3 + P_4 a_4}{P} =$$

$$= \frac{600 \cdot 0{,}5 + 1500 \cdot 1 + 900 \cdot 2 + 2000 \cdot 3}{5000},$$

$a = 1{,}92^m = 1920^{mm}$. Man erhält somit, wenn man in der Formel für s die Werthe für P und a einsetzt:

$$s = \sqrt[3]{\frac{5000\,(4000 - 1920)\,1920}{4000}} = 171^{mm}.$$

ad b) Bei Berücksichtigung des Eigengewichtes der Welle gebrauchen wir die Festigkeitsformel:

$$\left(\frac{l-b}{l}\right)\left(Pa + \frac{1}{2}\,Gb\right) = \frac{\mathfrak{S}\,J}{c} = \mathfrak{S} \cdot \frac{1}{6}\,s^3 = 6 \cdot \frac{1}{6}\,s^3 = s^3,$$

woraus

$$s = \sqrt[3]{\left(\frac{l-b}{l}\right)\left(Pa + \frac{1}{2}\,Gb\right)}$$

ist. In dieser Gleichung bedeutet G das Eigengewicht der Welle, welches wir mit Hilfe des *ad a* gefundenen Werthes der Seite s des quadratischen Querschnittes angenähert finden können. Es ist $G = s^2 l \gamma = (1{,}71)^2\, 40 \cdot 7{,}6 = 889^{Kg}$, wobei also γ das Gewicht einer Volumeinheit Schmiedeisen, hier 1^{dm^3} mit $7{,}6^{Kg}$, also die Dichte des Schmiedeisens zu 7,6 angenommen wurde. b ist die Entfernung des Angriffspunktes der Resultanten $R = P + G$ von dem Unterstützungspunkte in A und berechnet sich aus der Gleichung

$$(P + G)\,b = Pa + \frac{1}{2}\,Gl \text{ mit } b = \frac{Pa + \frac{1}{2}\,Gl}{P + G}, \text{ oder}$$

$$b = \frac{5000 \cdot 1920 + \frac{1}{2} \cdot 889 \cdot 4000}{5000 + 889} = 1932^{mm};$$

die Werthe von b und G in obige Formel für s eingesetzt, erhält man:

$$s = \sqrt[3]{\left(\frac{4000 - 1932}{4000}\right)\left(5000 \, . \, 1920 + \frac{1}{2} \, . \, 889 \, . \, 1932\right)}, \text{ oder}$$

$$s = \sqrt[3]{5407186{,}158} = 175{,}5^{mm}.$$

11. Eine Welle aus Fichtenholz von $6{,}277^m$ Länge ist in ihren beiden Enden gelagert; sie hat einen kreisförmigen Querschnitt von 314^{mm} Durchmesser und soll 2511^{mm} von dem einen Ende entfernt, ein Wasserrad tragen; welches Gewicht darf dasselbe haben, wenn man das Gewicht der Welle berücksichtigt und letztere nicht auf Torsion beansprucht wird?

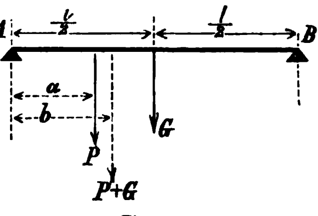


Fig. 46.

Auflösung. Der vorliegende Belastungsfall ist der, dass ein prismatischer, stabförmiger Körper an seinen Enden unterstützt und in der Entfernung $a = 2511^{mm}$ von dem einen Unterstützungspunkte durch die Einzellast P und durch die auf seine ganze Länge gleichmässig vertheilte Last (Eigengewicht) G auf Biegung beansprucht ist. Die hierher gehörige Festigkeitsgleichung lautet:

$$\left(\frac{l - b}{l}\right)\left(Pa + \frac{1}{2} G b\right) = \frac{\mathfrak{S} J}{c};$$

in dieser Gleichung sind die Grössen P und b unbekannt, das Eigengewicht G lässt sich aus den gegebenen Dimensionen berechnen.

$$\text{Es ist } G = V\gamma = \frac{d^2 \pi}{4} l \gamma = \frac{(3{,}14)^2 \, 3{,}14}{4} \, . \, 62{,}77 \, . \, 0{,}64 = 315^{Kg}.$$

Die Entfernung b des Angriffspunktes der Resultante $P + G$ von dem Unterstützungspunkte in A ist bestimmt durch die Gleichung:

$$(P + G) \, b = Pa + \frac{1}{2} G l, \text{ daher:}$$

$$b = \frac{Pa + \frac{1}{2} G l}{P + G};$$

setzt man diesen Werth von b in obige Festigkeitsgleichung ein, so erhält man:

$$\left(l - \frac{Pa + \frac{1}{2} G l}{P + G}\right)\left[Pa + \frac{1}{2} G \left(\frac{Pa + \frac{1}{2} G l}{P + G}\right)\right] \frac{1}{l} = \frac{\mathfrak{S} J}{c}, \text{ oder}$$

$$\left(\frac{lP+lG-Pa-\frac{1}{2}Gl}{P+G}\right)\left(\frac{P^2a+PaG+\frac{1}{2}PaG+\frac{1}{4}G^2l}{P+G}\right)\frac{1}{l}=\frac{\mathfrak{S}J}{c}$$

oder

$$\left[P(l-a)+\frac{1}{2}Gl\right]\frac{\left(P^2a+\frac{3}{2}aGP+\frac{1}{4}G^2l\right)}{(P+G)^2l}=\frac{\mathfrak{S}J}{c};$$

diese Gleichung, die, wie man bemerkt, eine unreine kubische Gleichung ist, wäre nun nach der Unbekannten P aufzulösen. Um diese zeitraubende Arbeit zu umgehen, schlagen wir wieder folgendes für die Praxis genügend genaue Resultate lieferndes Annäherungsverfahren ein: Wir berechnen zunächst den angenäherten Werth von P ohne Rücksicht auf das Eigengewicht der Welle aus der Festigkeitsgleichung $\frac{P(l-a)a}{l}=\frac{\mathfrak{S}J}{c}$ mit

$$P=\frac{\mathfrak{S}Jl}{ca(l-a)}=\frac{0{,}683\frac{\pi d^3}{32}l}{a(l-a)}=\frac{0{,}683\,.\,3{,}14\,(314)^3\,.\,6277}{(6277-2511)\,2511\,.\,32},\text{ oder}$$

$$P=\frac{2075911{,}566\,.\,6277}{(6277-2511)\,2511}=1377^{Kg}$$

und setzen diesen Werth von P in die Gleichung $b=\frac{Pa+\frac{1}{2}Gl}{P+G}$ ein, wodurch wir einen angenäherten Werth von b mit

$$b=\frac{1377\,.\,2511+\frac{1}{2}\,.\,315\,.\,6277}{1377+315}=2627{,}82^{mm}$$

erhalten. Lösen wir nun die Gleichung

$$\left(\frac{l-b}{l}\right)\left(Pa+\frac{1}{2}Gb\right)=\frac{\mathfrak{S}J}{c}$$

nach P auf, so ist

$$\left(l-b\right)\left(Pa+\frac{1}{2}Gb\right)=\frac{\mathfrak{S}Jl}{c},\text{ oder}$$

$$Pa+\frac{1}{2}Gb=\frac{\mathfrak{S}Jl}{c(l-b)},\text{ oder }Pa=\frac{\mathfrak{S}Jl}{c(l-b)}-\frac{1}{2}Gb,\text{ woraus}$$

$$P=\frac{\mathfrak{S}Jl}{ac(l-b)}-\frac{Gb}{2a}\text{ folgt;}$$

setzt man die Zahlenwerthe ein, so ist:

$$P = \frac{0{,}683\,\pi d^3 l}{32 \,.\, a\,(l-b)} - \frac{Gb}{2a}, \text{ oder}$$

$$P = \frac{0{,}683 \,.\, 3{,}14\,(314)^3 \,.\, 6277}{32 \,.\, 2511\,(6277 - 2627{,}82)} - \frac{315 \,.\, 2627{,}82}{2 \,.\, 2511}, \text{ oder}$$

$$P = \frac{2075911{,}566 \,.\, 6277}{2511\,(6277 - 2627{,}82)} - 164{,}827, \text{ oder}$$

$$P = 1422 - 164{,}827 = 1257{,}173^{Kg}.$$

Ist ein sehr genauer Gang nothwendig, so berechnet man die unbekannte Last P nicht mehr aus dem Widerstandsmomente $M = \frac{\mathfrak{S} J}{c}$, sondern aus der Formel für die Durchbiegung:

$$s = \frac{P}{3EJ} \frac{(l-a)^2 a^2}{l};$$

wir stellen hier die Bedingung, dass die Durchbiegung $s = 0{,}001\,l$ sei; man erhält somit:

$$0{,}001\,l = \frac{P}{3EJ} \,.\, \frac{(l-a)^2 a^2}{l},$$

in dieser Formel ist jedoch das Eigengewicht der Welle nicht berücksichtigt. Aus der letzten Gleichung folgt: $P = \frac{0{,}003\,l^2 EJ}{(l-a)^2 a^2}$, die Zahlenwerthe eingesetzt, gibt:

$$P = \frac{0{,}003\,(6277)^2 \,.\, 1096 \,.\, \frac{\pi}{64}\,(314)^4}{(6277 - 2511)^2\,(2511)^2} = 690^{Kg}.$$

12. Welche Grösse kann die über die ganze Länge der Welle gleichmässig vertheilte Last G erhalten, wenn die in der vorigen Aufgabe gegebenen Daten beibehalten werden; *a*) ohne Rücksicht auf das Eigengewicht der Welle, *b*) mit Rücksicht auf das Eigengewicht der Welle, *c*) wenn eine Durchbiegung $s = 0{,}001\,l$ gestattet ist?

Auflösung. *ad a)* Die diesem Belastungsfalle entsprechende Festigkeitsgleichung ist:

$$\frac{Gl}{8} = \frac{\mathfrak{S} J}{c} = \frac{\mathfrak{S}\,\pi d^3}{32}, \text{ hieraus ist:}$$

$$G = \frac{8\,\mathfrak{S}\,\pi d^3}{32\,l} = \frac{8 \,.\, 0{,}683 \,.\, 3{,}14\,(314)^3}{32 \,.\, 6277} = 2622{,}5^{Kg}.$$

ad b) Wir benutzen hier dieselbe Formel, wie *ad a)*, vergrössern jedoch G um das Eigengewicht der Welle, das wir schon in der vorigen Aufgabe mit 315^{Kg} berechnet haben. Man erhält somit aus der Gleichung $(G + 315)\frac{l}{8} = \frac{\mathfrak{S} J}{c}$

$$G = \frac{8 \mathfrak{S} J}{c l} - 315 = \frac{8 \mathfrak{S} \pi d^3}{32 l} - 315,$$

das Glied $\frac{8 \mathfrak{S} \pi d^3}{32 l}$ haben wir bereits *ad a)* mit 2622,5 ausgerechnet, daher ist $G = 2622{,}5 - 315 = 2307{,}5^{Kg}$.

ad c) Die diesem Belastungsfalle entsprechende Formel für die Durchbiegung der Welle ist: $s = \frac{5 G l^3}{384 E J}$, da aber das Eigengewicht der Welle ebenfalls eine über die ganze Länge gleichmässig vertheilte Last darstellt, so hat man G um das Wellengewicht von 315^{Kg} zu vermehren; man erhält somit, wenn man noch für s den Werth $s = 0{,}001\, l$ setzt: $0{,}001\, l = \frac{5 l^3 (G + 315)}{384 E J}$, in dieser Gleichung ist $E = 1096$, $J_{\prime} = \frac{\pi}{64}(314)^4$, die Zahlenwerthe eingesetzt, gibt:

$$0{,}001\, l = \frac{5 l^3 (G + 315)}{384 \,.\, 1096 \,.\, \frac{\pi}{64}(314)^4}, \text{ oder}$$

$$0{,}001 = \frac{5\,(6277)^2 (G + 315)}{384 \,.\, 1096 \,.\, 0{,}0491\,(314)^4}, \text{ hieraus ist}$$

$$\frac{0{,}001 \,.\, 1096 \,.\, 0{,}0491\,(314)^4 \,.\, 384}{5\,(6277)^2} = G + 315, \text{ woraus}$$

$$G = \frac{0{,}001 \,.\, 1096 \,.\, 0{,}0491\,(314)^4 \,.\, 384}{5\,(6277)^2} - 315,$$

oder $G = 1018{,}14 - 315 = 703{,}14^{Kg}$ folgt.

13. In der Mitte einer liegenden, horizontalen Axe, die an ihren Enden unterstützt ist und die Länge l hat, wirke eine Last von P^{Kg}. Es sollen allgemeine, einfache Formeln zur Berechnung solcher Axen ohne Berücksichtigung des Eigengewichtes derselben aufgestellt werden, wenn der Querschnitt der Axe kreisförmig, quadratisch und ringförmig, das Material für die ersten zwei Querschnitte Schmiedeisen, Gusseisen und Holz, für den letzteren Querschnitt jedoch nur Gusseisen ist.

Auflösung. Der vorliegende Fall der Biegung ist der, dass ein prismatischer stabförmiger Körper an seinen Enden unterstützt und in der Mitte seiner Länge durch die Last P auf Biegung beansprucht ist. Die hier zur Querschnittsberechnung anzuwendende Festigkeitsformel ist daher $\frac{Pl}{4} = \frac{\mathfrak{S} J}{c}$.

1) Der Querschnitt ist eine Kreisfläche und die Axe aus Schmiedeisen.

Es ist dann $\frac{J}{c} = \frac{\pi d^3}{32}$ und $\mathfrak{S} = 6$ zu setzen; man erhält hiermit:

$$\frac{Pl}{4} = \frac{6 \pi d^3}{32}, \text{ woraus } d^{mm} = \sqrt[3]{\frac{8 Pl}{6 \,.\, 3{,}14}} = 0{,}752 \sqrt{P} \text{ folgt.}$$

2) Der Querschnitt ist quadratisch und die Axe aus Schmiedeisen.

Es ist dann $\frac{J}{c} = \frac{a^3}{6}$, wenn die Quadratseite mit a bezeichnet wird. Man erhält:

$$\frac{Pl}{4} = 6 \,.\, \frac{a^3}{6} = a^3, \text{ woraus } a = \sqrt[3]{\frac{Pl}{4}} = 0{,}63 \sqrt[3]{Pl} \text{ folgt.}$$

3) Der Querschnitt ist kreisringförmig, die Axe aus Gusseisen.

Hier ist $\frac{J}{c} = \frac{\pi}{32} \,.\, \frac{d_2^4 - d_1^4}{d_2}$ und $\mathfrak{S} = 2{,}5$ zu setzen, wobei der äussere Durchmesser mit d_2, der innere Durchmesser mit d_1 bezeichnet ist. Man erhält: $\frac{Pl}{4} = 2{,}5 \,.\, \frac{\pi}{32} \,.\, \frac{d_2^4 - d_1^4}{d_2}$, setzen wir $\frac{d_1}{d_2} = \psi$, gleich einer bekannten Grösse, so ist:

$$\frac{Pl}{4} = 2{,}5 \,.\, \frac{\pi}{32} \,.\, \frac{d_2^4 - \psi^4 d_2^4}{d_2} = 2{,}5 \,.\, 0{,}0982 \, d_2^3 (1 - \psi^4), \text{ oder}$$

$$\frac{Pl}{4} = 0{,}2455 \, d_2^3 (1 - \psi^4); \text{ hieraus ist}$$

$$d_2^{mm} = \sqrt[3]{\frac{Pl}{4 \,.\, 0{,}2455 (1 - \psi^4)}} = 1{,}006 \sqrt[3]{\frac{Pl}{1 - \psi^4}},$$

$d_1 = d_2 \psi$; das Höhlungsverhältniss ψ wird beliebig, jedoch so angenommen, dass die daraus resultirende Wandstärke der praktischen

Ausführung der Axe keine Schwierigkeiten macht, d. h. weder zu gering, noch zu gross sei.

4) Der Querschnitt ist eine volle Kreisfläche und die Axe aus Gusseisen.

Hier ist $\frac{J}{c} = \frac{\pi d^3}{32}$, $\mathfrak{S} = 2{,}5$, man erhält hiermit

$$\frac{Pl}{4} = \frac{2{,}5 \, \pi d^3}{32}, \text{ woraus}$$

$$d^{mm} = \sqrt[3]{\frac{32\,Pl}{4 \, . \, 2{,}5 \, . \, 3{,}14}} = \sqrt[3]{\frac{32\,Pl}{31{,}4}} = 1{,}006 \sqrt[3]{Pl} \text{ folgt.}$$

5) Der Querschnitt ist quadratisch und die Axe aus Gusseisen.

Hier ist $\frac{J}{c} = \frac{a^3}{6}$, wenn wir die Quadratseite mit a bezeichnen. Man erhält:

$$\frac{Pl}{4} = \frac{\mathfrak{S}\, a^3}{6} = 2{,}5 \, . \, \frac{a^3}{6}, \text{ woraus } a = \sqrt[3]{\frac{6\,Pl}{4 \, . \, 2{,}5}} \text{ oder}$$

$$a^{mm} = \sqrt[3]{0{,}6\,Pl} = 0{,}843 \sqrt[3]{Pl} \text{ folgt.}$$

6) Der Querschnitt ist kreisförmig und die Axe aus Holz.

Hier ist $\frac{J}{c} = \frac{\pi d^3}{32}$ und $\mathfrak{S} = 0{,}5$ einzusetzen. Man erhält

$$\frac{Pl}{4} = 0{,}5 \, \frac{\pi d^3}{32}, \text{ woraus}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32\,Pl}{4\,\mathfrak{S}\,\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16\,Pl}{\pi}} = 1{,}7213 \sqrt[3]{Pl} \text{ folgt.}$$

7) Der Querschnitt ist quadratisch und die Axe aus Holz.

Hier ist $\frac{J}{c} = \frac{a^3}{6}$ und $\mathfrak{S} = 0{,}5$ einzusetzen, wenn mit a die Seite des Quadrates bezeichnet wird. Man erhält:

$$\frac{Pl}{4} = 0{,}5 \, . \, \frac{a^3}{6}, \text{ woraus } a = \sqrt[3]{\frac{6\,Pl}{4 \, . \, 0{,}5}} = \sqrt[3]{3\,Pl} \text{ oder}$$

$$a = 1{,}442 \sqrt[3]{Pl} \text{ folgt.}$$

In der folgenden Tabelle sind die in der letzten Aufgabe erhaltenen Resultatformeln zusammengestellt.

Form des Axenquerschnittes	Material der Axe		
	Schmiedeeisen	Gusseisen	Holz
Fig. 47.	$d = 0{,}752\sqrt[3]{Pl}$	$d = 1{,}006\sqrt[3]{Pl}$	$d = 1{,}72\sqrt[3]{Pl}$
Fig. 48.	$a = 0{,}63\sqrt[3]{Pl}$	$a = 0{,}843\sqrt[3]{Pl}$	$a = 1{,}442\sqrt[3]{Pl}$
Fig 49.		$d_2 = 1{,}006\sqrt[3]{\frac{Pl}{1-\psi^4}}$ $d_1 = d_2\,\psi$	

14. In der Mitte einer horizontal liegenden Axe, die an ihren Enden unterstützt ist, und die Länge l hat, wirke eine Last von P^{Kg}; es sollen einfache, allgemeine Formeln zur Berechnung solcher Axen entwickelt werden, wenn von der Durchbiegung ausgegangen und diese gleich dem tausendsten Theile der Länge der Axe, also $s = 0{,}001\,l$ genommen wird. Die Axen sind prismatisch, aus Schmiedeisen, Gusseisen und Eichenholz, von kreisförmigem, quadratischem und kreisringförmigem Querschnitte. Das Eigengewicht der Axen soll unberücksichtigt bleiben.

Auflösung. Dem vorliegenden Belastungs- und Unterstützungsfall entspricht für die Durchbiegung der elastischen Linie in der Mitte der Länge die Formel: $s = 0{,}001\,l = \frac{l^3 P}{48\,E J}$.

a) Schmiedeiserne Axe.

1) Der Querschnitt ist kreisförmig.

Hier ist $E = 20000$, $J = \frac{\pi d^4}{64}$; hiermit erhält man:

$$0{,}001\, l = \frac{l^3 P}{48\, E \,.\, \frac{\pi d^4}{64}}, \text{ oder}$$

$$\frac{\pi d^4}{64} = \frac{P l^2}{48 \,.\, 0{,}001\, E}, \text{ woraus } d^4 = \frac{64\, P l^2}{48 \,.\, 0{,}001\, E \pi} \text{ und}$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{64\, P l^2}{48 \,.\, 0{,}001 \,.\, 20000 \,.\, 3{,}14}} = \sqrt[4]{\frac{P l^2}{47{,}1}} = 0{,}382 \sqrt[4]{P l^2} \text{ oder}$$

$$d = 0{,}382 \sqrt{l} \sqrt[4]{P} \text{ folgt.}$$

2) Der Querschnitt ist quadratisch.

Hier ist $J = \frac{a^4}{12}$ einzusetzen, wenn a die Quadratseite bezeichnet; man erhält aus der Gleichung $0{,}001 = \frac{l^2 P}{48\, E J}$:

$$J = \frac{P l^2}{48 \,.\, 0{,}001\, E} = \frac{P l^2}{48 \,.\, 0{,}001 \,.\, 20000} = \frac{P l^2}{960}$$

und da $J = \frac{a^4}{12}$ ist, so hat man $\frac{a^4}{12} = \frac{P l^2}{960}$, woraus

$$a = \sqrt[4]{\frac{12\, P l^2}{960}} = 0{,}3344 \sqrt{l} \,.\, \sqrt[4]{P} \text{ folgt.}$$

b) Gusseiserne Axe.

1) Der Querschnitt ist kreisförmig.

Hier ist $E = 10000$, $J = \frac{\pi d^4}{64}$ in der Formel „$0{,}001 = \frac{l^2 P}{48\, E J}$“ einzusetzen, hieraus ist $J = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{P l^2}{48 \,.\, 0{,}001 \,.\, 10000} = \frac{P l^2}{480}$, woraus

$$d = \sqrt[4]{\frac{64\, P l^2}{480\, \pi}} = 0{,}46 \sqrt{l} \sqrt[4]{P} \text{ folgt.}$$

2) Der Querschnitt ist quadratisch.

Man setze hier $J = \frac{a^4}{12}$ und $E = 10000$ in der Formel für die Durchbiegung, oder in der aus letzterer hervorgehenden Gleichung „$J = \frac{P l^2}{0{,}048\, E}$“ ein und erhält: $\frac{a^4}{12} = \frac{P l^2}{0{,}048 \,.\, 10000} = \frac{P l^2}{480}$, wobei

a die Seite des Quadrats bezeichnet; aus der letzten Gleichung folgt:

$$a = \sqrt[4]{\frac{12\,Pl^2}{480}} = 0{,}398\,\sqrt{l}\,\sqrt[4]{P}.$$

3) Der Querschnitt ist kreisringförmig.

Wir setzen in der Gleichung $J = \frac{Pl^2}{480}$ für J den Werth $J = \frac{\pi}{64}(d_0^4 - d_1^4)$ ein, wobei d_0 den äusseren, d_1 den inneren Durchmesser bedeuten. Man erhält: $\frac{\pi}{64}(d_0^4 - d_1^4) = \frac{Pl^2}{480}$; nehmen wir zwischen d_0 und d_1 ein Verhältniss an, und setzen $\frac{d_1}{d_0} = \psi$ als eine bekannnte Grösse voraus, so ist $\frac{\pi d_0^4}{64}(1 - \psi^4) = \frac{Pl^2}{480}$, woraus

$$d_0 = \sqrt[4]{\frac{64\,Pl^2}{480\,\pi\,(1 - \psi^4)}} = 0{,}46\,\sqrt{l}\,\sqrt[4]{\frac{P}{1 - \psi^4}}$$

folgt; es ist ferner $d_1 = d_0\,\psi$.

c) Eichenholzaxe.

1) Der Querschnitt ist kreisförmig.

Wir setzen in der Gleichung $J = \frac{Pl^2}{0{,}048\,E}$ für J den Werth $J = \frac{\pi d^4}{64}$ und $E = 1200$ ein, und erhalten:

$$\frac{\pi d^4}{64} = \frac{Pl^2}{0{,}048 \,.\, 1200} = \frac{Pl^2}{57{,}6}, \text{ woraus}$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{64\,Pl^2}{57{,}6\,\pi}} = 0{,}772\,\sqrt{l}\,\sqrt[4]{P} \text{ folgt.}$$

2) Der Querschnitt ist quadratisch.

Wir setzen in der Gleichung $J = \frac{Pl^2}{0{,}048\,E}$ für J den Werth $J = \frac{a^4}{12}$ und $E = 1200$ ein, wobei a die Seite des Quadrates bezeichnet. Man erhält:

$$\frac{a^4}{12} = \frac{Pl^2}{0{,}048 \,.\, 1200} = \frac{Pl^2}{57{,}6}, \text{ woraus}$$

$$a = \sqrt[4]{\frac{12\,Pl^2}{57{,}6}} = 0{,}675\,\sqrt{l}\,\sqrt[4]{P} \text{ folgt.}$$

Beantworten wir nun noch die Fragen: 1. Wie gross ist die Spannung (an der äussersten, stärkst gezogenen oder gedrückten Faserschichte), die in den Axen, deren Querschnittsdimensionen wir jetzt aus der Formel für die Durchbiegung berechnet haben, bei der Belastung P im Angriffspunkte derselben eintritt? 2. In welchem Falle liefern die Formeln für das Widerstandsmoment $\frac{Pl}{4} = \frac{\mathfrak{S} J}{c}$ und für die Biegung $s = \frac{Pl^3}{48 EJ}$ die gleichen Querschnittsdimensionen?

ad 1) Aus der Gleichung $\frac{Pl}{4} = \frac{\mathfrak{S} J}{c}$ folgt $P = \frac{4 \mathfrak{S} J}{l c}$, aus der Gleichung $s = \frac{Pl^3}{48 EJ}$ folgt: $P = \frac{48 EJs}{l^3}$; diese beiden Werthe von P einander gleich gesetzt:

$$\frac{4 \mathfrak{S} J}{l c} = \frac{48 EJs}{l^3}, \text{ hieraus ist } \mathfrak{S} = \frac{12 Esc}{l^2};$$

nehmen wir wieder $s = 0{,}001\, l$, so ist $\mathfrak{S} = \frac{0{,}012\, Ec}{l}$, hieraus ergibt sich für die gusseiserne Axe mit $E = 10000$ und für den Kreisquerschnitt mit $c = \frac{d}{2}$ der Werth von

$$\mathfrak{S} = \frac{0{,}012 \,.\, 10000 \,.\, d}{2 l} = 60 \frac{d}{l}.$$

Hat man nun den Durchmesser d der Axe aus der Formel für die Durchbiegung gefunden, so dient die letzte Gleichung für $\mathfrak{S}$ zur Berechnung der grössten Faserspannung, wobei jedoch vorausgesetzt wird, dass die Last P so gross sei, dass die Durchbiegung $s = 0{,}001\, l$ sei. Führen wir in die für den Kreisquerschnitt und jedes Material geltende Formel $\mathfrak{S} = \frac{6 Esd}{l^2}$ für d den Werth ein, der sich aus der Gleichung $s = \frac{Pl^3}{48 EJ}$, oder $J = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{l^3 P}{48 s E}$ mit $d = \sqrt[4]{\frac{64 l^3 P}{48 \pi Es}}$ ergibt, so hat man

$$\mathfrak{S} = \frac{6 Es}{l^2} \sqrt[4]{\frac{64 l^3 P}{48 \pi Es}} = 6 \sqrt[4]{\frac{64 l^3 Ps^4 E^4}{48 \pi Esl^8}}, \text{ oder } \mathfrak{S} = 6 \sqrt[4]{\frac{64 Ps^3 E^3}{48 \pi l^5}};$$

aus dieser Gleichung ist ersichtlich, von welchen Factoren die Spannung $\mathfrak{S}$ abhängig ist. Bezeichnen wir die in den Axen von

kreisförmigem, quadratischem und kreisringförmigem Querschnitte eintretenden Spannungen mit $\mathfrak{S}_\bullet$, $\mathfrak{S}_\blacksquare$ und $\mathfrak{S}_\circ$ und geben jedem dieser Buchstaben noch den Index s, oder g, oder h, je nachdem wir die Spannung in einer schmiedeisernen, oder gusseisernen, oder hölzernen Axe berechnen, so hat man für den Kreisquerschnitt, wie oben berechnet: $\mathfrak{S}_\bullet = 6\sqrt[4]{\frac{4\,Ps^3E^3}{3\pi l^6}}$. Für den quadratischen Querschnitt erhält man, wenn man in der Gleichung $\mathfrak{S} = \frac{12\,Esc}{l^2}$ für c den Werth $c = \frac{a}{2}$ einsetzt, $\mathfrak{S} = \frac{6\,Esa}{l^2}$; hierin für die Quadratseite a den Werth gesetzt, der sich aus der Gleichung

$$J = \frac{a^4}{12} = \frac{Pl^3}{48\,Es} \text{ mit } a = \sqrt[4]{\frac{12\,Pl^3}{48\,sE}} = \sqrt[4]{\frac{Pl^3}{4\,sE}}$$

ergibt, so erhält man für den Quadratquerschnitt:

$$\mathfrak{S}_\blacksquare = \frac{6\,Es}{l^2}\sqrt[4]{\frac{Pl^3}{4\,sE}} = 6\sqrt[4]{\frac{Pl^3E^4s^4}{4\,sEl^8}} = 6\sqrt[4]{\frac{PE^3s^3}{4\,l^5}}.$$

Für den Kreisringquerschnitt mit dem äusseren Durchmesser d_0 und dem inneren d_1 hat man $\mathfrak{S} = \frac{6\,Esd_0}{l^2}$ und hierin für d_0 den Werth gesetzt, der sich aus der Gleichung

$$J = \frac{\pi}{64}(d_0^4 - d_1^4) = \frac{Pl^3}{48\,Es}, \text{ oder wegen } d_1^4 = d_0^4\psi^4, \text{ aus}$$

$$\frac{\pi d_0^4}{64}(1 - \psi^4) = \frac{Pl^3}{48\,Es}, \text{ mit } d_0 = \sqrt[4]{\frac{64\,Pl^3}{\pi(1-\psi^4)\,48\,Es}}$$

ergibt, so hat man für den Kreisringquerschnitt:

$$\mathfrak{S}_\circ = \frac{6\,Es}{l^2}\sqrt[4]{\frac{4\,Pl^3}{3\pi(1-\psi^4)\,Es}} = 6\sqrt[4]{\frac{4\,PE^3s^3}{3\pi(1-\psi^4)\,l^5}}.$$

Setzt man nun in die Formeln für $\mathfrak{S}_\bullet$, $\mathfrak{S}_\blacksquare$ und $\mathfrak{S}_\circ$ die Durchbiegung $s = 0{,}001\,l$, sowie für E nach und nach die Werthe $E = 20000$, $E = 10000$, $E = 1200$, entsprechend den Materialien „Schmiedeisen, Gusseisen, Eichenholz“, ein, so erhält man für die schmiedeiserne Axe

1) Für den Kreisquerschnitt:

$$\mathfrak{S}_\bullet = 6\sqrt[4]{\frac{4\,P(0{,}001\,l)^3(20000)^3}{3\pi l^6}} = 6\sqrt[4]{\frac{8000\,P.4}{3.3{,}14\,l^3}} = 45{,}801\sqrt[4]{\frac{P}{l^3}}$$

oder

$$\mathfrak{S}_{\bullet} = 45{,}801 \cdot \frac{\sqrt[4]{P}}{\sqrt{l}}.$$

2) Für den Quadratquerschnitt:

$$\mathfrak{S}_{\blacksquare} = \sqrt[4]{\frac{P(20000)^3(0{,}001\,l)^3}{4\,l^5}} = 6\sqrt[4]{\frac{2000\,P}{l^2}} = 40{,}15\sqrt[4]{\frac{P}{l^2}},\ \text{oder}$$

$$\mathfrak{S}_{\blacksquare} = 40{,}15\frac{\sqrt[4]{P}}{\sqrt{l}}.$$

Für die Gusseisenaxe erhält man:

1) Für den Kreisquerschnitt:

$$\mathfrak{S}_{\bullet} = 6\sqrt[4]{\frac{4\,P(0{,}001\,l)^3(10000)^3}{3\,\pi\,l^5}} = 6\sqrt[4]{\frac{4000\,P}{3\,\pi\,l^2}} = 27{,}2364\sqrt[4]{\frac{P}{l^2}},$$

oder

$$\mathfrak{S}_{\bullet} = 27{,}2364\frac{\sqrt[4]{P}}{\sqrt{l}}.$$

2) Für den Quadratquerschnitt:

$$\mathfrak{S}_{\blacksquare} = 6\sqrt[4]{\frac{P(10000)^3(0{,}001\,l)^3}{4\,l^5}} = 23{,}8578\frac{\sqrt[4]{P}}{\sqrt{l}}.$$

3) Für den Kreisringquerschnitt:

$$\mathfrak{S}_{\circ} = 6\sqrt[4]{\frac{4\,P(10000)^3(0{,}001\,l)^3}{3\pi(1-\psi^4)\,l^5}} = 6\sqrt[4]{\frac{4000\,P}{3\pi(1-\psi^4)\,l^2}},\ \text{oder}$$

$$\mathfrak{S}_{\circ} = 27{,}2364\sqrt[4]{\frac{P}{(1-\psi^4)\,l^2}}.$$

Für die Eichenholzaxe erhält man:

1) Für den Kreisquerschnitt:

$$\mathfrak{S}_{\bullet} = 6\sqrt[4]{\frac{4\,P(0{,}001\,l)^3(1200)^3}{3\,\pi\,l^5}} = 6\sqrt[4]{\frac{2{,}304\,P}{\pi\,l^2}},\ \text{oder}$$

$$\mathfrak{S}_{\bullet} = 5{,}553\frac{\sqrt[4]{P}}{\sqrt{l}}.$$

2) Für den Quadratquerschnitt:

$$\mathfrak{S}_{\blacksquare} = 6\sqrt[4]{\frac{P(1200)^3(0{,}001\,l)^3}{4\,l^5}} = 6\sqrt[4]{\frac{0{,}432\,P}{l^2}} = 4{,}8642\frac{\sqrt[4]{P}}{\sqrt{l}}.$$

Will man diese Werthe von $\mathfrak{S}$ durch die Länge und eine Querschnittsdimension ausdrücken, so darf man nur in der allgemeinen Formel $\mathfrak{S} = \frac{12\,E\,s\,c}{l^2}$ für E die den Materialien „Schmiedeeisen, Gusseisen und Eichenholz" entsprechenden Werthe, $E = 20000$, $E = 10000$, $E = 1200$, ferner $c = \frac{d}{2}$ für den Kreisquerschnitt, $c = \frac{a}{2}$ für den Quadratquerschnitt, $c = \frac{d_0}{2}$ für den Kreisringquerschnitt, sowie $s = 0{,}001\,l$ einsetzen. Man erhält hierdurch:

$$\mathfrak{S}_{s\bullet} = \frac{0{,}012\,.\,20000\,d}{2\,l} = \frac{120\,d}{l},\quad \mathfrak{S}_{s\blacksquare} = \frac{0{,}012\,.\,20000\,a}{2\,l} = \frac{120\,a}{l},$$

$$\mathfrak{S}_{g\bullet} = \frac{0{,}012\,.\,10000\,d}{2\,l} = \frac{60\,d}{l},\quad \mathfrak{S}_{g\blacksquare} = \frac{0{,}012\,.\,10000\,a}{2\,l} = \frac{60\,a}{l},$$

$$\mathfrak{S}_{g\circ} = \frac{0{,}012\,.\,10000\,d_0}{2\,l} = \frac{60\,d_0}{l},\quad \mathfrak{S}_{h\bullet} = \frac{0{,}012\,.\,1200\,d}{2\,l} = \frac{7{,}2\,d}{l},$$

$$\mathfrak{S}_{h\blacksquare} = \frac{0{,}012\,.\,1200\,.\,a}{2\,l} = \frac{7{,}2\,a}{l}.$$

Aus diesen und den unmittelbar vorher entwickelten Formeln zur Berechnung der Spannung ist ersichtlich, dass die hier gezeigte Berechnung der Querschnittsdimensionen auf Grund der Durchbiegung $s = 0{,}001\,.\,l$ nur in den Fällen brauchbare Resultate liefert, in welchen die nach den letzten Formeln für $\mathfrak{S}$ berechnete, eintretende grösste Faserspannung die zulässige Grenze nicht überschreitet. Gesetzt, eine Schmiedeisenaxe mit Kreisquerschnitt des vorliegenden Unterstützungs- und Belastungsfalles sei mit $P = 10000^{Kg}$ belastet und habe eine Länge von $l = 900^{mm}$; dann ergibt sich die in derselben eintretende grösste Spannung mit

$$\mathfrak{S} = 45{,}801\,\frac{\sqrt[4]{10000}}{\sqrt{900}} = 45{,}801\,.\,\frac{10}{30}$$

oder $\mathfrak{S} = 15{,}267^{Kg}$; da wir aber hier $\mathfrak{S} = 6$ als zulässige Grenze betrachten, so würde in diesem Falle die Axe, deren Durchmesser auf Grund der Durchbiegung $s = 0{,}001\,l$ berechnet wurde, zu geringe Sicherheit gegen Bruch bieten; soll daher $\mathfrak{S} \overline{\overline{<}}\, 6$ sein, so muss

$$6 \overline{\overline{<}}\, 45{,}801\,\frac{\sqrt[4]{P}}{\sqrt{l}} \text{ oder } \frac{l^2}{P} \overline{\overline{>}}\, 3397{,}028 \text{ sein.}$$

Für die obigen Zahlenwerthe von $P = 10000$ und $l = 900$ erhält man auch $\frac{l^2}{P} = \frac{810000}{10000} = 81$, also einen viel zu geringen Werth. In gleicher Weise erhält man für die Schmiedeisenaxe mit Quadratquerschnitt für $\mathfrak{S} \overline{\gtrless} 6$

$$6 \overline{\gtrless} 40,15 \frac{\sqrt[4]{P}}{\sqrt{l}} \text{ oder } \frac{l^2}{P} \overline{\gtrless} 2000.$$

Für die Gusseisenaxe mit Kreisquerschnitt muss für $\mathfrak{S} \overline{\gtrless} 2,5$ auch $2,5 \overline{\gtrless} 27,2364 \frac{\sqrt[4]{P}}{\sqrt{l}}$ oder $\frac{l^2}{P} \overline{\gtrless} 14073,93$ sein; für die Gusseisenaxe mit Kreisringquerschnitt ist für $\mathfrak{S} \overline{\gtrless} 2,5$ auch

$$2,5 \overline{\gtrless} 27,2364 \sqrt[4]{\frac{P}{(1-\psi^4)\, l^2}} \text{ oder } \frac{(1-\psi^4)\, l^2}{P} \overline{\gtrless} 14073,93,$$

und für den Quadratquerschnitt ist für $\mathfrak{S} \overline{\gtrless} 2,5$

$$2,5 \leqq 23,8578 \frac{\sqrt[4]{P}}{\sqrt{l}} \text{ oder } \frac{l^2}{P} \overline{\gtrless} 8286,445.$$

Für die Eichenholzaxe hat man: für den Kreisquerschnitt mit $\mathfrak{S} \overline{\gtrless} 0,5$, $0,5 \overline{\gtrless} 5,553 \frac{\sqrt[4]{P}}{\sqrt{l}}$ oder $\frac{l^2}{P} \overline{\gtrless} 15234,61$, für den Quadratquerschnitt ist für $\mathfrak{S} \overline{\gtrless} 0,5$, $0,5 \overline{\gtrless} 4\,8642 \frac{\sqrt[4]{P}}{\sqrt{l}}$ oder $\frac{l^2}{P} \overline{\gtrless} 8957,95$. Aus diesen für den Quotienten $\frac{l^2}{P}$ gefundenen, numerischen Werthen geht hervor, dass die Berechnung der Querschnittsdimensionen der behandelten Axen aus der Formel für die Durchbiegung

$$s = 0,001\, l \frac{P l^3}{48\, E J}$$

gleiche, grössere oder kleinere Werthe liefert, als die Berechnung derselben Dimensionen aus dem Widerstandsmomente $M = \frac{P l}{4} = \mathfrak{S}\, Z$, je nachdem der Quotient $\frac{l^2}{P}$ gleich, grösser oder kleiner ist, als

der ihm entsprechende, dafür gefundene numerische Werth. Es wäre z. B. bei einer Schmiedeisenaxe mit Kreisquerschnitt $l = 2^m$, $P = 5000^{Kg}$, dieses gibt $\frac{l^3}{P} = \frac{(2000)^2}{5000} = \frac{4000000}{5000} = 800$; da aber für diesen Fall $\frac{l^2}{P} \overline{\gtrless} 3397,028$ sein muss, um nicht bei Berechnung auf Grund der gestatteten Durchbiegung $s = 0,001\,l$ zu geringe Querschnittsdimensionen zu erhalten, so folgt daraus, dass bei den vorliegenden Zahlenwerthen von l und P die Querschnittsberechnung nicht auf Grund der Durchbiegung, sondern aus dem Widerstandsmomente $\frac{Pl}{4} = \frac{\mathfrak{S}J}{c}$ zu geschehen hat. Es wäre z. B. bei einer Schmiedeisenaxe mit Quadratquerschnitt $l = 2^m$, $P = 2000^{Kg}$, dann ist $\frac{l^2}{P} = \frac{4000000}{2000} = 2000$; denselben Werth hat aber auch der Quotient $\frac{l^2}{P}$, wenn die Querschnittsberechnung auf Grund der Durchbiegung dasselbe Resultat liefern soll, wie die Berechnung aus dem Widerstandsmoment. Man findet auch in der That nach den oben entwickelten Formeln:

$$a = 0,63\sqrt[3]{Pl} = 0,63\sqrt[3]{2000\,.\,2000} = 100^{mm} \text{ und}$$

$$a = 0,3344\sqrt{l}\sqrt[4]{P} = 0,3344\sqrt{2000}\sqrt[4]{2000} = 100^{mm};$$

hiermit ist auch die zweite Frage „in welchem Falle liefern die beiden Methoden zur Querschnittsberechnung dieselben Resultate" erledigt.

Unabhängig von den vorigen Betrachtungen gelangt man zur Beantwortung der zweiten Frage, d. i. zur Kenntniss der numerischen Werthe des Quotienten $\frac{l^2}{P}$ auf folgende Art: In die Gleichungen $\frac{Pl}{4} = \frac{\mathfrak{S}J}{c}$ und $s = \frac{Pl^3}{48\,EJ}$ für J den Werth gesetzt, der z. B. dem Quadratquerschnitt entspricht, so ist, wenn a die Quadratseite bezeichnet: $\frac{Pl}{4} = \frac{\mathfrak{S}a^3}{6}$, und $J = \frac{a^4}{12} = \frac{Pl^3}{48\,Es}$; die Werthe von a aus diesen beiden Gleichungen einander gleich gesetzt, gibt:

$$a = \sqrt[3]{\frac{3\,Pl}{2\,\mathfrak{S}}} = \sqrt[4]{\frac{Pl^3}{4\,Es}}.$$

die Wurzelexponenten auf gleiche Benennung gebracht:

$$\sqrt[12]{\frac{81\,P^4 l^4}{16\,\mathfrak{S}^4}} = \sqrt[12]{\frac{P^3 l^9}{64\,E^3 s^3}}, \text{ oder } \frac{81\,P}{\mathfrak{S}^4} = \frac{l^5}{4\,E^3 s^3},$$

oder $\frac{l^5 \mathfrak{S}^4}{E^3 s^3 P} = 324$; setzt man nun $s = 0{,}001\,l$ und für Schmiedeisen $\mathfrak{S} = 6$ und $E = 20000$, so hat man

$$\frac{l^5 \,.\, 6^4}{(20000)^3 (0{,}001\,l)^3 P} = 324, \text{ oder}$$

$$\frac{l^2}{P} = \frac{324\,(0{,}001)^3\,(20000)^3}{6^4} = 2000,$$

den bereits früher gefundenen Werth. In gleicher Weise erhält man für jeden anderen Querschnitt z. B. den kreisförmigen, den numerischen Werth des Quotienten $\frac{l^5 \mathfrak{S}^4}{E^3 s^3 P}$, wenn man die Werthe von d aus den Gleichungen $\frac{Pl}{4} = \frac{\mathfrak{S}\,\pi\,d^3}{32}$ und $\frac{\pi\,d^4}{64} = \frac{Pl^3}{48\,E s}$ einander gleich setzt; man erhält hierdurch: $d = \sqrt[3]{\frac{8\,Pl}{\mathfrak{S}\,\pi}} = \sqrt[4]{\frac{4\,Pl^3}{3\,\pi\,Es}}$, die Wurzelexponenten auf gleiche Benennung gebracht und von den Wurzelzeichen befreit:

$$\frac{4096\,P^4 l^4}{\mathfrak{S}^4 \pi^4} = \frac{64\,P^3 l^9}{27\,\pi^3 E^3 s^3}, \text{ oder } \frac{64\,P}{\mathfrak{S}^4 \pi} = \frac{l^5}{27\,E^3 s^3},$$

oder $\frac{l^5 \mathfrak{S}^4}{E^3 s^3 P} = 550{,}31847$, woraus mit $s = 0{,}001\,l$, $\mathfrak{S} = 6$ und $E = 20000$ für Schmiedeisen, $\frac{l^2}{P} = 3397{,}028$, wie bereits früher gefunden, hervorgeht. In der folgenden Tabelle sind die für die Querschnittsdimensionen der behandelten Axen entwickelten Formeln für d, a, d_0, sowie die Werthe der Spannungen und der Quotienten $\frac{l^2}{P}$ zusammengestellt.

Material der Axe.

	Schmiedeisen	Gusseisen	Eichenholz
Fig. 50. (d)	$d = 0{,}382\sqrt{l}\,\sqrt[4]{P}$	$d = 0{,}46\sqrt{l}\,\sqrt[4]{P}$	$d = 0{,}772\sqrt{l}\,\sqrt[4]{P}$
Fig. 51. (a)	$a = 0{,}3344\sqrt{l}\,\sqrt[4]{P}$	$a = 0{,}398\sqrt{l}\,\sqrt[4]{P}$	$a = 0{,}675\sqrt{l}\,\sqrt[4]{P}$
Fig. 52. (d_1, d_0)		$d_0 = 0{,}46\sqrt{l}\,\sqrt[4]{\frac{P}{1-\psi^4}}$ $d_1 = d_0\,\psi$	
$\mathfrak{S}_{\bullet} =$	$45{,}801\,\frac{\sqrt[4]{P}}{\sqrt{l}}$	$27{,}2364\,\frac{\sqrt[4]{P}}{\sqrt{l}}$	$5{,}553\,\frac{\sqrt[4]{P}}{\sqrt{l}}$
$\mathfrak{S}_{\blacksquare} =$	$40{,}15\,\frac{\sqrt[4]{P}}{\sqrt{l}}$	$23{,}8578\,\frac{\sqrt[4]{P}}{\sqrt{l}}$	$4{,}8642\,\frac{\sqrt[4]{P}}{\sqrt{l}}$
$\mathfrak{S}_{\circ} =$		$27{,}2364\,\sqrt[4]{\frac{P}{(1-\psi^4)\,l^2}}$	
$\bullet\ \frac{l^2}{P} \overline{\overline{>}}$	3397,028	14073,93	15234,61
$\blacksquare\ \frac{l^2}{P} \overline{\overline{>}}$	2000	8286,445	8957,95
$\circ\ \frac{l^2}{P} \overline{\overline{>}}$		$\frac{(1-\psi^4)\,l^2}{P} \overline{\overline{>}} 14073{,}93$	

Berechnung der Tragaxen von der Form der gleichen Festigkeit.

15. Es ist eine schmiedeiserne, einfach tragende Axe von Kreisquerschnitten zu berechnen, welche in ihren Enden gelagert ist und in der Entfernung $a_1 = 800^{mm}$ von dem einen Zapfenmittel ein 1500^{Kg} schweres Rad zu tragen hat. Die ganze Länge der Axe zwischen beiden Zapfenmitteln beträgt $l = 1200^{mm}$; die Axe soll die Form der gleichen Festigkeit haben (siehe beistehende Figur).

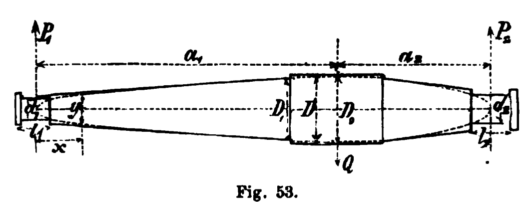


Fig. 53.

Auflösung. Um zunächst die Form der gleichen Festigkeit der Axe zu bestimmen, stellen wir für den Querschnitt im Angriffspunkte der Last und für einen beliebigen andern Axenquerschnitt vom Durchmesser y in der Entfernung x von dem einen Zapfenmittel die Festigkeitsgleichungen auf. Die Last Q in 2 zu ihr parallele Componenten P_1 und P_2 zerlegt, welche in den Zapfenmitteln angreifen, so stellen diese Componenten die Zapfendrücke vor, welche durch die vertical nach aufwärts wirkenden Lagerreactionen im Gleichgewicht erhalten werden. Aus der Momentengleichung

$$P_1 l = Q(l - a_1) = Q a_2 \text{ folgt:}$$

$$P_1 = \frac{Q a_2}{l} \text{ und } P_2 = Q - P_1 = Q - \frac{Q a_2}{l} = \frac{Q(l - a_2)}{l} = \frac{Q a_1}{l}.$$

Für den Querschnitt vom Durchmesser D_0 im Angriffspunkte der Last hat man: $P_1 a_1 = \frac{Q a_2 a_1}{l} = \frac{\mathfrak{S} \pi D_0^3}{32}$; für den Querschnitt vom Durchmesser y in der Entfernung x von dem einen Zapfenmittel ist: $P_1 x = \frac{Q a_2 x}{l} = \frac{\mathfrak{S} \pi y^3}{32}$. Da die Axe wegen ihrer Form der gleichen Festigkeit in allen ihren Querschnitten dieselbe Spannung $\mathfrak{S}$ haben muss, so setzen wir die Werthe von $\mathfrak{S}$ aus den beiden für die Querschnitte von den Durchmessern D_0 und y geltenden Festigkeitsgleichungen einander gleich, und haben:

$$\mathfrak{S} = \frac{32 P_1 a_1}{\pi D_0^3} = \frac{32 P_1 x}{\pi y^3}, \text{ woraus } y^3 = \frac{x D_0^3}{a_1}$$

folgt; dies ist aber die Gleichung einer kubischen Parabel, daher die theoretische Form der Axe vom Angriffspunkte der Last nach den

beiden Zapfenmitteln hin nach der kubischen Parabel als Form der gleichen Festigkeit zu bilden ist. Aus der letzten Gleichung folgt, dass für $x = o$, auch $y = o$ wird, daher die Axe nach den Enden hin sich zuspitzt. Da aber die Axe an den Enden gelagert werden muss und die Zapfen cylindrisch ausgeführt werden, ebenso auch der Axkopf (Theil der Axe, an welchem die Last angreift) wegen Aufnahme der cylindrischen Nabe des Rades einen Cylinder von einer gewissen Länge darstellen muss, so erhalten nur die Axschenkel (Theile der Axe zwischen Axkopf und Zapfen) die angenäherte Form der gleichen Festigkeit, indem sie in Gestalt von Kegelstumpfen ausgeführt werden. Zur Berechnung der Zapfen hat man die Gleichungen: $\frac{P_1 l_1}{2} = \frac{\mathfrak{S} \pi d_1^3}{32}$ und $\frac{P_2 l_2}{2} = \frac{\mathfrak{S} \pi d_2^3}{32}$. Wir setzen $\frac{l_1}{d_1} = \frac{l_2}{d_2} = 1{,}5$ und haben mit $\mathfrak{S} = 6$, $P_1 = \frac{Q a_2}{l} = \frac{1500 \,.\, 400}{1200}$ oder $P_1 = 500$ und $P_2 = Q - P_1 = 1500 - 500 = 1000^{Kg}$; es ist $d_1 = 1{,}13 \sqrt{P_1} = = 1{,}13 \sqrt{500} = 25^{mm}$; $l_1 = 1{,}5\, d_1 = 1{,}5 \,.\, 25 = 38^{mm}$, $d_2 = 1{,}13 \,.\, \sqrt{P_2} = 1{,}13 \,.\, \sqrt{1000} = 36^{mm}$; $l_2 = 1{,}5\, d_2 = 1{,}5 \,.\, 36 = 54^{mm}$. (Siehe Berechnung von Zapfen.)

Um Form und Dimensionen der Axschenkel genau zu bestimmen, denken wir uns die Länge $a_1 = 800^{mm}$ in vier und die Länge $a_2 = 400^{mm}$ auch in vier gleiche Theile getheilt; die Abstände dieser Theilpunkte von den Zapfenmitteln bezeichnen wir

mit x_1' x_2' x_3' für den linken Axschenkel,
,, x_1'' x_2'' x_3'' ,, ,, rechten ,,

und berechnen für diese Stellen der Axe die Durchmesser. Die diesen entsprechenden Werte von y_1', y_2', y_3', D_0' und y_1'', y_2'', y_3'', D_0'', welche zu den Werthen

$$x_1' = 200,\ x_2' = 400,\ x_3' = 600,\ a_1 = 800^{mm}$$
$$x_1'' = 100,\ x_2'' = 200,\ x_3'' = 300,\ a_2 = 400^{mm}$$

gehören, findet man aus der bereits entwickelten Gleichung $y^3 = \frac{D_0^3 x}{a_1}$ mit $y = D_0 \sqrt[3]{\frac{x}{a_1}}$ (nachdem natürlich schon vorher der Werth von D_0 aus der Gleichung $\frac{Q a_1 a_2}{l} = \frac{\mathfrak{S} \pi D_0^3}{32}$ bestimmt worden war), indem man für x nacheinander die verschiedenen Werthe von x, nämlich $x_1' = 200$, $x_2' = 400$ u. s. w. einsetzt. Die Berechnung der verschiedenen Werthe von y kann jedoch auch wie folgt geschehen: Für den Zapfen vom Durchmesser d_1 hat man: $\frac{P_1 l_1}{2} = \frac{\mathfrak{S} \pi d_1^3}{32}$, für

irgend einen Querschnitt vom Durchmesser y in der Entfernung x vom linken Zapfenmittel hat man $P_1 x = \frac{\mathfrak{S} \pi y^3}{32}$, aus welchen beiden Gleichungen durch Gleichsetzung der Werthe von $\mathfrak{S}$ folgt:

$$\frac{y^3}{x} = \frac{d_1^3}{{}^1/_2\, l_1}, \text{ hieraus ist } y = d_1 \sqrt[3]{\frac{2x}{l_1}} = d_1 \sqrt[3]{\frac{2}{l_1}} \cdot \sqrt[3]{x} \text{ oder}$$

$$y = d_1 \sqrt[3]{\frac{2}{38}} \cdot \sqrt[3]{x} = 0{,}37475\, d_1 \sqrt[3]{x};$$

in diese Gleichung für x nach einander die Werthe x_1' x_2' u. s. w. eingesetzt:

$$y_1' = 0{,}375\, d_1 \sqrt[3]{x_1'} = 0{,}375 \,.\, 25 \sqrt[3]{200} = 0{,}375 \,.\, 25 \,.\, 5{,}848 \;\;= 55^{mm}$$

$$y_2' = 0{,}375\, d_1 \sqrt[3]{x_2'} = 0{,}375 \,.\, 25 \sqrt[3]{400} = 0{,}375 \,.\, 25 \,.\, 7{,}3681 = 69^{mm}$$

$$y_3' = 0{,}375\, d_1 \sqrt[3]{x_3'} = 0{,}375 \,.\, 25 \sqrt[3]{600} = 0{,}375 \,.\, 25 \,.\, 8{,}4343 = 80^{mm}$$

$$D_0' = 0{,}375\, d_1 \sqrt[3]{a_1} = 0{,}375 \,.\, 25 \sqrt[3]{800} = 0{,}375 \,.\, 25 \,.\, 9{,}2832 = 87^{mm}$$

Zur Bestimmung der Durchmesser des rechten Axschenkels setze man in die Formel $y = d_2 \sqrt[3]{\frac{2x}{l_2}} = 36 \sqrt[3]{\frac{2}{54}} \cdot \sqrt[3]{x} = 12 \sqrt[3]{x}$ für x nacheinander die Werthe $x_1'' = 100$, $x_2'' = 200$, $x_3'' = 300$; man erhält:

$$y_1'' = 12 \sqrt[3]{x_1''} = 12 \sqrt[3]{100} = 56^{mm}$$

$$y_2'' = 12 \sqrt[3]{x_2''} = 12 \sqrt[3]{200} = 70^{mm}$$

$$y_3'' = 12 \sqrt[3]{x_3''} = 12 \sqrt[3]{300} = 80{,}4^{mm}.$$

Dass der Werth von $D_0'' = 12 \sqrt[3]{a_2}$ übereinstimmen müsse mit D_0' geht schon daraus hervor, dass die diesen Querschnitt beanspruchenden Biegungsmomente, von der linken oder rechten Seite an gerechnet, einander gleich sein müssen; es muss bekanntlich für's Gleichgewicht $P_1 a_1 = P_2 a_2 = \frac{\mathfrak{S} \pi D_0^3}{32}$ sein. Die Länge des Axkopfes nehmen wir entsprechend der Nabenlänge des Rades mit $L = 200^{mm}$, den wirklichen Durchmesser D des Axkopfes nehmen wir wegen der an demselben anzubringenden Keilnuten zur Befestigung des Rades mit $D = 96^{mm}$.

Die Bestimmung der Zapfendrücke P_1 und P_2, sowie der die einzelnen Querschnitte der Axe beanspruchenden statischen Momente nach der Methode der graphischen Statik geschieht wie

folgt*): Man errichte auf der zur Mittellinie der Axe parallel gezogenen Geraden AC im Punkte A eine Senkrechte, trage auf dieser von einem beliebigen Punkte a aus die Last Q auf, mache also $a,1 = Q$, verbinde einen beliebigen Punkt B der Kraftrichtung von Q mit den Punkten A und C, ziehe aus den Punkten a und 1 die Geraden $a\,O \parallel AB$, $1,O \parallel BC$ und aus dem Durchschnittspunkte dieser beiden Parallelen, dem Punkte O, die Gerade $2,O \parallel AC$.

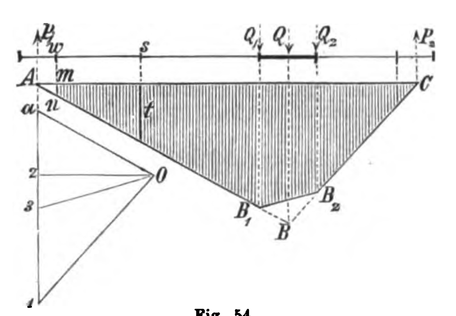


Fig. 54.

Fällt man noch aus den Axkopfbegrenzungen Senkrechte AC, verbindet die Durchschnittspunkte B_1 und B_2 dieser Senkrechten mit den Geraden AB und BC mit einander, und zieht $O,3 \parallel B_1 B_2$, so erhält man in der Strecke $a,2$ die Kraft P_1, also $a,2 = P_1$, $2,1 = P_2$, $a,3 = Q_1$, $3,1 = Q_2$, wenn Q_1 und Q_2 die an den Axkopfrändern wirkenden Componenten bedeuten, in welche man sich die Last Q zerlegt denken kann. Die Fläche $A B_1 B_2 C A$ ist die Momentenfläche, weil nach der Lehre der Graphostatik die der Lastrichtung parallelen Ordinaten der geschlossenen Seilpolygonfläche die Momente darstellen, welche an den Durchschnittspunkten der Ordinaten mit der Mittellinie der Axe diese letztere auf Biegung beanspruchen; es stellt also z. B. die Ordinate t das statische Moment dar, welches die Axe im Punkte s auf Biegung beansprucht. Bekanntlich ist die verticale Ordinate t an irgend einer Stelle der Momentenfläche proportional dem an ihrem Schnitte mit der Axe wirkenden statischen Momente M_y, welches die Axe im Querschnitt vom Durchmesser y beansprucht; ebenso ist die Ordinate $mn = t_1$ dem statischen Momente M_1 an der Wurzel des Zapfens proportional. Für beide Stellen der Axe hat man die Festigkeitsgleichungen:

$$M_1 = \frac{\mathfrak{S}\,\pi\, d_1^3}{32} \text{ und } M_y = \frac{\mathfrak{S}\,\pi\, y^3}{32}, \text{ woraus}$$

$$\frac{M_y}{M_1} = \frac{y^3}{d^3} \text{ und } y = d_1 \sqrt[3]{\frac{M_y}{M_1}}$$

folgt; da aber $\frac{M_y}{M_1} = \frac{t}{t_1}$ ist, so hat man $y = d_1 \sqrt[3]{\frac{t}{t_1}}$, nach welcher Gleichung für die verschiedenen Querschnitte der Axe die zugehörigen Werthe von y gefunden werden können. Wählt man die

*) Es wird hierbei vorausgesetzt, dass der Leser mit dem Zusammensetzen und Zerlegen von Kräften nach der Methode der Graphostatik vertraut sei.

Werthe von t so, dass $\frac{t}{t_1}$ eine ganze Zahl ist, so kann man zur bequemen Rechnung die Wurzeltafel der natürlichen Zahlenreihe benützen.

16. Es ist eine gleichschenklige Balancier-Axe von Gussstahl mit einer Axkopfbelastung $Q = 12000^{Kg}$ und einer Länge von $2a = 800^{mm}$ zwischen den beiden Zapfenmitteln zu berechnen.

Auflösung. Wegen der gleichen Schenkellängen der Axe sind auch die beiden Zapfendrücke einander gleich, daher

$$P_1 = P_2 = \frac{Q}{2} = 6000^{Kg}.$$

Zapfen- und Schenkeldimensionen werden daher zu beiden Seiten des Axkopfes dieselben, man braucht deshalb die Rechnung nur für die eine Axenhälfte zu machen. Für die Zapfendurchmesser hat man nach den bei der Zapfenberechnung entwickelten Formeln:

$$d = 2{,}26 \sqrt{\frac{P\varphi}{\mathfrak{S}}} \text{ und } \frac{l}{d} = \varphi = 1{,}75, \text{ oder}$$

$$d = 2{,}26 \sqrt{\frac{P \,.\, 1{,}75}{10}} = 0{,}95 \sqrt{P} = 0{,}05 \sqrt{6000} = 75^{mm}.$$

Die Zapfenlänge $l = 1{,}75\, d$ brauchen wir hier nicht einzuhalten, weil die Zapfen dieser Axe nur schwingen; wir setzen $l = 1{,}4\, d = 1{,}4 \,.\, 75 = 100^{mm}$; die Dicke d des Zapfens wegen der Verkleinerung der Länge ebenfalls zu verändern, erscheint hier nicht nöthig, da die Festigkeit durch die Verminderung der Länge des Zapfens nur gewinnt. Der theoretische Durchmesser D_0 des Axkopfes wird $D_0 = d \sqrt[3]{\frac{2a}{l}} = 75 \sqrt[3]{\frac{800}{100}} = 150^{mm}$. Die Nabe des Balanciers sei 320^{mm} lang, wir nehmen daher die Axkopflänge $L = 350^{mm}$.

Die Schenkeldicke D an den Enden des Axkopfes ergibt sich, wenn man in der Formel $y = d \sqrt[3]{\frac{2x}{l}}$ für x den Werth $x = a - \frac{L}{2}$ einsetzt; man hat dann

$$D' = d \sqrt[3]{\frac{(a - 0{,}5\, L)\, 2}{l}} = 75 \sqrt[3]{\frac{2\,(400 - 175)}{100}} = 125^{mm}.$$

Die Dicke D'' des Schenkels an der Zapfenwurzel, also da, wo der Zapfen in den Axschenkel übergeht, erhalten wir, wenn man zum Zapfendurchmesser d die Anlaufhöhe s des Zapfens, $s = 3 + 0{,}07\, d =$ $= 3 + 0{,}07 \,.\, 75 = 8{,}25^{mm}$, zuzählt, daher

$$D'' = 75 + 2 \,.\, 8{,}25 = 92^{mm},$$

wobei jedoch vorausgesetzt wird, dass die die Profilform der Axe bildende kubische Parabel von der gradlinigen Begrenzung der Kegelstumpfe tangirt wird.

17. Es ist für ein gleichschenkliges Kunstkreuz, dessen Schenkel je einer mit $Q_1 = 2000^{Kg}$ normal belastet werden, die schmiedeiserne, gleichschenklige Axe zu berechnen, wenn die Nabenlänge des Kunstkreuzes, $L = 280^{mm}$, die Entfernung der Lagermittel $2a = 500^{mm}$ ist und die Schwerpunktsebene des Kunstkreuzes in die Mitte der Axe fällt.

Auflösung. Die folgenden Figuren zeigen Kunstkreuz und Axe, linear dargestellt, in einer Anordnung, wie sie bei den Wasserhaltungsanlagen der Bergwerke oft vorkommt. Bei B ist das vertical abwärts hängende Pumpengestänge und bei A greift die nach dem Motor gehende Zugstange an. Der Normaldruck Q auf die Axe cc_1 ergibt sich als Resultirende der beiden Kräfte Q_1 an den Schenkeln des Kunstkreuzes. Es ist

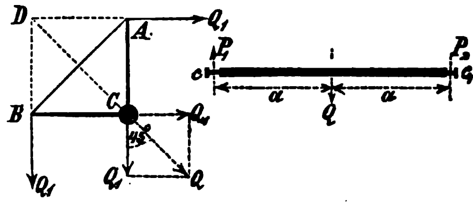


Fig. 55. Fig. 56.

$$Q = \sqrt{2\,Q_1^2} = Q_1\sqrt{2} = 1{,}4\,Q_1 = 1{,}4\,.\,2000 = 2800^{Kg}.$$

Zur Berechnung der hier gleichen, schmiedeisernen Zapfen, welche in Gusseisenlagern laufen sollen, haben wir die Formel $d = 2{,}26\sqrt{\frac{P\varphi}{\mathfrak{S}}}$, hierin ist $\varphi = \frac{l}{d} = 1{,}75$ und $\mathfrak{S} = 6$ zu setzen, man erhält:

$$d = 1{,}2\sqrt{P} = 1{,}2\sqrt{\frac{Q}{2}} = 1{,}2\sqrt{1400} = 45^{mm}.$$

Da der Axkopf den grösseren Theil der Länge der Axe einnimmt. so lohnt es sich nicht, den Axschenkeln die Form der gleichen Festigkeit zu geben; man wird hier deshalb die Axe cylindrisch machen und erhält für den Durchmesser D_0 in der Mitte der Axe entweder nach der bereits bekannten Formel $D_0 = d\sqrt[3]{\frac{2a}{l}}$ oder aus der diesem Belastungs- und Unterstützungsfalle entsprechenden Festigkeitsgleichung

$$\frac{Ql}{4} = \frac{Q\,.\,2a}{4} = \frac{\mathfrak{S}\pi D_0^3}{32},\ D_0 = \sqrt[3]{\frac{16\,Qa}{\mathfrak{S}\pi}},\ \text{oder}$$

$$D_0 = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2800 \cdot 250}{6 \cdot 3{,}14}} = 85^{mm}.$$

Diesen Werth $D_0 = 85^{mm}$ wird man im vorliegenden Fall beibehalten für die ganze Axe bis auf die Zapfen, welchen man ebenfalls, da die Axe doch aus einem Stück cylindrischen Walzeisens hergestellt wird, eine grössere Dicke als die oben berechnete Minimaldicke geben kann. Die Länge der Zapfen nehmen wir hier, weil diese nur eine geringe schwingende Bewegung machen, $l = 1{,}25\,d$.

18. Eine freitragende, massive schmiedeiserne Axe mit einer normalen Axkopfbelastung von $Q = 800^{Kg}$ ist zu berechnen. Die Entfernung der beiden Lagermittel (siehe beistehende Figur) beträgt $a_1 = 1000^{mm}$; die Entfernung zwischen Axkopfmitte und Halszapfenmitte beträgt $a_2 = 400^{mm}$; die Länge des Axkopfes ist $L = 120^{mm}$.

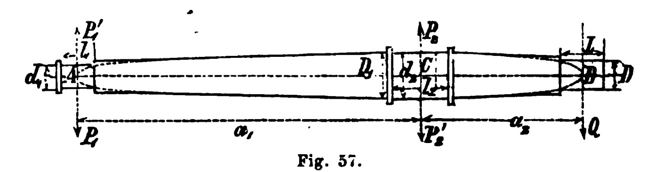


Fig. 57.

Auflösung. Die Kraft Q zerlegt in die ihr parallelen Componenten P_2' und P_1', so sind die diesen Kräften zur Herstellung des Gleichgewichtes entgegenwirkenden und ihnen gleichen Kräfte P_1 und P_2 die Lagerreactionen; die an der im Punkte B belasteten und in den Punkten A und C unterstützten Axe wirkenden Kräfte sind ausser dem Eigengewicht derselben die Last Q und die Unterstützungsdrücke P_1 und P_2. Zu berechnende Grössen sind: Der Durchmesser d_1 und die Länge l_1 des Stirnzapfens in A, der Durchmesser d_2 und die Länge l_2 des Halszapfens in C, der Durchmesser D des Axkopfes in B und zur Verzeichnung der kubischen Parabeln die Durchmesser in einigen Querschnitten der beiden Axschenkel.

Die Dimensionen des Stirnzapfens werden aus dem Zapfendruck P_1 nach der Zapfenformel $d_1 = 1{,}13\sqrt{P_1}$ und $l_1 = 1{,}5\,d_1$ berechnet. Der Zapfendruck P_1 ergibt sich aus der Momentengleichung $P_1 a_1 = Q a_2$, woraus $P_1 = \frac{Q a_2}{a_1} = \frac{800 \cdot 400}{1000} = 320^{Kg}$ folgt; daher ist $d_1 = 1{,}13\sqrt{320} = 20^{mm}$ und $l_1 = 30^{mm}$.

Der Durchmesser d_2 des Halszapfens berechnet sich entweder aus der schon früher für den Axkopf einer einfach tragenden Axe entwickelten Formel

$$d_2 = d_1 \sqrt[3]{\frac{2\,a_1}{l_1}} = 20\sqrt[3]{\frac{2000}{30}} = 80^{mm},$$

oder direct aus der Festigkeitsgleichung:

$$P_1 a_1 = Q a_2 = \frac{\mathfrak{S} \pi d_2^3}{32}, \text{ woraus}$$

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{32 P_1 a_1}{\mathfrak{S} \pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 Q a_2}{\mathfrak{S} \pi}} \text{ folgt.}$$

Es sei bemerkt, dass die Formel, die früher zur Axkopfberechnung diente, jetzt zur Berechnung des Halszapfens verwendet werden kann, weil dieser denselben Theil der Axe darstellt, der früher den Axkopf bildete. Die Länge l_2 des Halszapfens wird man auch hier der üblichen Verhältnisse der Lagermodelle wegen $l_2 = 1,5 d_2 = 120$ nehmen; es würde jedoch auch $l_2 = d_2$ genügen. Der Axkopf vom Durchmesser D wird wie ein Stirnzapfen beansprucht, daher auch als solcher berechnet; da er aber die vorgeschriebene Länge L hat, so ist der nach der Zapfenformel $d = 1,13 \sqrt{Q}$ berechnete Werth umzuändern, entsprechend dem Umstande, dass die Länge L im Allgemeinen zum Durchmesser D das in der Zapfenformel enthaltene Verhältniss $\frac{L}{D} = 1,5$ nicht haben wird, wenn es nicht zufällig der Fall ist.

Es heisse der durch die Zapfenformel gefundene ideelle Werth des Axkopfdurchmessers d_q, seine Länge l_q, so ist $d_q = 1,13 \sqrt{Q}$, $d_q = 1,13 \sqrt{800} = 32^{mm}$, $l_q = 1,5 d_q = 1,5 \,.\, 32 = 48^{mm}$.

Für den Axkopf gilt die Festigkeitsgleichung $\frac{Q L}{2} = \frac{\mathfrak{S} \pi D^3}{32}$, denn der Axkopf stellt wie jeder Stirnzapfen einen prismatischen Balken dar, der an dem einen Ende (da wo er in den Axschenkel übergeht) eingemauert und auf seiner ganzen Länge gleichförmig belastet ist. Für den ideellen Stirnzapfen vom Durchmesser d_q gilt die Festigkeitsgleichung: $\frac{Q l_q}{2} = \frac{\mathfrak{S} \pi d_q^3}{32}$; die Werthe von Q aus den beiden letzten Gleichungen einander gleich gesetzt, gibt:

$$Q = \frac{\mathfrak{S} \pi d_q^3}{16 l_q} = \frac{\mathfrak{S} \pi D^3}{16 L}, \text{ woraus}$$

$$\frac{d_q^3}{l_q} = \frac{D^3}{L} \text{ und } D = d_q \sqrt[3]{\frac{L}{l_q}}$$

folgt, daher $D = 32 \sqrt[3]{\frac{120}{48}} = 44^{mm}$; selbstverständlich würde man denselben Werth von D direct aus der Gleichung $\frac{Q L}{2} = \frac{\mathfrak{S} \pi D^3}{32}$

erhalten. Für vier verschiedene Querschnitte des Schenkels AC in den Entfernungen $x'_1 = 200$, $x'_2 = 400$, $x'_3 = 600$, $x'_4 = 800^{mm}$ vom Zapfenmittel A erhält man nach der Formel $y = d_1 \sqrt[3]{\frac{2x}{l_1}}$ die zugehörigen Ordinaten der kubischen Parabel $y'_1 = 48$. $y'_2 = 60$. $y'_3 = 69$, $y'_4 = 76^{mm}$. Für den Schenkel BC hat man nach der Formel $y = D \sqrt[3]{\frac{2x}{L}}$ für $x''_1 = 300$ die zugehörige Ordinate

$$y''_1 = 44 \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 300}{120}} = 75{,}24^{mm}.$$

Dadurch, dass man an die kubischen Parabeln der beiden Schenkel Tangenten als gerade Begrenzungslinien legt, erhält man die angenäherte Form der gleichen Festigkeit der Axe. Die Bunde an dem Halszapfen erhalten eine Breite und Höhe, entsprechend der Breite und Höhe des Anlaufes bei Stirnzapfen. Legt man an die Parabel des längeren Schenkels die Tangenten derart an, dass man den geringsten Materialüberschuss erhält, so wird man im vorliegenden Falle finden, dass das Schenkelende bei A bedeutend dicker als der Zapfendurchmesser d_1 ausfällt, es ist daher der ganzen Axe angemessener, den Durchmesser $d_1 > 20$ etwa $d_1 = 30^{mm}$ und demgemäss $l_1 = 45^{mm}$ zu nehmen.

Die graphostatische Berechnung der vorliegenden Axe, resp. Bestimmung der Zapfendrücke P_1 und P_2, sowie Verzeichnung der Momentenfläche geschieht wie folgt: Man ziehe von einem beliebigen Punkt a der Kraftrichtung P_1 $ab \parallel AB$, verbinde einen beliebigen Punkt c der Kraftrichtung P_2 mit a und b; errichte im Punkte a eine Senkrechte auf ab, mache darauf $d{,}1 = Q$ (wobei d ein beliebiger Punkt in der Senkrechten $a{,}1$), ziehe $1{,}0 \parallel bc$, durch d eine Parallele zu ab, so schneiden sich diese 2 Geraden $1{,}0$ und $d0$ im Punkte 0, dem Pol, ziehe endlich noch $0{,}2 \parallel ac$, so ist $2{,}d = P_1$, $2{,}1 = P_2$; da der Zapfen bei C gleichförmig belastet ist. so ist seine Momentenfläche zwischen m und n durch einen Parabelbogen zu begrenzen, daher $a\widehat{mn}ba$ die gesuchte Momentenfläche der Axe.

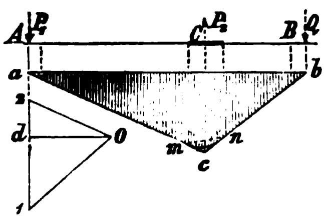


Fig. 58.

19. Es ist eine einfach tragende Axe zu berechnen, bei der die Last ausserhalb der Zapfen, vertical nach abwärts wirkt und der Axkopf zwischen den Zapfen liegt. (Siehe Fig. 59.)

Auflösung. Die Kraft Q zerlegt in 2 zu ihr parallelen Componenten P'_1 und P'_2, die in den Zapfenmitteln angreifen, so

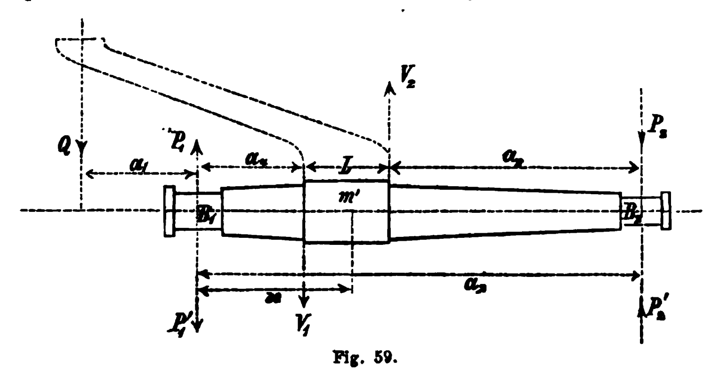


Fig. 59.

werden diese durch die ihnen gleichen, aber entgegengesetzt wirkenden Lagerreactionen P_1 und P_2 im Gleichgewichte erhalten. Für den Punkt B_2 als festen Punkt hat man die Momentengleichung

$$Q(a_1 + a_2) = P_1 a_2, \text{ woraus}$$

$$P_1 = \frac{Q(a_1 + a_2)}{a_2}$$

folgt; es ist ferner

$$P_2 = P_1 - Q = \frac{Q(a_1 + a_2)}{a_2} - Q = \frac{Q a_1}{a_2}.$$

Aus den beiden Zapfendrücken P_1 und P_2 können nun die Zapfendimensionen d_1, l_1, d_2, l_2 nach den bereits bekannten Formeln berechnet werden. Zur Berechnung des Durchmessers D des cylindrischen Axkopfes zerlegen wir die Kraft Q in die ihr parallelen Componenten V_1 und V_2, angreifend an den Axkopfrändern. Für den Punkt B_2 als festen Punkt hat man die Momentengleichung:

$$P_1 a_2 + V_2 a_3 - V_1(a_3 + L) = 0,$$

es ist ferner $V_1 - V_2 = Q$; diese beiden Gleichungen sind nach V_1 und V_2 aufzulösen. Den Werth von $V_2 = V_1 - Q$ in die andere Gleichung eingesetzt:

$$P_1 a_2 + (V_1 - Q) a_3 - V_1 (a_3 + L) = 0, \text{ oder}$$

$$P_1 a_2 + V_1 a_3 - Q a_3 - V_1 a_3 - V_1 L = 0, \text{ oder}$$

$$P_1 a_2 - Q a_3 - V_1 L = 0,$$

hieraus ist $V_1 = \frac{P_1 a_2 - Q a_3}{L}$ und für P_1 den früher gefundenen

Werth $P_1 = \frac{Q(a_1 + a_2)}{a_2}$ gesetzt, so ist

$$V_1 = \frac{Q(a_1 + a_2) - Q a_3}{L} = \frac{Q(a_1 + a_2 - a_3)}{L},$$

$$V_2 = \frac{Q(a_1 + a_2 - a_3)}{L} - Q = \frac{Q(a_1 + a_2 - a_3 - L)}{L}.$$

Der am meisten beanspruchte, also gefährliche Querschnitt der Axe ist entweder der eine oder der andere Axkopfrand, je nachdem $P_1 a_4 \gtrless P_2 a_3$ ist; bei einem gegebenen Zahlenbeispiel wird man aus dem grösseren dieser beiden Momente die Dicke des Axkopfes nach der Formel $M = \frac{\mathfrak{S} \pi D^3}{32}$ berechnen.

Ist zufällig $P_1 a_4 = P_2 a_3$, dann gibt es an den beiden Axkopfrändern gefährliche Querschnitte, resp. zwei Maximal-Biegungsmomente, für welchen Fall man aus der letzten Gleichung, wenn man darin für P_1 und P_2 obige Werthe setzt, die Beziehung

$$\frac{Q(a_1 + a_2) a_4}{a_2} = \frac{Q a_1 a_3}{a_2} \text{ oder } \frac{a_1 + a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_4} \text{ erhält.}$$

Denkt man sich die beiden nach abwärts gerichteten Kräfte P_2 und V_1 zu einer Resultirenden vereinigt, ebenso die Kräfte P_1 und V_2, so erhält man zwei Kräfte, welche an verschiedenen Stellen der Axe angreifend, in entgegengesetzter Richtung wirken, weshalb es in der elastischen Linie einen Wendepunkt geben muss (siehe Fig. 60). In diesem Wendepunkte, dessen Entfernung vom Unterstützungspunkte in B_1 mit x bezeichnet sei, ist bekanntlich das Biegungsmoment $M = 0$, daher die Axe an dieser Stelle gar nicht auf Biegung, wohl aber noch auf Abscheerung beansprucht wird. Für den Wendepunkt der elastischen Linie hat man:

$$M = P_1 x - V_1 (x - a_4) = 0, \text{ woraus}$$

$$x(P_1 - V_1) = - V_1 a_4 \text{ und } x = \frac{V_1 a_4}{V_1 - P_1} = \frac{a_4}{1 - \frac{P_1}{V_1}}$$

folgt; setzt man noch für P_1 und V_1 die oben gefundenen Werthe, so ist

$$x = \frac{a_4}{1 - \frac{(a_1 + a_2) L}{a_2 (a_1 + a_4 + L)}} = \frac{a_4 a_2 (a_1 + a_4 + L)}{a_2 (a_1 + a_4 + L) - (a_1 + a_2) L}$$

oder

$$x = \frac{a_4 a_2 (a_1 + a_4 + L)}{a_2 (a_1 + a_4) - a_1 L}.$$

Für einen beliebigen anderen Querschnitt der Axe innerhalb der Längen a_4 und a_8 hat man für die Querschnitte von den Durchmessern y_1 und y_2 in den Entfernungen x_1 und x_2 vom linken, resp. rechten Zapfenmittel:

$$y_1 = d_1 \sqrt[3]{\frac{2 x_1}{l_1}}, \quad y_2 = d_2 \sqrt[3]{\frac{2 x_2}{l_2}},$$

wobei d_1 und d_2, sowie l_1 und l_2 die Dimensionen der beiden Zapfen bedeuten.

Zur Bestimmung der Kräfte P_1, P_2, V_1, V_2 und Verzeichnung der Momentenfläche mittelst Kräfte- und Seilpolygon verfahre man wie folgt: Man ziehe durch einen beliebigen Punkt a der Richtung der Kraft Q die Gerade $ab \parallel B_1 B_2$, errichte darauf im Punkte a eine Senkrechte $a,3$, trage darauf das Stück $a,1 = Q$ auf, ziehe durch den Punkt 1 eine Parallele zu ab, verbinde einen beliebigen Punkt O dieser Parallelen mit a und 1, so sind aO und $1,O$ zwei Polstrahlen; hierauf ziehe man durch a eine Parallele zum Polstrahl aO (hier mit demselben zusammenfallend), verbinde die Durchschnittspunkte c und e dieser Parallelen mit den Punkten b und d (Durchschnittspunkte der Kraftrichtungen P_2 und V_2 mit ab), ziehe endlich $2,O \parallel bc$ und $3,O \parallel ed$, so ist $a,2 = P_1$, $1,2 = P_2$, $a,3 = V_1$, $1,3 = V_2$ und $cedbc$ die Momentenfläche, aus welcher ebenfalls ersichtlich ist, dass im Punkte m die Ordinate $=$ Null, also das Moment $=$ Null ist, daher die elastische Linie im Punkte m' einen Wendepunkt besitzt, in welchem die Biegungsbeanspruchung der Axe $=$ Null ist. Selbstverständlich kann man auch hier die verschiedenen Querschnitte der Axe nach der Formel $y = d_1 \sqrt[3]{\frac{t}{t_1}}$ berechnen, wobei t_1 die Ordinate an der Wurzel des Zapfens vom Durchmesser d_1 und t die Ordinate ist, welche in der Richtung des zu berechnenden verticalen Durchmessers y innerhalb der Momentenfläche liegt.

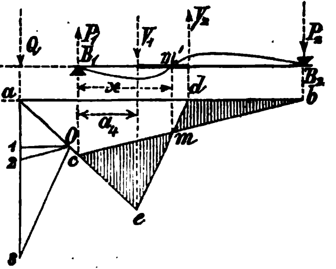


Fig. 60.

20. Es ist eine einfach tragende Axe zu berechnen, bei der die Last zwischen den beiden Zapfen angreift und der Axkopf ausserhalb der Zapfen liegt. (Siehe Fig. 61.)

Auflösung. Zerlegt man die Kraft Q in die beiden den Auflagerdrücken P_1 und P_2 gleichen Componenten, so hat man aus

der Momentengleichung $P_1(a_1 + a_2) = Q a_2$, $P_1 = \frac{Q a_2}{a_1 + a_2}$ und da $P_2 + P_1 = Q$ ist, so hat man

$$P_2 = Q - P_1 = Q - \frac{Q a_2}{a_1 + a_2} = \frac{Q a_1 + Q a_2 - Q a_2}{a_1 + a_2} = \frac{Q a_1}{a_1 + a_2}.$$

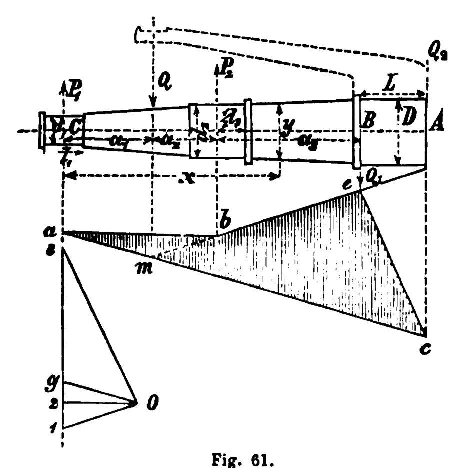


Fig. 61.

Aus dem Zapfendruck P_1 können die Dimensionen des Stirnzapfens nach den bekannten Formeln berechnet werden. Wir zerlegen ferner die Kraft Q noch in die ihr parallelen Componenten Q_1 und Q_2 an den Rändern des Axkopfes wirkend; man hat dann aus den Gleichungen: $Q(a_2 + a_3) = Q_2 L$ und $Q_1 - Q_2 = Q$ die Werthe von Q_2 und Q_1:

$$Q_2 = \frac{Q(a_2 + a_3)}{L} \text{ und}$$

$$Q_1 = Q + \frac{Q(a_2 + a_3)}{L} = \frac{Q(L + a_2 + a_3)}{L}.$$

Zur Berechnung der Axkopfdicke D hat man entweder das Moment $P_1(a_1 + a_2 + a_3) + P_2 a_2 = \frac{\mathfrak{S} J}{c}$ oder das Moment $Q_2 L = \frac{\mathfrak{S} J}{c}$, für Q_2 seinen Werth gesetzt, gibt: $Q(a_2 + a_3) = \frac{\mathfrak{S} \pi D^3}{32}$, woraus $D = \sqrt[3]{\frac{32 Q(a_2 + a_3)}{\mathfrak{S} \pi}}$ ist. Zur Berechnung des Halszapfens vom Durchmesser d_2 hat man entweder

$$Q_2\left(L + a_3 - \frac{l_2}{2}\right) - Q_1\left(a_3 - \frac{l_2}{2}\right) = \frac{\mathfrak{S} J}{c} \text{ oder}$$

$$P_1\left(a_1 + a_2 + \frac{l_2}{2}\right) + \frac{P_2 l_2}{2} = \frac{\mathfrak{S} \pi d_2^3}{32};$$

für P_1 und P_2 die Werthe gesetzt:

$$\frac{Q a_2}{a_1 + a_2}\left(a_1 + a_2 + \frac{1}{2} l_2\right) + \frac{Q a_1}{a_1 + a_2} \cdot \frac{l_2}{2} = \frac{\mathfrak{S} \pi d_2^3}{32}, \text{ oder}$$

$$\frac{Q}{a_1 + a_2}\left(a_1 a_2 + a_2^2 + \frac{a_2 l_2}{2} + \frac{a_1 l_2}{2}\right) = \frac{\mathfrak{S}\pi d_2^3}{32}, \text{ oder}$$

$$\frac{Q}{a_1 + a_2}\left[a_1\left(a_2 + \frac{l_2}{2}\right) + a_2\left(a_2 + \frac{l_2}{2}\right)\right] = \frac{\mathfrak{S}\pi d_2^3}{32}, \text{ oder}$$

$$\frac{Q}{a_1 + a_2}\left(a_2 + \frac{l_2}{2}\right)(a_1 + a_2) = Q\left(a_2 + \frac{l_2}{2}\right) = \frac{\mathfrak{S}\pi d_2^3}{32}, \text{ woraus}$$

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{32\,Q\left(a_2 + \frac{l_2}{2}\right)}{\mathfrak{S}\pi}}$$

folgt. In dieser Gleichung für d_2 ist die Summe der Grössen a_2 und $\frac{l_2}{2}$ als eine bekannte, resp. gegebene Grösse zu betrachten, z. B. $a_2 + \frac{l_2}{2} = \alpha$; man muss daher bei der Berechnung der vorliegenden Axe zuerst den Werth von d_2 berechnen, hat hierauf $l_2 = 1{,}5\,d_2$ und $a_2 = \alpha - \frac{l_2}{2}$, worauf man erst die anderen Werthe von P_1, P_2 u. s. w. berechnen kann, da die Gleichungen für diese Grössen die Länge a_2 als bekannte Grösse enthalten. Für einen beliebigen Querschnitt der Axe vom Durchmesser y in der Entfernung x von dem Stirnzapfenmittel hat man

$$P_1 x + P_1 (x - a_1 - a_2) = \frac{\mathfrak{S}\pi y^3}{32},$$

oder für P_1 und P_2 die Werthe gesetzt:

$$\frac{Q a_2 x}{a_1 + a_2} + \frac{Q a_1}{a_1 + a_2}(x - a_1 - a_2) = \frac{\mathfrak{S}\pi y^3}{32}, \text{ oder}$$

$$\frac{Q}{a_1 + a_2}(a_2 x + a_1 x - a_1^2 - a_1 a_2) = \frac{\mathfrak{S}\pi y^3}{32}, \text{ oder}$$

$$\frac{Q}{a_1 + a_2}[x(a_1 + a_2) - a_1(a_1 + a_2)] = \frac{\mathfrak{S}\pi y^3}{32}, \text{ oder}$$

$$\frac{Q}{a_1 + a_2}(a_1 + a_2)(x - a_1) = Q(x - a_1) = \frac{\mathfrak{S}\pi y^3}{32}, \text{ woraus}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{32\,Q(x - a_1)}{\mathfrak{S}\pi}}$$

folgt. In den Ausdruck $Q(x - a_1)$ geht natürlich das ebenfalls für den Querschnitt vom Durchschnitt y geltende Moment

$$M = Q_2 (L + a_3 + a_2 + a_1 - x) - Q_1 (a_3 + a_2 + a_1 - x)$$

über, wenn man für Q_1 und Q_2 die Werthe setzt. Dass

$$P_1 x + P_2 (x - a_1 - a_2) = Q (x - a_1)$$

ist, geht schon aus dem bekannten Satze hervor, dass das Moment der Resultirenden in Bezug auf einen Punkt als Fixpunkt gleich ist der Summe der Momente der Componenten in Bezug auf denselben Punkt, weshalb wir auch von vornherein für den Querschnitt vom Durchmesser y das Moment $Q (x - a_1)$ hätten aufstellen können. Zur graphostatischen Bestimmung der Kräfte P_1, P_2, Q_1, Q_2 und Verzeichnung der Momentenfläche verfahre man wie folgt: Man nehme in der Richtung der Kraft Q einen beliebigen Punkt m an, verbinde denselben mit zwei beliebigen Punkten a und b der Richtungen der Kräfte P_1 und P_2, verlängere die Seiten am und bm bis zu deren Durchschnitten c und e mit den Verticalen aus den Punkten A und B, so erhält man in der Fläche $amceba$ die Momentenfläche, aus der die Biegungsbeanspruchungen der verschiedenen Querschnitte der Axe ersichtlich sind. Trägt man ferner auf einer zur Axe AC senkrecht gezogenen Geraden von einem beliebigen Punkte g derselben aus das Stück $g,1 = Q$ auf, zieht $1,O \parallel me$, $gO \parallel ac$, $2,O \parallel ab$ und $3,O \parallel ce$, so ist $2,g = P_1$, $2,1 = P_2$, $1,3 = Q_1$ und $3,g = Q_2$. Wie man mittelst der Ordinaten der Momentenfläche die verschiedenen Durchmesser der Axe finden kann, ist schon in den Beispielen 15 und 19 gelehrt worden.

21. Es ist eine einfach tragende Axe zu berechnen, bei der die Last Q zwischen den beiden Zapfen, jedoch nicht normal, sondern schief zur Axe wirkt und der Durchnittspunkt der Kraftrichtung Q mit der geometrischen Axe ausserhalb der Axkopfränder fällt. (Siehe beistehende Figur.)

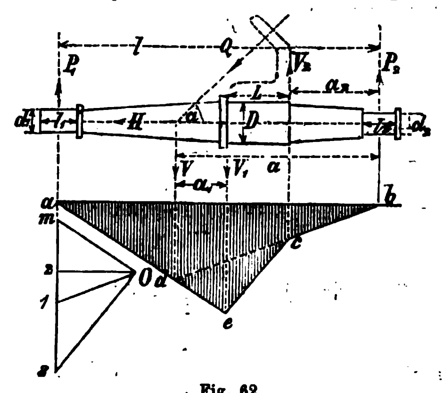


Fig. 62.

Auflösung. Zerlegen wir die gegebene Kraft Q in die Horizontalcomponente H und Verticalcomponente V, nehmen ferner an, dass die Componente H durch einen der beiden Zapfen als Stützzapfen wirkend aufgehoben wird und dass die Wirkung der Componente H auf die Materialfaserspannung vernachlässigt werden darf und zerlegen die Verticalcomponente V in die beiden den Unterstützungsdrücken P_1 und P_2 gleichen Componenten, so hat man: $P_1 l = Va$, woraus $P_1 = \frac{Va}{l}$ folgt.

Es ist ferner $P_2 = V - P_1 = V - \frac{Va}{l}$; oder $P_2 = \frac{V(l-a)}{l}$.
Aus den Zapfendrücken P_1 und P_2 sind die Dimensionen der beiden Stirnzapfen nach den bekannten Regeln zu bestimmen. Zur Bestimmung der Axkopfdicke D zerlegen wir die Kraft V in die beiden ihr parallelen, aber einander entgegengesetzt gerichteten und an den Axkopfrändern angreifenden Componenten V_1 und V_2. Man hat dann: $V_1 = V_2 + V$ und $Va_1 = V_2 L$, woraus $V_2 = \frac{Va_1}{L}$ und $V_1 = V + \frac{Va_1}{L} = \frac{V(L+a_1)}{L}$ folgt. Die grösste Biegungsbeanspruchung der Axe ist hier, wie leicht ersichtlich, offenbar die Stelle, an welcher die Kraft V_1 angreift; hier findet das grösste Moment statt; nämlich $P_2(a_2 + L) + V_2 L = P_1(l - a_2 - L) = M$. Setzt man hierin für P_1, P_2 und V_2 die Werthe, so erhält man eine identische Gleichung. Wir wählen zur Berechnung der Axkopfdicke D z. B. das Moment $M = P_1(l - a_2 - L)$; für P_1 den Werth gesetzt, erhält man: $M = \frac{Va}{l}(l - a_2 - L)$. Bezeichnet α den Winkel, welchen die Richtung der Kraft Q mit der Horizontalen einschliesst, so ist $V = Q \sin\alpha$, daher

$$\frac{a\,Q\sin\alpha}{l}(l - a_2 - L) = \frac{\mathfrak{S}\,\pi D^3}{32}, \text{ woraus}$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{32\,a\,Q\sin\alpha\,(l - a_2 - L)}{l\,\mathfrak{S}\,\pi}} \text{ folgt.}$$

Zur Verzeichnung der Momentenfläche und Bestimmung der Kräfte P_1, P_2, V_1 und V_2 nach der Methode der Graphostatik verfahre man wie folgt: Man ziehe die Grade ab parallel zur geometrischen Axe, verbinde einen beliebigen Punkt d der Richtung der Kraft V mit den Punkten a und b, fälle aus den Axkopfrändern Lothe auf ab und verbinde die Durchschnittspunkte derselben mit den Geraden ad und bd, das sind also die Punkte e und c mit einander, so erhält man in der Fläche $adecba$ die Momentenfläche. Trägt man ferner von einem beliebigen Punkte m aus einer auf ab senkrecht gezogenen Geraden das Stück $m,1 = V$ auf, zieht $mO \parallel ae$, $1,O \parallel db$, $O,2 \parallel ab$, $O,3 \parallel ec$, so ist $m,2 = P_1$, $2,1 = P_2$, $m,3 = V_1$ und $1,3 = V_2$. Nach einer anderen graphischen Methode findet man diese Kräfte auch wie folgt: Auf der Richtung der Kraft P_1 (siehe folgende Figur) mache man $\overline{ac} = V$, verbinde c mit i, so schneidet diese Gerade ci auf der Verticalen aus V das Stück $\overline{nd} = \overline{ab} = P_1$ ab, daher muss, weil $\overline{nh} = \overline{ac} = V_1$, oder $\overline{nh} = P_1 + P_2$ ist, das Stück $\overline{dh} = \overline{bc} = P_2$ sein; denn aus der Aehn-

lichkeit der Dreiecke bcd und ndi folgt: $\overline{bc}:\overline{nd}=\overline{bd}:\overline{ni}$, oder, da $\overline{bd}=\overline{an}$ ist, so hat man auch $\frac{\overline{bc}}{\overline{nd}}=\frac{\overline{an}}{\overline{ni}}$. Zwischen den Kräften

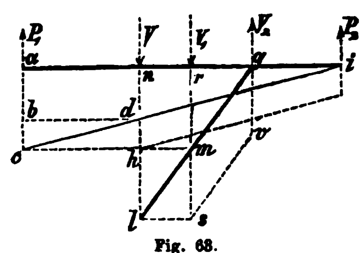


Fig. 68.

P_1 und P_2 findet aber, wie bekannt, die Beziehung statt: $P_1:P_2=$ $=\overline{ni}:\overline{an}$ (da der Angriffspunkt der Resultirenden der Kräfte P_1 und P_2 der Punkt n ist), daher

$$\frac{\overline{bc}}{\overline{nd}}=\frac{P_2}{P_1};$$

es ist ferner: $\overline{nd}+\overline{bc}=P_1+P_2$ laut Construction; lösen wir diese zwei Gleichungen nach den Unbekannten $\overline{nd}$ und $\overline{bc}$ auf, so hat man, den Werth von $\overline{nd}$ aus beiden Gleichungen einander gleich gesetzt:

$$\overline{nd}=\frac{P_1\,.\,\overline{bc}}{P_2}=P_1+P_2-\overline{bc}, \text{ hieraus ist}$$

$$P_1\,.\,bc=P_1\,P_2+P_2^2-P_2\,.\,\overline{bc} \text{ oder}$$

$$\overline{bc}\,(P_1+P_2)=P_1\,P_2+P_2^2=P_2\,(P_1+P_2), \text{ woraus}$$

$$\overline{bc}=P_2 \text{ folgt, daher } \overline{nd}=P_1+P_2-\overline{bc}, \text{ oder}$$

$$\overline{nd}=P_1+P_2-P_2=P_1.$$

Zur Auffindung der Kräfte V_1 und V_2 trage man auf der Richtung der Kraft V_1 das Stück $\overline{rm}=V$ auf, verbinde m mit g und verlängere diese Gerade $\overline{mg}$, bis sie die Richtung der Kraft V in l schneidet; dann ist $\overline{nl}=\overline{rs}=V_1$ und $\overline{hl}=\overline{ms}=\overline{gv}=V_2$; denn aus der Aehnlichkeit der Dreiecke lms und mrg folgt:

$$\frac{\overline{rm}}{\overline{ms}}=\frac{\overline{rg}}{\overline{ls}}=\frac{\overline{rg}}{\overline{nr}};$$

da aber zwischen den Kräften V und V_2 die Beziehung besteht:

$$\frac{V}{V_2}=\frac{\overline{rg}}{\overline{nr}}, \text{ so hat man } \frac{\overline{rm}}{\overline{ms}}=\frac{V}{V_2}=\frac{V_1-V_2}{V_2}$$

es ist ferner laut Construction $\overline{rs}-\overline{ms}=V=V_1-V_2$; wir haben daher die beiden Gleichungen:

$$\frac{\overline{rs}-\overline{ms}}{\overline{ms}}=\frac{V_1-V_2}{V_2} \text{ und } \overline{rs}-\overline{ms}=V_1-V_2$$

nach den Unbekannten $\overline{rs}$ und $\overline{ms}$ aufzulösen. Den Werth der Differenz $\overline{rs} - \overline{ms}$ der letzten Gleichung in die erste eingesetzt, gibt:

$$\frac{V_1 - V_2}{\overline{ms}} = \frac{V_1 - V_2}{V_2}, \text{ woraus}$$

$$\frac{1}{\overline{ms}} = \frac{1}{V_2} \text{ und } \overline{ms} = V_2$$

folgt; daher ist auch $\overline{rs} = V_1 - V_2 + \overline{sm} = V_1 - V_2 + V_2 = V_1$.

22. Es ist eine schmiedeiserne Axe mit zwei Tragpunkten (siehe beistehende Figur) für die Belastungen $Q = 3500^{Kg}$ und $Q_2 = 4200^{Kg}$ zu berechnen; die Schenkellängen sind: $a_1 = 700^{mm}$, $a_2 = 400^{mm}$, die Schaftlänge $s = 1700^{mm}$.

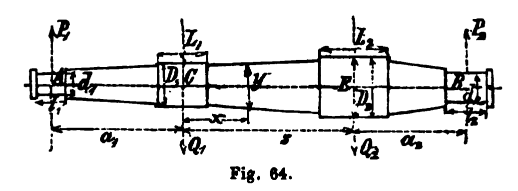


Fig. 64.

Auflösung. Die Resultirende der gegebenen Kräfte Q_1 und Q_2 in die zwei parallelen Componenten P_1' und P_2' zerlegt, und diese durch die Lagerreactionen, welche nach aufwärts gerichtete Kräfte darstellen, im Gleichgewichte erhalten, so erhält man diese Zapfendrücke P_1 und P_2 wie folgt: Da für den Gleichgewichtszustand die algebraische Summe der statischen Momente sämmtlicher die Axe angreifenden Kräfte gleich Null sein muss, so hat man für den Punkt B als festen Punkt die Momentengleichung:

$$P_1 (a_1 + s + a_2) - Q_1 (s + a_2) - Q_2 a_2 = 0, \text{ woraus folgt:}$$

$$P_1 = \frac{Q_1 (s + a_2) + Q_2 a_2}{a_1 + s + a_2} = \frac{Q_1 \left[s + a_2 \left(1 + \frac{Q_2}{Q_1} \right) \right]}{a_1 + s + a_2} =$$

$$= \frac{3500 \left[1700 + 400 \left(1 + \frac{42}{35} \right) \right]}{700 + 1700 + 400},$$

$P_1 = 3225^{Kg}$. Für den Punkt A als festen Punkt gilt die Momentengleichung:

$$P_2 (a_1 + s + a_2) - Q_2 (s + a_1) - Q_1 a_1 = 0, \text{ woraus folgt:}$$

$$P_2 = \frac{Q_2(s+a_1)+Q_1 a_1}{a_1+s+a_2} = Q_2 \cdot \frac{s+a_1\left(1+\frac{Q_1}{Q_2}\right)}{a_1+s+a_2} =$$

$$= 4200 \cdot \frac{1700+700\left(1+\frac{35}{42}\right)}{700+1700+400},$$

$P_2 = 4475^{Kg}$; selbstverständlich gibt die Gleichung

$$P_2 = Q_1 + Q_2 - P_1 = 3500 + 4200 - 3225$$

denselben Werth von P_2, wie eben gefunden wurde.

Die Zapfendimensionen werden:

$$d_1 = 1{,}13\sqrt{P_1} = 1{,}13\sqrt{3225} = 64^{mm},\ l_1 = 1{,}5\,d_1 = 1{,}5 \,.\, 64,$$
$$l_1 = 96^{mm}.$$

$$d_2 = 1{,}13\sqrt{P_2} = 1{,}13\sqrt{4475} = 76^{mm},\ l_2 = 1{,}5\,d_2 = 1{,}5 \,.\, 76,$$
$$l_2 = 114^{mm}.$$

In dem Schenkel von der Länge a_1 vier Schnitte angenommen, $x_1 = 175^{mm}$, $x_2 = 350^{mm}$, $x_3 = 525^{mm}$, $a_1 = 700^{mm}$ von dem linken Zapfenmittel, so erhält man die zugehörigen Werthe von y (Parabelordinaten):

$$y_1 = d_1\sqrt[3]{\frac{2\,x_1}{l_1}} = 64\sqrt[3]{\frac{2\,.\,175}{96}} = 98^{mm},$$

$$y_2 = 64\sqrt[3]{\frac{2\,.\,350}{96}} = 124^{mm},\ y_3 = 64\sqrt[3]{\frac{2\,.\,525}{96}} = 142^{mm},$$

$$D_1 = 64\sqrt[3]{\frac{2\,.\,700}{96}} = 156^{mm}.$$

In dem Schenkel von der Länge a_2 auch vier Schnitte angenommen in den Entfernungen $x'_1 = 100^{mm}$, $x'_2 = 200^{mm}$, $x'_3 = 300^{mm}$, $x'_4 = a_2 = 400^{mm}$ von dem rechten Zapfenmittel, so hat man die zugehörigen Werthe von y:

$$y'_1 = d_2\sqrt[3]{\frac{2\,.\,x'_1}{l_2}} = 76\sqrt[3]{\frac{2\,.\,100}{114}} = 91^{mm},$$

$$y'_2 = 76\sqrt[3]{\frac{2\,.\,200}{114}} = 115^{mm},\ y'_3 = 76\sqrt[3]{\frac{2\,.\,300}{144}} = 132^{mm},$$

$$D_2 = 76\sqrt[3]{\frac{2\,.\,400}{114}} = 145^{mm}.$$

Die cylindrisch zu gestaltenden Axköpfe erhalten etwas grössere, als die ausgerechneten Durchmesser von D_1 und D_2, damit man gegen die angrenzenden Theile der Axe noch einen Anlauf erhalte, welcher das Aufstecken der Naben der die Axe belastenden Maschinentheile, sowie das Einbringen der Keilbahnen erleichtert.

Was nun den Schaft (Axenstück zwischen den beiden Axköpfen) betrifft, so setzen wir die volle Kreisfläche als Querschnittsform voraus. Die Durchmesser der einzelnen Querschnitte findet man wie folgt: In der Entfernung x von der Axkopfmitte C heisse der Schaftdurchmesser y, dann gilt für diesen Querschnitt die Festigkeitsgleichung:

$$P_1 (a_1 + x) - Q_1 x = \frac{\mathfrak{S} \pi y^3}{32};$$

für den Axkopf C gilt die Festigkeitsgleichung:

$$P_1 a_1 = \frac{\mathfrak{S} \pi D_1^3}{32};$$

diese zwei Gleichungen durch einander dividirt, gibt:

$$\frac{y^3}{D_1^3} = \frac{P_1 (a_1 + x) - Q_1 x}{P_1 a_1} = 1 + \frac{x}{a_1} \left(1 - \frac{Q_4}{P_1}\right), \text{ woraus}$$

$$y = D_1 \sqrt[3]{1 + \frac{x}{a_1} \left(1 + \frac{Q_1}{P_1}\right)}$$

und bezogen auf den anderen Axkopf E

$$y = D_2 \sqrt[3]{1 + \frac{x}{a_2} \left(1 - \frac{Q_2}{P_2}\right)}$$

folgt. In dieser letzteren Gleichung bezeichnet x die Entfernung des Querschnittes vom Durchmesser y von der Axkopfmitte E. Von diesem Punkte aus den Schaft in fünf Theile zerlegt, so dass $x_1 = 400$, $x_2 = 800$, $x_3 = 1200$, $x_4 = 1600$, $s = 1700^{mm}$, von E aus nach links gerechnet ist, so hat man nach der letzten Formel für y

$$y_1 = 145 \sqrt[3]{1 + \frac{400}{400} \left(1 - \frac{4200}{4475}\right)} = 148^{mm},$$

$$y_2 = 145 \sqrt[3]{1 + \frac{800}{400} \left(1 - \frac{4200}{4475}\right)} = 150^{mm},$$

$$y_3 = 145 \sqrt[3]{1 + \frac{1200}{400} \left(1 - \frac{4200}{4475}\right)} = 153^{mm},$$

$$y_4 = 145 \sqrt[3]{1 + \frac{1600}{400} \left(1 - \frac{4200}{4475}\right)} = 155^{mm},$$

$$D_1 = 145 \sqrt[3]{1 + \frac{1700}{400} \left(1 - \frac{4200}{4475}\right)} = 156^{mm}.$$

Indem man nun die den einzelnen Werthen von x entsprechenden Werthe von y normal zur Axe aufträgt und die bezüglichen Endpunkte der y durch eine stetige krumme Linie verbindet, erhält man zwei Parabelbögen; dieselben weichen jedoch in den meisten Fällen von der geraden Linie so wenig ab, dass man die Endpunkte der Durchmesser D_1 und D_2 geradlinig mit einander verbinden und den Schaft als abgestumpften Kegel betrachten kann. Im vorliegenden Beispiele sind ausserdem die Axkopfdurchmesser, sowie die einzelnen Schaftdurchmesser so wenig von einander verschieden, dass man den Schaft und die Axköpfe als einen Cylinder von 156^{mm} Durchmesser ausführen wird. Die graphostatische Berechnung der zweifach tragenden Axe geschieht wie folgt: In den Angriffspunkten der Kräfte P_1, Q_1, Q_2 und P_2 Lothe gefällt zur geometrischen Axe der horizontal liegenden Axe (siehe folgende Figur), auf der Rich-

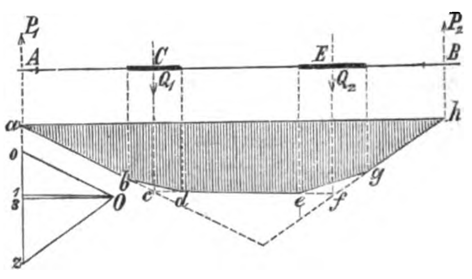


Fig. 65.

tung der Kraft P_1 von einem beliebigen Punkte o aus die Strecken $o,1 = Q_1$, $1,2 = Q_2$ aufgetragen, einen beliebigen Punkt O als Pol gewählt und mit den Punkten o, 1, 2 verbunden, gibt das Kräfte-Polygon $o,1,2$; da die Kräfte Q_1 und Q_2 durch die Kräfte P_1 und P_2 im Gleichgewichte erhalten werden, also $P_1 + P_2 = Q_1 + Q_2$ sein muss, so stellt die Strecke $2,o$ auch die Summe der Kräfte $P_1 + P_2$ dar, daher ist $o,1,2,o$ das geschlossene Kräftepolygon. Zur Verzeichnung der Momentenfläche ziehe man durch einen beliebigen Punkt c der Richtung der Kraft Q_1 die Geraden $ac \parallel o,O$ und $cf \parallel 1,O$, ferner $fh \parallel 2,O$, verbinde h mit a und ziehe $O,3 \parallel ah$, so ist $o,3 = P_1$, $3,2 = P_2$. Zerlegt man endlich noch die Lasten Q_1 und Q_2 in je zwei parallele Componenten Q_1', Q_1'' und Q_2', Q_2'', welche an den Axkopfrändern angreifen, fällt aus diesen Angriffspunkten Lothe auf AB und verbindet die Durchschnittspunkte derselben mit den Seiten des Seilpolygons, d. i. also b mit d und e mit g, so erhält man in der Fläche $abdegha$ die Momentenfläche, mittelst welcher man, wie bereits bekannt, für einen beliebigen Kreisquerschnitt der Axe den zugehörigen Durchmesser finden kann, wenn man die Zapfendimensionen kennt.

23. Es ist eine zweifach tragende, schmiedeiserne massive Axe mit einem freitragenden Schenkel (siehe folgende Figur) zu berechnen; die Querschnitte sind an allen Stellen volle Kreisflächen; die Belastungen betragen: $Q_1 = 3500^{Kg}$, $Q_2 = 4200^{Kg}$; die Schenkellängen sind: $a_1 = 700^{mm}$, $a_2 = 400^{mm}$, die Entfernung des linken Axkopfmittels vom Halszapfenmittel ist $s = 1700^{mm}$, die Länge des freien Axkopfes ist $L_2 = 200^{mm}$.

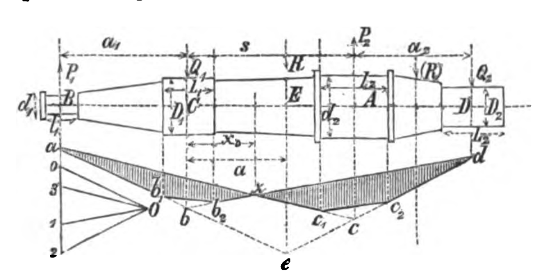


Fig. 66.

Auflösung. Hier sind folgende drei Fälle zu unterscheiden: 1. Die Richtung der Resultirenden der gegebenen Kräfte Q_1 und Q_2 fällt zwischen die beiden Lager (wie in der Figur gezeichnet); 2. die Resultirende fällt ausserhalb der beiden Lager auf eine Seite derselben (wie in der Figur ebenfalls angedeutet); 3. die Richtung der Resultirenden fällt in die Mittellinie des Halslagers, also in dieselbe Verticale, in welche der Auflagerdruck P_2 fällt.

I. Fall. Die Richtung der Resultirenden R der gegebenen Kräfte Q_1 und Q_2 falle zwischen die Unterstützungspunkte A und B der Axe; dann findet man die Entfernung $CE = a$ des Angriffspunktes E der Resultirenden von dem Angriffspunkte der einen Last Q_1 aus dem Satze, dass das Moment der Resultirenden gleich ist der Summe der Momente der Seitenkräfte. Für den Punkt D als festen Punkt hat man daher aus der Gleichung:

$$Q_1 (s + a_2) = R (s + a_2 - a)$$

$$\frac{Q_1}{R} (s + a_2) - s - a_2 = - a, \text{ oder da } R = Q_1 + Q_2 \text{ ist:}$$

$$\frac{(s + a_2)(Q_1 + Q_2) - Q_1 (s + a_2)}{Q_1 + Q_2} = a, \text{ oder}$$

$$\frac{Q_2 (s + a_2)}{Q_1 + Q_2} = a;$$

setzt man die Zahlenwerthe des vorliegenden Beispiels ein, so ist

$$a = \frac{(1700 + 400)\, 4200}{3500 + 4200} = 1145{,}45^{mm};$$

wie man sieht, fällt also hier die Resultirende der Kräfte Q_1 und Q_2 zwischen die beiden Lager.

Zerlegt man die Resultirende R in die zwei zu ihr parallelen, den Auflagerdrücken P_1 und P_2 gleichen, aber diesen entgegengesetzt gerichteten Componenten, so hat man, da die Kräfte $P_1 + P_2$ der Kraft R das Gleichgewicht halten, für den Punkt A als festen Punkt die Momentengleichung:

$$P_1 (s + a_1) + Q_2 a_2 = Q_1 s, \text{ woraus}$$

$$P_1 = \frac{Q_1 s - Q_2 a_2}{a_1 + s} = \frac{3500 \,.\, 1700 - 4200 \,.\, 400}{700 + 1700} = 1780^{Kg} \text{ folgt.}$$

Für den Punkt B als festen Punkt hat man:

$$P_2 (s + a_1) = Q_2 (a_2 + s + a_1) + Q_1 a_1 = a_1 (Q_1 + Q_2) + Q_2 (a_2 + s),$$

woraus

$$P_2 = \frac{a_1 (Q_1 + Q_2) + Q_2 (a_2 + s)}{a_1 + s} =$$

$$= \frac{700 (3500 + 4200) + 4200 (400 + 1700)}{700 + 1700}$$

$P_2 = 5920^{Kg}$ folgt. Aus dem Zapfendruck P_1 berechnen sich die Dimensionen des Stirnzapfens mit

$$d_1 = 1{,}13 \sqrt{P_1} = 1{,}13 \sqrt{1780} = 48^{mm} \text{ und } l_1 = 1{,}5\, d_1 = 72^{mm},$$

wofür wir jedoch bei der Ausführung wegen der besseren Uebereinstimmung der gesammten sich durch die folgende Rechnung ergebenden Dimensionsverhältnisse der Axe nehmen: $d_1 = 55^{mm}$, $l_1 = 80^{mm}$. Der Durchmesser d_2 des Halszapfens kann aus der Festigkeitsgleichung $Q_2 a_2 = \frac{\mathfrak{S} \pi d_2^3}{32}$ berechnet werden; hieraus ist

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{32\, Q_2 a_2}{\mathfrak{S} \pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \,.\, 4200 \,.\, 400}{6 \,.\, 3{,}14}} = 140^{mm}.$$

$$l_2 = 1{,}5\, d_2 = 1{,}5 \,.\, 140 = 210^{mm}.$$

Der Durchmesser D_2 des freien Axkopfes findet sich aus der Gleichung

$$\frac{Q_2 L_2}{2} = \frac{\mathfrak{S} \pi D_2^3}{32} \text{ mit } D_2 = \sqrt[3]{\frac{16\, Q_2 L_2}{\mathfrak{S} \pi}}, \text{ oder}$$

$$D_2 = \sqrt[3]{\frac{16 \,.\, 4200 \,.\, 200}{6 \,.\, 3{,}14}} = 90^{mm}.$$

Für irgend einen Schaftquerschnitt vom Durchmesser y in der Entfernung x von dem linken Axkopfmittel hat man durch Division der für die Durchmesser D_1 und y geltenden Festigkeitsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} P_1(x+a_1)-Q_1 x &= \frac{\mathfrak{S}\pi y^3}{32}, \\ P_1 a_1 &= \frac{\mathfrak{S}\pi D_1^3}{32} \end{aligned}\right\}$$ die obere Gleichung durch die untere dividirt:

$$\frac{y^3}{D_1^3}=\frac{P_1(x+a_1)-Q_1 x}{P_1 a_1}=\frac{P_1 x}{P_1 a_1}+\frac{P_1 a_1}{P_1 a_1}-\frac{Q_1 x}{P_1 a_1}=$$

$$=1+\frac{x}{a_1}\left(1-\frac{Q_1}{P_1}\right), \text{ hieraus ist}$$

$$y=D_1\sqrt[3]{1+\frac{x}{a_1}\left(1-\frac{Q_1}{P_1}\right)}.$$

Einen Punkt im Schafte gibt es, für welchen die Biegungsbeanspruchung gleich Null ist, weil dieser Punkt ein Wendepunkt der elastischen Linie ist, in welchem also der Krümmungshalbmesser ρ unendlich gross, somit nach der bekannten Grundformel der Biegungsfestigkeit $M=\frac{EJ}{\rho}$ das Biegungsmoment $M=$ Null, also auch die Parabelordinate $=0$ wird. Die Entfernung x_0 dieses Punktes von dem linken Axkopfmittel findet man, wenn man in der letzten Gleichung für y dieses $=0$ setzt und die Gleichung nach x auflöst, oder das für irgend einen Schaftquerschnitt vom Durchmesser y in der Entfernung x_0 vom linken Axkopfmittel geltende Moment

$$M=P_1(x_0+a_1)-Q_1 x_0=0 \text{ setzt; hieraus ist}$$

$$P_1 x_0+P_1 a_1=Q_1 x_0 \text{ oder } P_1 a_1=x_0(Q_1-P_1), \text{ woraus } x_0=\frac{P_1 a_1}{Q_1-P_1}$$

folgt. Selbstverständlich kann man an dieser Stelle des Schaftes y nicht $=0$ machen, weil dann nicht nur der Zusammenhang der Axentheile aufgehoben wäre, sondern weil auch der in diesem Schaftquerschnitt auftretenden abscheerenden Kraft Rechnung getragen werden muss. Man bestimmt jedoch den Schaftdurchmesser an dieser Stelle nicht aus der abscheerenden Kraft, sondern durch die Verbindung des linken Axkopfes mit dem Halszapfen mittelst eines Kegelstumpfes, dann ergibt sich der Durchmesser von selbst.

Der Durchmesser D_1 des linken Axkopfes findet sich nach der bereits bekannten Formel

$$D_1=d_1\sqrt[3]{\frac{2a_1}{l_1}}=48\sqrt[3]{\frac{2\,.\,700}{72}}=128^{mm};$$

für die verschiedenen Schaftquerschnitte in den Entfernungen

$$x_1 = 140,\ x_2 = 280,\ x_3 = 420,\ x_4 = 560,\ x_5\ 700^{mm}$$

von dem linken Axkopfmittel nach rechts gegangen, erhält man die zugehörigen Werthe von y nach der oben entwickelten Formel

$$y = D_1 \sqrt[3]{1 + \frac{x}{a_1}\left(1 - \frac{Q_1}{P_1}\right)};$$

setzt man hierin die Zahlenwerthe für D_1, a_1, Q_1, P_1 und für x nach und nach obige Werthe von x_1, x_2 u. s. w. ein, so erhält man: $y_1 = 120$, $y_2 = 110$, $y_3 = 97$, $y_4 = 79$, $y_5 = 44^{mm}$; für die anderen Schaftquerschnitte in den Entfernungen $x = 200$, 400, 600, 800^{mm} von dem Halszapfenmittel nach links gegangen, hat man durch Division der beiden Festigkeitsgleichungen:

$$Q_2 (a_2 + x) - P_2 x = \frac{\mathfrak{S} \pi y^3}{32}$$

für den Schaftquerschnitt in der Entfernung x vom Halszapfenmittel,

$$Q_2 a_2 = \frac{\mathfrak{S} \pi d_2^3}{32}$$

für den Halszapfen geltend (die obere Gleichung durch die untere dividirt)

$$\left(\frac{y}{d_2}\right)^3 = \frac{Q_2 a_2 + Q_2 x - P_2 x}{Q_2 a_2} = 1 + \frac{x}{a_2} - \frac{P_2 x}{a_2} =$$

$$= 1 + \frac{x}{a_2}\left(1 - \frac{P_2}{Q_2}\right) \text{ und}$$

$$y = d_2 \sqrt[3]{1 + \frac{x}{a_2}\left(1 - \frac{P_2}{Q_2}\right)};$$

setzt man hierin für d_2, a_2, P_2, Q_2 die Zahlenwerthe und für x nach einander die Werthe $x = 200$, 400, 600, 800^{mm} ein, so erhält man $y'_1 = 130$, $y'_2 = 117$, $y'_3 = 102$, $y'_4 = 79^{mm}$. Die Parabelordinate y wird gleich Null, für

$$x_0 = \frac{a_1 P_1}{Q_1 - P_1} = \frac{700 \,.\, 1780}{3500 - 1780} = 724{,}4^{mm},$$

vom linken Axkopfmittel nach rechts gegangen. Die graphostatische Bestimmung der Kräfte P_1 und P_2, sowie die Verzeichnung der Momentenfläche geschieht wie folgt: Von einem beliebigen Punkte o einer zur Axe $B\ D$ senkrecht gezogenen Geraden die Kraft $Q_2 = o{,}1$, die Kraft $Q_2 = 1{,}2$ aufgetragen, die Punkte o, 1, 2

mit einem beliebigen Punkte O, dem Pol, verbunden, so erhält man in o, 1, 2, o das geschlossene Kräftepolygon. Man ziehe nun von einem beliebigen Punkte b der Richtung der Kraft Q_1 die Geraden $\overline{ab} \parallel \overline{oO}$, $\overline{bd} \parallel \overline{1,O}$, $\overline{dc} \parallel \overline{2,O}$, so ist die Gerade $\overline{ac}$ die Schlusslinie des Seilpolygons; zieht man nun noch $\overline{O,3} \parallel \overline{ac}$, so ist $\overline{o,3} = P_1$ und $\overline{3,2} = P_2$; die Richtung der Resultirenden R der Kräfte Q_1 und Q_2 ist die Verticale, die man durch den Durchschnittspunkt e der Seilpolygonseiten $\overline{ab}$ und $\overline{dc}$ zur Axe BD zieht. Aus der Momentenfläche $a b_1 b_2 d c_2 c_1 a$ ersieht man, dass es in derselben einen Punkt z gibt, in welchem die Ordinate y, also auch das Moment für diese Stelle der Axe $M = 0$ ist. Die Entfernung dieses Punktes von dem linken Axkopfmittel haben wir bereits allgemein in dem für x_0 gefundenen Werthe bestimmt.

II. Fall. Die Resultirende R der gegebenen Kräfte Q_1 und Q_2 fällt ausserhalb der beiden Unterstützungspunkte der Axe (siehe beistehende Figur). Man zerlege die Kraft R in die ihr parallelen Componenten P_1' und P_2', welche in den Punkten A und C angreifen und hier durch die Lagerreactionen P_1 und P_2 wieder zur Herstellung des Gleichgewichtes aufgehoben werden;

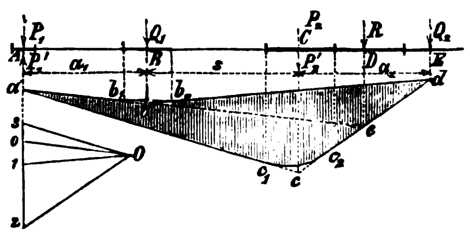


Fig. 67.

die die Axe beanspruchenden Kräfte sind daher die Zapfendrücke P_1 und P_2, sowie die Kraft R oder deren Componenten Q_1 und Q_2. Für den Punkt C als festen Punkt gilt die Momentengleichung:

$$P_1 (a_1 + s) + Q_1 s = Q_2 a_2, \text{ woraus}$$

$$P_1 = \frac{Q_2 a_2 - Q_1 s}{a_1 + s}$$

folgt. Für den Punkt A als festen Punkt hat man:

$$Q_2 (a_2 + s + a_1) + Q_1 a_1 = P_2 (s + a_1), \text{ woraus}$$

$$P_2 = \frac{Q_2 (a_2 + s) + a_1 (Q_1 + Q_2)}{a_1 + s}$$

folgt. Die Dimensionen der Zapfen, der Axköpfe und des Schaftes werden ebenso wie im Falle I berechnet. Die graphostatische Bestimmung der Kräfte P_1 und P_2, sowie die Verzeichnung der Momentenfläche geschieht wie folgt: Von einem beliebigen Punkte o aus auf einer zur Axe AE senkrecht gezogenen Geraden trage man $o,1 = Q_1$, $1,2 = Q_2$ auf, verbinde einen beliebigen Punkt O, den

Pol, mit den Punkten o, 1 und 2, ziehe durch einen beliebigen Punkt b der Richtung der Kraft Q_1 die Geraden $ab \parallel o,O$, $bd \parallel 1,O$, $cd \parallel 2,O$, ziehe die Schlusslinie ac des Seilpolygons und $O,3 \parallel ac$, so ist $o,3 = P_1$, $2,3 = P_2$ und $b_2 d c_2 c c_1 a b_1$ die Momentenfläche, aus welcher ersichtlich ist, dass es hier in der elastischen Linie keinen Wendepunkt, also auch keinen Querschnitt in der Axe gibt, in welchem die Biegungsbeanspruchung gleich Null ist.

III. Fall. Die Resultirende R der gegebenen Kräfte Q_1 und Q_2 fällt gerade mit dem Auflagerdruck P_2 in dieselbe Verticale (siehe folgende Figur); in diesem Falle wird die Resultirende $R = Q_1 + Q_2$ von dem Halslager in D aufgenommen, daher muss

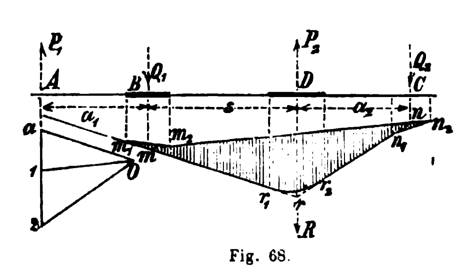


Fig. 68.

$$P_2 = R = Q_1 + Q_2$$

sein, was sich übrigens auch wie folgt beweisen lässt: Für den Punkt A als festen Punkt gilt die Momentengleichung:

$$Q_1 a_1 + Q_2 (a_2 + s + a_1) = P_2 (s + a_2), \text{ woraus}$$

$$P_2 = \frac{a_1 (Q_1 + Q_2) + a_2 Q_2 + Q_2 s}{a_1 + s}$$

folgt; da aber nach dem Satze, dass das statische Moment der Resultirenden gleich ist der algebraischen Summe der Momente der Seitenkräfte, die Gleichung statt hat: $Q_1 s - Q_2 a_2 = R \cdot 0 = 0$, also $Q_1 s = Q_2 a_2$ ist, so kann man in dem letzten Ausdruck für P_2 anstatt $a_2 Q_2$ den Werth $Q_1 s$ einsetzen; man hat dann:

$$P_2 = \frac{a_1 (Q_1 + Q_2) + s (Q_1 + Q_2)}{a_1 + s} = \frac{(a_1 + s)(Q_1 + Q_2)}{a_1 + s} = Q_1 + Q_2.$$

Es folgt daraus, dass $P_1 = 0$ sein muss, was man aber auch wie folgt beweisen kann: Für den Punkt D als festen Punkt gilt die Momentengleichung:

$$P_1 (a_1 + s) + Q_2 a_2 = Q_1 s, \text{ woraus } P_1 = \frac{Q_1 s - Q_2 a_2}{a_1 + s}$$

ist; da aber, wie wir oben sahen, $Q_1 s = Q_2 a_2$ ist, so ist der Zähler des Bruches, durch welchen P_1 ausgedrückt ist, gleich Null, also ist auch $P_1 = 0$, somit werden die biegenden Kraftmomente in dem Stücke AB der Axe gleich Null, d. h. der Axschenkel AB und der Zapfen bei A haben nur den zufällig sie beanspruchenden Kräften

zu widerstehen, und können daher, weil sie von den Kräften Q_1 und Q_2 gar nicht auf Biegung beansprucht werden, unter Umständen sehr leicht und dünn ausgeführt werden. Die Axköpfe in B und C werden wie Stirnzapfen berechnet unter entsprechender Berücksichtigung der Veränderung der Längenverhältnisse $\frac{L_1}{D_1}$ und $\frac{L_2}{D_1}$, gegenüber den bei den Stirnzapfen gewöhnlich gebrauchten Längenverhältnissen, oder direct aus den Festigkeitsgleichungen:

$$\frac{Q_1 L_1}{2} = \frac{\mathfrak{S} \pi D_1^3}{32} \text{ und } \frac{Q_2 L_2}{2} = \frac{\mathfrak{S} \pi D_2^3}{32},$$

wobei L_1 und L_2 die Längen der Axköpfe, D_1 und D_2 ihre Durchmesser bezeichnen.

Ist das Axenstück AB ziemlich lang, so kann man das Moment $\frac{Q_1 L_1}{2}$ noch um das von dem Eigengewichte des Axenstückes AB herrührende Moment vergrössern, wobei das Gewicht aus den nach Gutdünken angenommenen Querschnittsdimensionen des Stückes AB leicht berechnet werden kann. Der Halszapfen in D wird wie bei den Fällen I und II berechnet. Die Verzeichnung der Momentenfläche geschieht wie folgt: Auf einer zur Axe AC senkrecht gezogenen Geraden $a,2$ trage man von einem beliebigen Punkte a aus die Kräfte $Q_1 = a,1$, $Q_2 = 1,2$ auf, verbinde einen beliebigen Punkt O als Pol mit den Punkten a, 1 und 2, ziehe aus einem beliebigen Punkte m der Richtung der Kraft Q_1 die Geraden $mr \parallel aO$, $mn \parallel 1,O$ und verbinde r mit n, so ist, wenn man noch aus den Rändern der Axköpfe und des Halszapfens Lothe auf AC fällt, $m_1 m_2 n_2 n_1 r_2 r r_1 m_1$ die Momentenfläche, wobei jedoch vorausgesetzt wird, dass hier, sowie in allen früheren Fällen, wo eine Axkopfbelastung Q in Componenten (an den Axkopfrändern angreifend) zerlegt wurde, Axkopflänge und Nabenlänge der aufzukeilenden Maschinentheile übereinstimmen, da die Zerlegung der Last Q in Componenten nach den Nabenrändern, aber nicht nach den Axkopfrändern zu geschehen hat. Endlich sei noch erwähnt, dass im vorliegenden Falle die Schlusslinie rn des Seilpolygons dem Polstrahl $2,O$ parallel sein muss.

24. Berechnung einer Eisenbahnwagenaxe (angenähert). Eine Eisenbahnwagenaxe ist eine zweifach tragende massive Axe mit zwei gleich langen frei tragenden Schenkeln, die Querschnitte sind an allen Stellen Kreisflächen, die Belastungen der beiden Tragpunkte seien einander gleich. (Siehe Fig. 69.)

Auflösung. Wenn wir von dem Umstande absehen, dass ausser dem Wagengewichte auch noch andere Kräfte die Festigkeit der Axe beanspruchen, wir also nur das Wagengewicht allein (den Wagen beladen gedacht) in Rechnung ziehen, so berechnet sich vorstehende Axe in derselben Weise, wie die zweifach tragende Axe, bei der die Belastungen Q_1 und Q_2 zwischen den Unterstützungspunkten C_1 und C_2 liegen. Da die Belastungen und die Axschenkel gleich sind, so berechnen wir nur die eine Hälfte der Axe, da beide Zapfen, Axschenkel und Axköpfe je dieselben Dimensionen erhalten. Für die Zapfen hat man

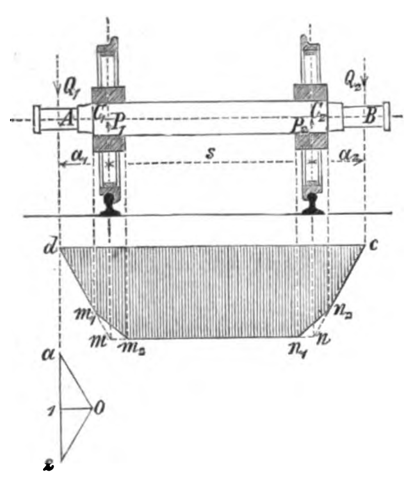


Fig. 69.

$$\frac{Q_1 l_1}{2} = \frac{Q l}{2} = \frac{\mathfrak{S} \pi d^3}{32}, \text{ oder}$$

$$\frac{Q l}{2 d} = \frac{\mathfrak{S} \pi d^2}{32},$$

und da der Zapfen 250 bis 300 Umdrehungen pro Minute macht, so setzt man, wenn er aus Schmiedeisen ist,

$$\frac{l}{d} = 2, \text{ daher } Q = \frac{\mathfrak{S} \pi d^2}{32}, \text{ woraus folgt: } d = \sqrt{\frac{32\, Q}{\mathfrak{S} \pi}}.$$

Für einen beliebigen Querschnitt eines Axschenkels in der Entfernung x von dem einen Zapfenmittel hat man nach der bereits entwickelten Formel $y = d \sqrt[3]{\frac{2 x}{l}}$, gleich dem Durchmesser des gefragten Querschnittes. Die Dicke D der Axköpfe (Theile der Axe, auf welchen die Räder festsitzen) wird stärker ausgeführt, als sie sich aus der Gleichung $Q a = \frac{\mathfrak{S} \pi D^3}{32}$ ergibt, da die ganze Axe, also auch die Axköpfe, nicht nur durch das Gewicht des beladenen Wagens allein, sondern auch noch durch andere, hier nicht berücksichtigte Kräfte in Anspruch genommen wird und daher auch, entsprechend der genaueren Rechnung stärker ausfällt, als es obige Gleichung ergibt. Für einen Querschnitt des Schaftes vom Durchmesser y in der Entfernung x von dem einen Axkopfmittel hat man:

$$Q_1 (a_1 + x) - P_1 x = \frac{\mathfrak{S} \pi y^3}{32}, \text{ oder } Q_1 a_1 + Q_1 x - P_1 x = \frac{\mathfrak{S} \pi y^3}{32};$$

da aber $P_1 = Q_1 = Q_2 = P_2$ ist, so hat man

$$Q_1 a_1 + Q_1 x - Q_1 x = \frac{\mathfrak{S} \pi y^3}{32} \quad \text{und} \quad Q_1 a_1 = Q a = \frac{\mathfrak{S} \pi y^3}{32};$$

da in dieser Gleichung kein x mehr vorkommt, so geht daraus hervor, dass alle Schaftquerschnitte gleich gross werden; der Schaft also ein Cylinder vom Durchmesser gleich der Axkopfdicke D wird; denn für letztere hatten wir $Q a = \frac{\mathfrak{S} \pi D^3}{32}$; für alle Schaftquerschnitte ist $Q a = \frac{\mathfrak{S} \pi y^3}{32}$; diese beiden Gleichungen durch einander dividirt, gibt $y = D$.

Die Verzeichnung der Momentenfläche geschieht wie folgt: Man verzeichne das Kräftepolygon: $a,2 \perp AB$, $a,1 = Q_1$, $1,2 = Q_2$, verbinde mit einem beliebigen Punkte O die Punkte a, 1 und 2, ziehe ferner durch einen beliebigen Punkt d der Richtung der Kraft Q_1 Parallele zu den ersten beiden Polstrahlen, nämlich $\overline{dm} \parallel a O$, $\overline{dc} \parallel 1,O$, $\overline{cn} \parallel 2,O$, so ist mn die Schlusslinie des Polygons, welche parallel sein muss zum Polstrahl $1,O$, endlich fälle man noch Lothe aus den Nabenrändern der Räder auf die Axe AB, so hat man in der Fläche $d m_1 m_2 n_1 n_2 c d$ die gesuchte Momentenfläche.

25. Genauere Berechnung einer Eisenbahnwagenaxe. Bezeichnet P den auf die Axe AB entfallenden und im Wagenschwerpunkt S angreifenden Theil des Wagengewichtes, so wirkt ausser dieser Verticalbelastung P ebenfalls am Punkte S zeitweilig eine durch Centrifugalkraft und Schwankungen hervorgebrachte Horizontalkraft P_1, welche nach Scheffler zu $0{,}4\,P = P_1$ vorausgesetzt werden kann. Die Resultirende R dieser zwei Kräfte P und P_1 hat daher eine schiefe Richtung SC gegen die Axe, welche sie in C schneidet. Man zerlege nun in diesem Punkte die Resultirende in die Verticalcomponente Q und die Horizontalcomponente H, das aus ersterer entstehende biegende Moment kann für jeden Axenquerschnitt leicht aus dem Seilpolygon gefunden werden. Die durch die Schienenköpfe gegen die Radkränze, also auch gegen die mit letzteren fest verbundene Axe ausgeübten Reactionen R_1 und R_2 müssen mit der Kraft R im Gleichgewicht sein. Zerlegt man nun die letztere in zwei Componenten nach den Schienenköpfen S_1' und S_2' hin, so werden sie durch die Reactionen R_1 und R_2 der Schienenköpfe, welche die Unterstützungspunkte der Axe sind, aufgehoben. Die Richtungen der Schienenreactionen R_1 und R_2 schneiden die Axe in den Punkten F und G; zerlegt man nun von diesen Punkten aus die Kräfte R_1 und R_2 in die Horizontalcomponenten H_1 und H_2, sowie V_1 und V_2, so müssen die beiden ersteren mit der Horizontal-

kraft H, die letzteren Componenten V_1 und V_2 mit der Verticalkraft Q im Gleichgewichte sein. Zur Bestimmung der Zapfendrücke Q_1 und Q_2 (resp. Axkopfbelastungen) zerlege man entweder die Verticalbelastung Q in die parallelen Componenten Q_1 und Q_2, welche in den Zapfenmitteln A und B angreifen, unter Vernachlässigung der Horizontalkraft H; oder man zerlege die Kraft R vom Punkte S aus nach den Punkten A und B hin in die Componenten Z_1 und Z_2 und jede dieser Kräfte wieder in eine Horizontalcomponente $A'' A'$

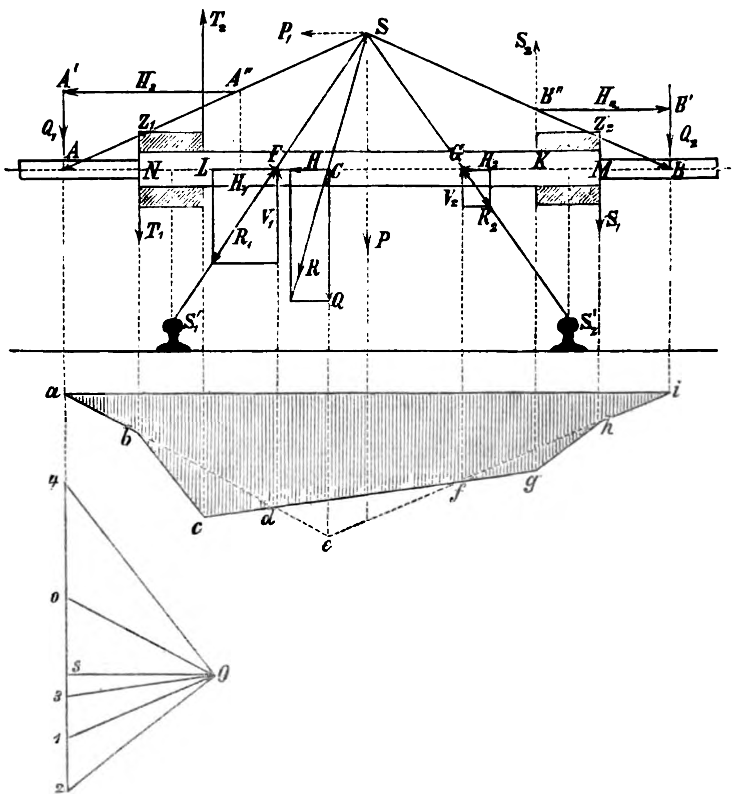


Fig. 70.

resp. $B'' B'$ und Verticalcomponente Q_1 resp. Q_2, unter Vernachlässigung der Horizontalkräfte $A'' A' = H_3$ und $B'' B' = H_4$; hierbei muss für das Gleichgewicht

$$H_3 - H_4 = H = H_1 - H_2$$

sein, so dass der Theil AN der Axe durch die Kraft H_3, der Theil BM durch die Kraft H_4 und der Schaft LK durch die Kraft $H_4 - H_2 = H_3 - H_1$ auf Zug beansprucht wird. Die Vertical-

componenten V_1 und V_2 der Schienenreactionen R_1 und R_2 rufen an den Rändern der Radnaben die einander entgegengesetzt gerichteten, die Axe drückenden Kräfte T_2 und T_1, resp. S_2 und S_1 hervor, so dass also die die Axe auf Biegung beanspruchenden Kräfte (mit Ausnahme des Eigengewichtes) Q_1, Q_2, T_2, T_1, S_2 und S_1 sind; die ersteren zwei rühren von der Verticallast Q, die letzten vier von den Schienenreactionen, resp. deren Verticalcomponenten V_1 und V_2 her. Die Bestimmung der Kräfte Q_1, Q_2, V_1, V_2, T_2, T_1, S_2, S_1, sowie die Verzeichnung der Momentenfläche geschieht wie folgt: Auf einer zur Axe AB senkrecht gezogenen Geraden $a,2$ trage man von einem beliebigen Punkte o aus $o,1 = Q$ auf, verbinde einen beliebigen Punkt O, den Pol, mit den Punkten o und 1, ziehe aus einem beliebigen Punkte e der Richtung der Kraft Q Parallele zu diesen beiden Polstrahlen, also $ae \parallel o,O$, $ei \parallel 1,O$ und ziehe zur Schlusslinie ai vom Punkte O aus eine Parallele, also $sO \parallel ai$, dadurch ist die Strecke $o,1$ in die beiden Abschnitte $os = Q_1$, $s,1 = Q_2$ getheilt worden.

Da die Kräfte V_1 und V_2 der Kraft Q das Gleichgewicht halten müssen, so kann man Q in zwei Componenten zerlegen, die an den Durchschnittspunkten F und G der Kraftrichtungen R_1 und R_2 mit der Axe AB angreifen, den Kräften V_1 und V_2 an Grösse gleich, der Richtung nach aber entgegengesetzt sind; um diese Zerlegung der Kraft Q nach der Methode der Graphostatik auszuführen, fälle man von den Punkten F und G Senkrechte zu AB, verbinde die Durchschnittspunkte derselben mit den Seilpolygonseiten ae und ei, das sind die Punkte d und f mit einander, und ziehe zu dieser Geraden aus dem Punkte O eine Parallele, also $3,O \parallel cg$, so ist $o,3 = V_1$, $3,1 = V_2$; zerlegt man ferner diese Kräfte V_1 und V_2 in die Componenten T_1, T_2, resp. S_1, S_2, an den Nabenrändern angreifend, so fälle man aus den letzteren, also aus den Punkten N, L, K und M Senkrechte zu AB, verbinde die Durchschnittspunkte der Senkrechten mit den Seilpolygonseiten in der bekannten Weise mit einander, ziehe also die Geraden bc, gh und Parallele hierzu aus dem Pol O, also $4,O \parallel bc$ und $2,O \parallel gh$, so ist $3,4 = T_2$, $o,4 = T_1$, $3,2 = S_2$, $1,2 = S_1$ und $abcghia$ die Momentenfläche. Trägt man jetzt die nun gefundenen Kräfte V_1, V_2, Q_1, Q_2 auf den betreffenden Verticalen auf und ergänzt die Kräfteparallelogramme, so hat man die Horizontalkräfte H_3, H_4, H_2 und H_1 graphisch gefunden.

Endlich sei noch erwähnt, dass, weil die Horizontalkraft H hier nach links gerichtet ist (die aber auch nach rechts gerichtet sein kann), der stärkst beanspruchte Querschnitt der Axe, wie aus der Momentenfläche ersichtlich, die Stelle am Nabenrande in L ist; da nun die Axe symmetrisch ausgeführt wird, so ist zur Berechnung der Axe nur der links von der Verticalen des Punktes S liegende Theil der Momentenfläche zu benutzen. Da es möglich ist, dass die

Zapfenbelastungen Q_1 und Q_2 dadurch stärker ausfallen könnten (also auch die Zapfen selbst stärker gemacht werden müssten), wenn man nur die im Punkte S angreifende Verticalbelastung P allein und die Horizontalkraft P_1 nicht berücksichtigt, so ist es geboten, auch für den letzteren Fall die Rechnung zu machen und das grössere Resultat beizubehalten.

26. Es ist eine schmiedeiserne Axe mit drei Tragpunkten und vollen Kreisflächen als Querschnitten nach folgenden Angaben zu berechnen: Die Länge der Axe zwischen den Zapfenmitteln betrage $2{,}5^m$, die Dimensionen der Axschenkel und der Schafttheile seien:

$$a_1 = 0{,}6^m,\ s_1 = 0{,}5^m,\ s_2 = 0{,}9^m,$$

$$a_2 = 2{,}5^m - (0{,}6 + 0{,}5 + 0{,}9) = 0{,}5^m$$

(siehe folgende Figur). Die Belastungen der Axköpfe seien:

$$Q_1 = 5000^{Kg},\ Q_2 = 5000^{Kg},\ Q_3 = 7000^{Kg}.$$

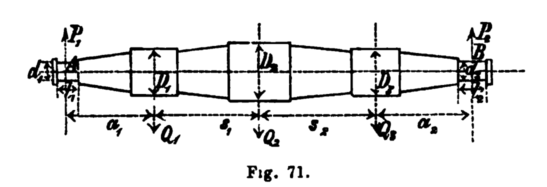


Fig. 71.

Auflösung. Für den Punkt B als festen Punkt gilt die Momentengleichung:

$$P_1 (a_1 + s_1 + s_2 + a_2) = Q_1 (s_1 + s_2 + a_2) + Q_2 (s_2 + a_2) + Q_3 a_2,$$

woraus

$$P_1 = \frac{Q_1 (s_1 + s_2 + a_2) + Q_2 (s_2 + a_2) + Q_3 a_2}{a_1 + s_1 + s_2 + a_2}, \text{ oder}$$

$$P_1 = \frac{Q_1 s_1 + Q_1 s_2 + Q_1 a_2 + Q_2 s_2 + Q_2 a_2 + Q_3 a_2}{a_1 + s_1 + s_2 + a_2}, \text{ oder}$$

$$P_1 = Q_1 \cdot \frac{s_1 + s_2 \left(1 + \frac{Q_2}{Q_1}\right) + a_2 \left(1 + \frac{Q_2}{Q_1} + \frac{Q_3}{Q_1}\right)}{a_1 + s_1 + s_2 + a_2} \text{ folgt.}$$

Die Zahlenwerthe eingesetzt:

$$P_1 = 5000 \cdot \frac{0{,}5 + 0{,}9\left(1 + \frac{5000}{5000}\right) + 0{,}5\left(1 + \frac{5000}{5000} + \frac{7000}{5000}\right)}{2{,}5} =$$

$$= 8000^{Kg}.$$

Da $Q_1 + Q_2 + Q_3 = P_1 + P_2$ sein muss, so folgt

$$P_2 = Q_1 + Q_2 + Q_3 - P_1 = 17000 - 8000 = 9000^{Kg}.$$

Direct erhält man den Werth von P_2 durch die für den Punkt A als festen Punkt geltende Momentengleichung:

$$P_2 (a_2 + s_2 + s_1 + a_1) = Q_3 (s_2 + s_1 + a_1) + Q_2 (s_1 + a_1) + Q_1 a_1,$$

woraus

$$P_2 = \frac{Q_3 (s_2 + s_1 + a_1) + Q_2 (s_1 + a_1) + Q_1 a_1}{a_1 + s_1 + s_2 + a_2}, \text{ oder}$$

$$P_2 = Q_3 \cdot \frac{s_2 + s_1 \left(1 + \frac{Q_2}{Q_3}\right) + a_1 \left(1 + \frac{Q_2}{Q_3} + \frac{Q_1}{Q_3}\right)}{a_1 + s_1 + s_2 + a_2}$$

folgt; die Zahlenwerthe eingesetzt, erhält man wie oben $P_2 = 9000^{Kg}$. Die Zapfendimensionen werden demnach:

$$d_1 = 1{,}13 \sqrt{P_2} = 1{,}13 \sqrt{8000} = 100^{mm},$$

$$l_1 = \frac{3}{2} d_1 = \frac{3}{2} \cdot 100 = 150^{mm},$$

$$d_2 = 1{,}13 \sqrt{P_2} = 1{,}13 \sqrt{9000} = 107^{mm},$$

$$l_2 = \frac{3}{2} d_2 = \frac{3}{2} \cdot 107 = 160^{mm}.$$

Für die beiden Axschenkel von den Längen a_1 und a_2 bestimmen wir wie früher in fünf verschiedenen Querschnitten die Durchmesser nach der Formel: $y = d_1 \sqrt[3]{\frac{2x}{l_1}}$, so dass man für den Schenkel a_1 hat:

für $x = 120,\ 240,\ 360,\ 480,\quad a_1 = 600^{mm},$

$y = 117,\ 147,\ 168,\ 185,\quad D_1 = 200^{mm};$

für den Schenkel a_2 hat man nach der Formel $y = d_2 \sqrt[3]{\frac{2x}{l_2}}$

für $x = 100,\ 200,\ 300,\ 400,\quad a_2 = 500^{mm},$

$y = 115,\ 145,\ 166,\ 183,\quad D_3 = 197^{mm}.$

Den Durchmesser D_3 des dritten Axkopfes erhält man auch wie folgt:

Für den linken Zapfen in A gilt die Festigkeitsgleichung

$$\frac{P_1 l_2}{2} = \frac{\mathfrak{S} \pi d_1^3}{32},$$

für den Durchmesser D_3 gilt die Gleichung:

$$P_1(a_1 + s_1 + s_2) - Q_1(s_1 + s_2) - Q_2 s_2 = \frac{\mathfrak{S}\,\pi\, D_3^3}{32},$$

diese beiden Gleichungen durch einander dividirt, gibt:

$$\frac{D_3^3}{d_1^3} = \frac{P_1(a_1 + s_1 + s_2) - Q_1(s_1 + s_2) - Q_2 s_2}{\frac{P_1 l_1}{2}}, \text{ oder}$$

$$\frac{D_3^3}{d_1^3} = \frac{P_1 a_1 + P_1 s_1 + P_1 s_2 - Q_1 s_1 - Q_1 s_2 - Q_2 s_2}{\frac{P_1 l_1}{2}},$$

oder Zähler und Nenner des rechten Theiles durch P_1 dividirt:

$$\frac{D_3^3}{d_1^3} = \frac{a_1 + s_1 + s_2 - \frac{Q_1 s_1}{P_1} - \frac{Q_1 s_2}{P_1} - \frac{Q_2 s_2}{P_1}}{\frac{l_1}{2}}, \text{ oder}$$

$$\frac{D_3^3}{d_1^3} = \frac{a_1 + s_1\left(1 - \frac{Q_1}{P_1}\right) + s_2\left(1 - \frac{Q_1}{P_1} - \frac{Q_2}{P_1}\right)}{\frac{l_1}{2}}, \text{ woraus}$$

$$D_3 = d_1 \sqrt[3]{\frac{a_1 - s_1\left(1 - \frac{Q_1}{P_1}\right) + s_2\left(1 - \frac{Q_1}{P_1} - \frac{Q_2}{P_1}\right)}{\frac{l_1}{2}}}$$

folgt. Setzt man die Zahlenwerthe ein, so erhält man wie oben $D_3 = 197^{mm}$.

Setzt man in der Formel für D_3 $s_2 = 0$, so erhält man den Durchmesser D_2 des mittleren Axkopfes, nämlich

$$D_2 = d_1 \sqrt[3]{\frac{a_1 + s_1\left(1 - \frac{Q_1}{P_1}\right)}{\frac{1}{2} l_1}} = 100 \sqrt[3]{\frac{600 + 500\left(1 - \frac{5}{8}\right)}{\frac{1}{2} \cdot 150}},$$

$D_2 = 218^{mm}$. Setzt man in der Formel für D_3, $s_2 = 0$ und $s_1 = 0$, so erhält man den Durchmesser D_1 des ersten Axkopfes,

$$D_1 = d_1 \sqrt[3]{\frac{2\,a_1}{l_1}} = 100 \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 600}{150}} = 200^{mm}.$$

Die gefundenen Werthe von D_1, D_2 und D_3 werden, wie bereits aus früheren Beispielen von Axenberechnungen bekannt ist, entsprechend verstärkt und erhalten die den aufzusteckenden Naben entsprechenden Längen.

Nun erübrigt noch, die beiden Schafttheile zu berechnen.

Bei der Berechnung der Schaftquerschnitte in dem Beispiele über die zweifach tragende Axe hatten wir die Formel:

$$y = D_1 \sqrt[3]{1 + \frac{x}{a_1}\left(1 - \frac{Q_1}{P_1}\right)};$$

hier können wir dieselbe Formel gebrauchen, mit der Bemerkung, dass x die Entfernung eines dem linken Schafttheil angehörenden Querschnittes vom Durchmesser y von der Mitte des ersten (linken) Axkopfes vom Durchmesser D_1 ist. Für den zweiten Schafttheil hat man in gleicher Weise

$$y = D_3 \sqrt[3]{1 + \frac{x}{a_2}\left(1 - \frac{Q_3}{P_2}\right)}$$

wobei x die Entfernung des dem rechten Schafttheil angehörenden Querschnittes vom Durchmesser y von der Mitte des dritten Axkopfes vom Durchmesser D_3 bezeichnet. Durch die zwei letzten Formeln für y könnte man, wie leicht ersichtlich, mehrere Querschnitte der beiden Schafttheile berechnen, die erhaltenen Durchmesser als Senkrechte zur geometrischen Axe auftragen, die Endpunkte der Ordinaten mit einander verbinden, und dadurch die genaue Form der gleichen Festigkeit erhalten; allein diese genaue theoretische Profilform ist, wie aus Früherem bekannt, nicht wesentlich von der Form eines Kegelstumpfes verschieden; man kann daher, wenn es sich nicht um besondere Genauigkeit handelt, ohne weiters die theoretischen Axkopfbegrenzungen geradlinig mit einander verbinden.

Für eine vierfach tragende Axe hätte man:

$$P_1 = Q_1 \cdot \frac{s_1 + s_2\left(1 + \frac{Q_2}{Q_1}\right) + s_3\left(1 + \frac{Q_2}{Q_1} + \frac{Q_3}{Q_1}\right) + a_2\left(1 + \frac{Q_2}{Q_1} + \frac{Q_3}{Q_1} + \frac{Q_4}{Q_1}\right)}{a_1 + s_1 + s_2 + s_3 + a_2},$$

$$P_2 = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 - P_1$$

und den Durchmesser D_4 des vierten Axkopfes:

$$D_4 = d_1 \sqrt[3]{\frac{a_1 + s_1\left(1 - \frac{Q_1}{P_1}\right) + s_2\left(1 - \frac{Q_1}{P_1} - \frac{Q_2}{P_1}\right) + s_3\left(1 - \frac{Q_1}{P_1} - \frac{Q_2}{P_1} - \frac{Q_3}{P_1}\right)}{{}^1/_2\, l_1}}.$$

Setzt man in dieser Formel nach einander s_3, s_2, $s_1 = 0$, so geht die Formel über in die für die Axköpfe von den Durchmessern D_3, D_2, D_1.

Die zeichnerische Aufsuchung der beiden Zapfendrücke P_1, P_2, sowie der Momente nach der Methode der Graphostatik geschieht wie folgt: Die Axe hätte beispielsweise fünf Tragpunkte (siehe beistehende Figur). Man ziehe $o,5$ senkrecht zu AB, trage von einem beliebigen Punkte o dieser Senkrechten die Strecken

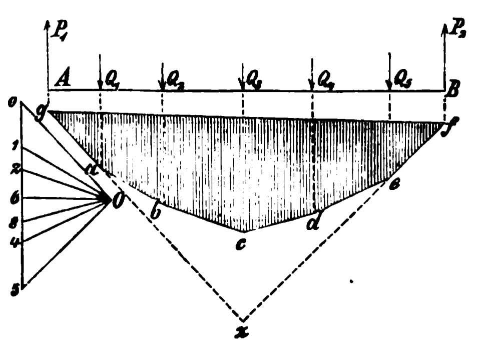


Fig. 72.

$$o,1 = Q_1,\ 1,2 = Q_2,$$
$$2,3 = Q_3,\ 3,4 = Q_4,$$
$$4,5 = Q_5$$

auf, verbinde die Punkte o, 1, 2, 3, 4 und 5 mit einem beliebigen Punkte O, dem Pol, ziehe durch einen beliebigen Punkt a der Richtung der Kraft Q_1 Parallele zu den ersten beiden Polstrahlen, also $ag \parallel o,O$, $ab \parallel 1,O$, ferner $bc \parallel 2,O$, $cd \parallel 3,O$, $de \parallel 4,O$, $ef \parallel 5,O$ und ziehe zur Schlusslinie gf des Seilpolygons aus dem Punkte O eine Parallele; also $O,6 \parallel gf$; dann ist $o,6 = P_1$, $6,5 = P_2$ und $gabcdef$ die Momentenfläche, von der nebenbei noch erwähnt sei, dass durch den Durchschnittspunkt z der ersten Seilpolygonseite ga und letzten Seilpolygonseite ef, wie bekannt, die Resultirende der gegebenen Kräfte Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 und Q_5 hindurchgeht.

Hat die mehrfach belastete Axe freitragende Schenkel, so ermittle man zuerst die Grösse und den Angriffspunkt der Resultirenden der sämmtlichen gegebenen Kräfte, zerlege diese Resultirende in zwei parallele Componenten, deren Richtungen in die Richtungslinien der Zapfendrücke P_1 und P_2 fallen, diesen an Grösse gleich, der Richtung nach aber entgegengesetzt sind. Daraus erfährt man, welche Richtungen die Zapfendrücke haben und kann nun weiter nach den Regeln der

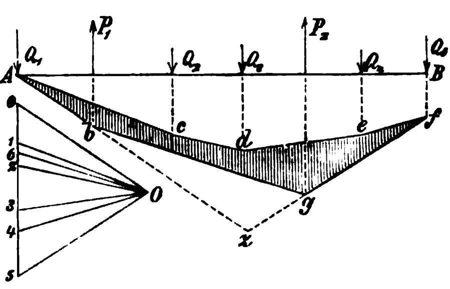


Fig. 73.

Gleichgewichtslehre und der Festigkeit die analytische Berechnung der verschiedenen Axenquerschnitte vornehmen. Die graphostatische

Berechnung geschieht wie folgt: Man verzeichne in der bekannten Weise das Kräftepolygon $o,1,2,3,4,5$, mache also $o,5 \perp AB$, $o,1 = Q_1$, $1,2 = Q_2$, $2,3 = Q_3$, $3,4 = Q_4$, $4,5 = Q_5$, verbinde mit einem beliebigen Punkte O, dem Pol, die Punkte o, 1, 2, 3, 4, 5, ziehe aus einem beliebigen Punkte A der Richtung der Kraft Q_1 Parallele zu den beiden Polstrahlen o,O und $1,O$, also $Ab \parallel o,O$, $Ac \parallel 1,O$, ferner $cd \parallel 2,O$, $de \parallel 3,O$, $ef \parallel 4,O$, $fg \parallel 5,O$, ziehe die Schlusslinie bg und $O,6 \parallel bg$, dann ist $o,6 = P_1$, $6,5 = P_2$, $Acdefgb$ die Momentenfläche. Der Durchschnittspunkt z der ersten Polygonseite Ab und letzten Polygonseite fg ist wieder ein Punkt der Richtung der Resultirenden der gegebenen Kräfte.

27. Es ist eine gusseiserne hohle Axe mit zwei gleichen Belastungen $Q_1 = Q_2 = Q = 5400^{Kg}$ und gleichen Schenkellängen $a_1 = a_2 = a = 450^{mm}$ zu berechnen; die ganze Länge der Axe zwischen den Zapfenmitteln beträgt $2,7^m$ (siehe folgende Figur).

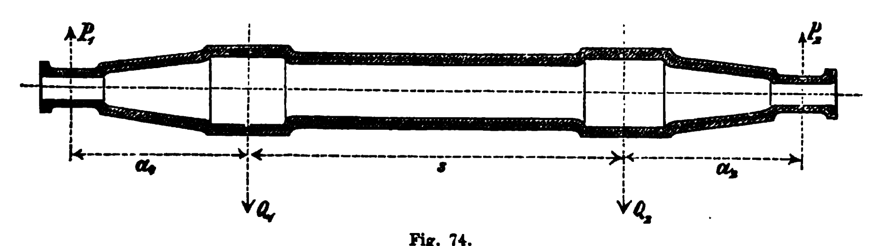


Fig. 74.

Auflösung. Im vorliegenden Falle werden beide Zapfendrücke einander gleich, $P_1 = P_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{2} = \frac{2\,Q}{2} = Q$, wir erhalten also wegen der gleichen Zapfendrücke und gleichen Schenkellängen ganz gleiche Stirnzapfen, zwei gleiche Axschenkel, zwei gleiche Axköpfe und einen cylindrischen Schaft, wir brauchen daher die Rechnung nur für die eine Hälfte der Axe durchzuführen.

Wir berechnen die Axe zunächst so, als ob sie eine gusseiserne massive von kreisförmigen Querschnitten wäre, welche gleichwerthig mit der gusseisernen hohlen Axe ist, d. h. dieselbe Tragfähigkeit haben soll, wie diese. Darnach werden die Zapfendurchmesser der massiven Axe

$$d_0 = 1,5\sqrt{P} = 1,5\sqrt{5400} = 110^{mm},$$

$l_0 = 1,3\,d_0 = 1,3\,.\,110 = 145^{mm}$. Nehmen wir in den Schenkeln fünf Querschnitte an, in gleichen Abschnitten von je 90^{mm}, so erhalten wir für die Schenkelquerschnitte der massiven Axe nach der Formel

$$y_0 = d_0\sqrt[3]{\frac{2x}{l_0}} = d_0\sqrt[3]{\frac{2}{l_0}}\,.\sqrt[3]{x}, \quad y_0 = 110\sqrt[3]{\frac{2}{145}}\,.\sqrt[3]{x} = 26,4\sqrt[3]{x};$$

setzen wir in dieser Formel $x = 90$, 180, 270, 360, $a = 450^{mm}$ ein, so erhält man die zugehörigen Werthe von $y_0 = 118$, 149, 170, 188, $D_0 = 202^{mm}$.

Der Durchmesser y_0' irgend eines Schaftquerschnittes der massiven Gussaxe ist nach der bereits bekannten Formel

$$y_0' = D_0 \sqrt[3]{1 + \frac{x'}{a}\left(1 - \frac{Q_1}{P_1}\right)}$$

zu berechnen, in welcher x' die Entfernung des Schaftquerschnittes vom Durchmesser y_0' von dem linken Axkopfmittel bedeutet. Da aber $P_1 = Q_1$, ist so wird $y_0' = D_0$ und da dieses für jeden Schaftquerschnitt der Fall ist, so wird der Schaft cylindrisch, daher $y_0' = D_0 = 202^{mm}$. Wollte man das Eigengewicht der Axe berücksichtigen, so verfahre man nach der schon früher erklärten Methode, indem man vorläufig die Axe ohne Berücksichtigung des Eigengewichtes berechnet, aus den so erhaltenen Querschnittsdimensionen das angenäherte Gewicht der Axe ermittelt und dann diese noch einmal unter Berücksichtigung des gefundenen Gewichtes berechnet; will man noch genauer verfahren, so wird man aus den nun zum zweiten Male gefundenen Querschnittsdimensionen noch einmal das Gewicht der Axe berechnen und die Dimensionsberechnung der letzteren nochmals unter Berücksichtigung des zum zweiten Male gefundenen Gewichtes vornehmen. Will man jedoch das Gewicht der Axe nicht mit in Rechnung ziehen, so ist es gut, wenn man dem Schafte eine nach der Schwerpunktslage desselben hin zunehmende Stärke gibt, also den oben ausgerechneten Werth des Schaftdurchmessers von 202^{mm} in der Schwerpunktslage des Schaftes etwas grösser nimmt. Nachdem wir nun die massive gusseiserne Axe berechnet, verwandeln wir die vollen Kreisquerschnitte in ringförmige. Es heisse der äussere Durchmesser der Zapfen d_a, der innere Durchmesser d_i, die Länge des hohlen Zapfens l, so machen wir $l = l_0$ und wählen das Höhlungsverhältniss $\frac{d_i}{d_a} = \alpha = 0{,}6$; wir erhalten dann aus der bei der Berechnung von hohlen Gusszapfen aufgestellten Tabelle (Seite 145) für dieses Höhlungsverhältniss

$$d_a = 1{,}05\, d_0 = 1{,}05 \,.\, 110 = 116^{mm},\quad d_i = 0{,}6\, d_a = 0{,}6 \,.\, 116 = 70^{mm},$$

daher die Wandstärke $\delta = 23^{mm}$. Bezeichnen wir die äusseren Durchmesser der hohlen Schenkel in den fünf angenommenen Querschnitten mit y_a, die inneren Durchmesser mit y_i und wählen dasselbe Höhlungsverhältniss $\frac{y_i}{y_a} = 0{,}6$, so erhält man:

$$\begin{array}{lllllll} \text{für } x = & 90, & 180, & 270, & 360, & a & = 450^{mm} \\ y_a = & 124, & 156, & 178, & 197, & D_a & = 212^{mm} \\ y_i = & 74, & 93, & 107, & 118, & D_i & = 127^{mm} \\ \delta = & 25, & 31{,}5, & 38{,}5, & 39{,}5, & \delta & = 42{,}5^{mm}. \end{array}$$

Zu bemerken ist noch, dass für die Ausführung der Axe Zapfen- und Axkopfdurchmesser etwas vergrössert werden müssen, damit die kubische Parabel (welche wie bekannt die Form der gleichen Festigkeit der Schenkel ist) innerhalb der Begrenzungslinien des Kegelstumpfes fällt, welcher die strenge Form der gleichen Festigkeit der Schenkel ersetzt.

Die Berechnung einer hohlen Axe kann auch so geschehen, dass man zuerst die hohlen Zapfen unter Annahme eines entsprechenden Höhlungsverhältnisses berechnet und dann zur Berechnung der übrigen Querschnitte dieselben Formeln verwendet, welche wir bei den früheren Beispielen über Berechnung von massiven Axen verwendet haben, wobei der Zapfendurchmesser d, auf welchen dort die übrigen Querschnittsdimensionen der Axe bezogen wurden, hier der äussere Zapfendurchmesser ist; auf diese Art erhält man direct sämmtliche äussere Durchmesser der Axe; das Höhlungsverhältniss wird in allen Querschnitten gleich angenommen. Darnach würde z. B. der äussere Durchmesser des Axkopfes

$$D_a = d_a \sqrt[3]{\frac{2\,a}{l_0}} = 116 \sqrt[3]{\frac{2\,.\,450}{145}} = 211{,}12^{mm}.$$

Selbstverständlich kann man auch unabhängig von jenen Formeln die Axe direct nach der Grundformel $M = \frac{\mathfrak{S}\,J}{c}$ berechnen, den Werth von $\frac{J}{c} = \frac{\mathfrak{S}\,\pi\,(d_a^4 - d_i^4)}{32\,d_a}$, sowie $d_i = \alpha\,d_a$ einsetzen und die einzelnen Querschnitte ausrechnen; oder man kann auch durch Vergleichung der Querschnittsmoduli des vollen Kreis- und des Kreisring-Querschnittes die Dimensionen des letzteren durch die des ersteren ausdrücken, sowie wir dies bei der Berechnung der hohlen Zapfen gethan haben. (Siehe diese.)

Anmerkung. Die Anwendung hohler Formen bei Gusseisen ist wegen der bedeutenden Materialersparniss durchaus rationell. Vergleicht man z. B. den Querschnittsmodul eines vollen Kreisquerschnittes $Z = \frac{\pi\,d_a^3}{32}$ mit dem Querschnittsmodul eines Kreisringquerschnittes, $Z_1 = \frac{\pi\,(d_a^4 - d_i^4)}{32\,d_a}$, bei welchem $d_i = 0{,}33\,d_a$ sein mag, so hat man

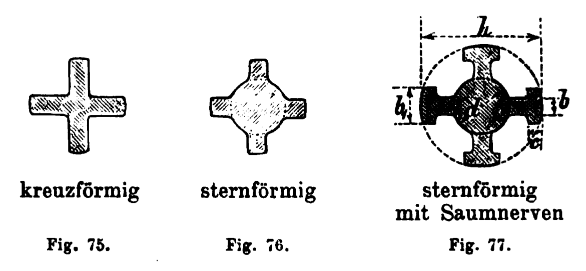
$$\frac{Z}{Z_1} = \frac{d_a^3}{d_a^3 - 0{,}01186\,d_a^3} = \frac{1}{0{,}988}.$$

Die Materialersparniss, dargestellt durch das Verhältniss der Querschnittsflächen, ist ersichtlich aus dem Bruche

$$\frac{f}{f_1} = \frac{\frac{\pi d_a^2}{4}}{\frac{\pi}{4}(d_a^2 - 0{,}1089\, d_a^2)} = \frac{1}{0{,}891};$$

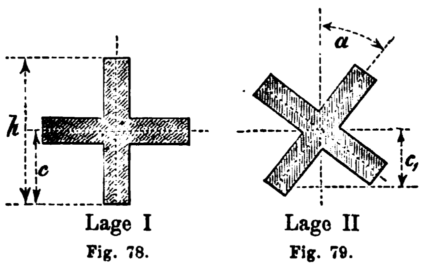
während also die Festigkeit des hohlen Zapfens, dessen äusserer Durchmesser gleich dem Durchmesser des massiven Zapfens ist, 0,988 der Festigkeit des massiven Zapfens wurde, also nahezu dieselbe geblieben ist, ist der Materialverbrauch des hohlen nur noch 0,891 des massiven, woraus hervorgeht, dass bei nur geringer Vermehrung der äusseren Durchmesser eine bedeutende Materialersparniss erzielt wird; abgerechnet noch den vortheilhaften Umstand, dass der Guss der hohlen Axe dichter hergestellt werden kann, als der der massiven Axe.

28. Berechnung von gusseisernen Flügelaxen. Diese Axen haben meist zwei oder drei Tragpunkte und einen rein kreuzförmigen, oder einen sternförmigen, oder endlich einen sternförmigen Querschnitt mit Rand- oder Saumnerven an den Flügeln. (Siehe folgende Figuren.) Die Zapfen sind cylindrisch, die Axschenkel meist



kreuzförmig — Fig. 75. sternförmig — Fig. 76. sternförmig mit Saumnerven — Fig. 77.

massiv und konoidisch, die Axköpfe massiv cylindrisch und der Schaft allein, oder Schaft und Axköpfe, oder Schaft, Axköpfe und Schenkel haben einen der hier gezeichneten Querschnitte. Bevor wir zu einer speciellen Aufgabe übergehen, bleibt noch zu untersuchen übrig, welchen Einfluss die Lage der neutralen Axe auf die Grösse des Querschnittsmoduls, also auch auf die Festigkeit der Axe ausübt bei einer in jedem Falle vertical nach abwärts wirkenden Belastung. In den zwei nebenstehenden Figuren ist der reine Kreuzquerschnitt in zwei verschiedenen Lagen gezeichnet. In der Lage I bildet die Höhe h eines Flügels mit der Verticalen einen Winkel



Lage I — Fig. 78. Lage II — Fig. 79.

$\alpha = 0$; in der Lage II ist dieser Winkel $= \alpha$; im Falle I ist die Entfernung der am weitesten vom Schwerpunkt des Querschnittes

gelegenen Querschnittselemente $= c$, im Falle II gleich c'. Es ist aber für die Lage I $c = \frac{h}{2}$, für die Lage II ist $c' = \frac{h}{2} \cos \alpha$. Während einer Drehung der Flügel von Lage I um 90° erhält $\cos \alpha$ nach einander die Werthe von 1 bis 0; im vorliegenden Falle kommt aber nur $\frac{1}{8}$ Drehung, also um den Winkel von 45° in Frage, wobei die neutrale Axe den Winkel zweier Flügel halbirt. Man hat dann für eine Drehung um 45° aus Lage I, die Gleichung:

$$c'^2 + c'^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2, \text{ oder } 2c'^2 = \frac{h^2}{4}, \text{ woraus}$$

$$c' = \frac{h}{\sqrt{8}} = \frac{h}{2} . 0{,}7 = 0{,}35\, h$$

folgt, oder weil $\cos \alpha = \cos 45° = 0{,}7$ ist, so hat man ebenfalls $c' = \cos \alpha . \frac{h}{2} = 0{,}7 . \frac{h}{2} = 0{,}35\, h$. Da in der Formel $M = \frac{\mathfrak{S}\, J}{c}\ c$ als Divisor auftritt, so wird der ungünstigere Fall der sein, wobei c seinen grössten Werth erreicht, d. i. also hier $c = \frac{h}{2}$, bei $\alpha = 0$, wenn also ein Flügel in die Verticalebene fällt. Wir legen daher diesen Fall den folgenden Berechnungen zu Grunde, weil sich für denselben die geringste Tragfähigkeit ergibt, oder weil man dann für eine bekannte Last P grössere, dem ungünstigsten Falle entsprechende Querschnittsdimensionen erhält. Die Berechnung der Flügelaxen geschieht wie folgt:

Man berechnet zuerst die Zapfendrücke aus den gegebenen Belastungen, Schenkel- und Schaftlängen, ermittelt die Zapfendimensionen und die darauf bezogenen Durchmesser der Schenkel, Axköpfe und des Schaftes so, als ob alle Axenquerschnitte volle Kreisflächen wären. Unter Zugrundelegung des Satzes, dass zwei verschiedene Querschnitte gleiche Festigkeit haben, wenn sie gleiche Querschnittsmoduli haben, leitet man aus dem irgend einer Stelle der Axe zukommenden bekannten, vollen Kreisquerschnitte die dieser Stelle zukommenden Kreuzquerschnittsdimensionen ab.

Berechnen wir z. B. den Querschnittsmodul des Sternquerschnittes mit Saumnerven (siehe frühere Figur) und setzen denselben dem Querschnittsmodul des vollen Kreisquerschnittes vom Durchmesser y gleich, so hat man:

Das Trägheitsmoment des Kreiskerns vom Durchmesser d ist $i_1 = \frac{\pi d^4}{64}$, das Trägheitsmoment der zwei horizontalen Flügel ohne

Saumnerven ist: $i_2 = \frac{(h - d)\, b^3}{12}$, das Trägheitsmoment der Saumnerven der horizontalen Flügel ist $i_3 = \frac{2\, c\, (b_1^3 - b^3)}{12}$, das Trägheitsmoment der zwei verticalen Flügel ohne Saumnerven ist $i_4 = \frac{b\, (h^3 - d^3)}{12}$, das Trägheitsmoment der Saumnerven der zwei verticalen Flügel ist $i_5 = \frac{(b_1 - b)\, [h^3 - (h - 2\, c)^3]}{12}$; die Trägheitsmomente i_1 bis i_5 addirt und diese Summe durch c dividirt, gibt den gesuchten Querschnittsmodul:

$$Z = \frac{J}{c} = \frac{i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5}{\frac{h}{2}};$$

man erhält nun durch Gleichsetzung der beiden Querschnittsmoduli:

$$\frac{\pi y^3}{32} = \frac{2}{h} \left\{ \frac{\pi d^4}{64} + \frac{(h - d)\, b^3}{12} + \frac{2\, c\, (b_1^3 - b^3)}{12} + \frac{b\, (h^3 - d^3)}{12} + \right.$$
$$\left. + \frac{(b_1 - b)\, [h^3 - (h - 2\, c)^3]}{12} \right\}$$

oder 12 als gemeinschaftlichen Factor im Nenner herausgehoben, den Werth $(h - 2\, c)^3$ ausgerechnet und reducirt, gibt:

$$\frac{\pi y^3}{32} = \frac{1}{6\, h} \left\{ 0{,}589\, d^4 + (h - d)\, b^3 + 2\, c\, (b_1^3 - b^3) + b\, (h^3 - d^3) + \right.$$
$$\left. + (b_1 - b)\, [6\, c\, h^2 - 12\, c^2 h + 8\, c^3] \right\} \ldots\ldots\ldots (A).$$

Will man einen Querschnitt ohne Kern anwenden, so setze man in dieser Formel $d = 0$, mit Ausnahme des in der Klammer enthaltenen vierten Gliedes, wo man $d = b$ zu setzen hat; denn würde man auch im vierten Gliede $d = 0$ setzen, so wird der rechte Theil der Gleichung etwas zu gross, weil man dann die Fläche b^2, in welcher sich die zwei Rechtecke bh der Flügelquerschnitte decken, zweimal in Rechnung bringen würde.

Setzt man ferner in der letzten Gleichung ausserdem noch $b_1 = b$, also $c = 0$, so erhält man eine Gleichung für den reinen Kreuzquerschnitt. Am gebräuchlichsten sind bei Flügelaxen folgende Querschnitte:

1) $b =$ constant, $b_1 =$ veränderlich, $c =$ constant, $d = 0$, im vierten Gliede $d = b$,
2) $b =$ constant, $b_1 =$ constant, $c =$ constant, $d =$ veränderlich,

3) $b =$ constant, $b_1 = b$, $d =$ constant (cylindrischer Kern) ohne Saumnerven,

4) $b =$ constant, $b_1 = b$, $d =$ veränderlich (konoidischer Kern) ohne Saumnerven,

5) $b =$ veränderlich, $b_1 = b$, $d = 0$, im vierten Gliede $d = b$, ohne Kern und ohne Saumnerven.

Wir haben z. B. eine gusseiserne Axe mit zwei gleichen Belastungen $Q_1 = Q_2 = Q = 5400^{Kg}$, mit gleichen Schenkeln $a_1 = a_2 = = a = 450^{mm}$ und der Schaftlänge $s = 1{,}8^m$ zu berechnen. Zapfen, Axschenkel und Axköpfe sollen massiv kreisförmig, der Schaft kreuzförmig mit konoidischem, sich nach der Mitte zu verjüngendem Kern ausgeführt werden. Die Dimensionen der Zapfen, Schenkel und Axköpfe nehmen wir aus dem vorhergehenden Beispiele der Berechnung einer gusseisernen hohlen Axe, wo wir zuerst die Dimensionen der ideellen massiven Axe mit Kreisquerschnitten, wie folgt, fanden: $d_0 = 110^{mm}$, $l_0 = 145^{mm}$, für die fünf Querschnitte eines jeden Schenkels fanden wir für

$$x = \;\; 90,\; 180,\; 270,\; 360, \quad a = 450^{mm},$$
$$y = 118,\; 149,\; 170,\; 188, \quad D = 202^{mm}.$$

Wegen des besseren Ueberganges zwischen den Axköpfen und dem Schafte machen wir $D = 210^{mm}$, die Länge der Axköpfe nehmen wir gleich 280^{mm}.

Aus Beispiel 27 ersahen wir, dass der massive kreisrunde Schaft cylindrisch wird, also y constant ist; wir setzen daher in Formel (A) $b_1 = b =$ einer constanten Grösse, man erhält dann:

$$\frac{\pi y^3}{32} = \frac{1}{6h}\left[0{,}589\, d^4 + (h - d)\, b^3 + b\,(h^3 - d^3)\right] \ldots . \;(I).$$

In dieser Gleichung ist $y = 210^{mm}$ die einzige bekannte Grösse, während h, b und d zu ermitteln sind. Die Flügelhöhe h wird für jeden Schaftquerschnitt als bekannt angenommen und zwar in der Weise, dass man in der Mitte der Axe eine der Länge des Schaftes entsprechende grösste Flügelhöhe h annimmt und die Endpunkte dieser Höhe mit den Axkopfbegrenzungen durch gerade oder krumme (Kreis- oder Parabel- oder Sinoidenbögen) Linien verbindet, so dass das Flügelprofil des Schaftes geschmackvoll ausfällt. Auf diese Weise werden die Flügelhöhen in den verschiedenen Schaftquerschnitten bekannt. Sehr häufig setzt man die Flügelhöhe in der Schaftmitte (resp. grösste Flügelhöhe) gleich $2\,y$; nehmen wir auch hier dieses an, so ist $h = 2\,y = 2 \,.\, 210 = 420^{mm}$. Nun bleiben in der Gleichung aber noch die zwei Unbekannten d und b, wovon d veränderlich und b constant ist.

Wir setzen zur Vereinfachung in Formel (A) $b = b_1$ und $d = 0$, welche Vernachlässigung man sich hier erlauben darf, da im Querschnitt der Schaftmitte die in der Nähe der neutralen Axe liegenden Flächenelemente des Kreiskernes ohne wesentlichen Einfluss auf den Querschnittsmodul sind; wir setzen ferner im vierten Gliede $d = b$, $y = 210$, $h = 420$ ein und erhalten:

$$0{,}09816 \,.\, (210)^3 = \frac{1}{6 \,.\, 420} \left\{ 420\, b^3 + b \left[(420)^3 - b^3 \right] \right\}, \text{ oder}$$

$$5454358 = b^3 + 176400\, b - \frac{b^4}{420};$$

dieser Gleichung genügt angenähert der Werth $b = 30$, führen wir nämlich diesen Werth ein, so erhalten wir auf der rechten Seite 5317071 anstatt 5454358; da aber der Kreiskern noch dazu kommt, so können wir diesen Werth $b = 30$ beibehalten; wäre z. B. b zu gross ausfallen, vielleicht $b \gtreqless 60$, so hätten wir für h einen grösseren Werth als 420 wählen müssen und umgekehrt. Führen wir nun in Formel (I) $b = 30$ ein, so ist:

$$\frac{\pi}{32} \,.\, (210)^3 = \frac{1}{6h} \left[0{,}589\, d^4 + (h - d)\, 27000 + 30\, h^3 - 30\, d^3 \right],$$

für den Querschnitt der Schaftmitte ist $h = 420$, daher

$$5454358 \,.\, 420 = 0{,}589\, d^4 + 420 \,.\, 27000 - 27000\, d$$
$$+ 30 \,.\, 74088000 - 30\, d^3, \text{ oder}$$

$$2290830360 = 0{,}589\, d^4 - 30\, d^3 - 27000\, d + 2233980000, \text{ oder}$$
$$56850360 = 0{,}589\, d^4 - 30\, d^3 - 27000\, d,$$

dieser Gleichung genügt der Werth $d = 116^{mm}$. Man trägt nun in der Mitte des Schaftes den gefundenen Kerndurchmesser auf und zieht von den Endpunkten desselben Gerade nach den Axköpfen; man erhält dann den Kern als zwei sich nach der Schaftmitte hin verjüngende Kegelstumpfe. Es ist dies eine hinreichende Annäherung an die genaue Form, während man zur Darstellung der genauen Form noch für mehrere Schaftquerschnitte die Werthe von d zu ermitteln und die Endpunkte der vertical aufgetragenen Durchmesser durch stetige krumme Linien zu verbinden hätte.

Weit einfacher gestaltet sich aber die Rechnung, wenn man die Kerndicke d constant und bekannt, die Flügeldicke b aber als veränderlich und unbekannt betrachtet. In Gleichung (I), welche lautet:

$$\frac{\pi y^3}{32} = \frac{1}{6h} \left[0{,}589\, d^4 + b\, (h^3 - d^3) + b^3\, (h - d) \right].$$

beiderseits durch h^3 dividirt und statt des Zahlencoëfficienten 0,589 den demselben gleichen Werth $\frac{3\pi}{16}$ gesetzt:

$$\frac{3\pi}{16}\left(\frac{y}{h}\right)^3 = \frac{3\pi}{16}\left(\frac{d}{h}\right)^4 + \frac{b}{h}\left[1-\left(\frac{d}{h}\right)^3\right] + \left(\frac{b}{h}\right)^3\left(1-\frac{d}{h}\right);$$

das letzte Glied des rechten Theils

$$\left(\frac{b}{h}\right)^3\left(1-\frac{d}{h}\right) = \frac{b^3}{h^3} - \frac{b^3 d}{h^4}$$

enthält sehr kleine Grössen, die sich auch noch zum Theil aufheben, also einen nur sehr geringen Einfluss auf den Werth des rechten Theils der Gleichung haben; wir können sie daher vernachlässigen und erhalten dann:

$$\frac{y}{h} = \sqrt[3]{\left(\frac{d}{h}\right)^4 + \frac{16}{3\pi}\cdot\frac{b}{h}\left[1-\left(\frac{d}{h}\right)^3\right]}.$$

Nimmt man nun d constant und bekannt an, so kennt man für jeden Schaftquerschnitt das Verhältniss $\frac{d}{h}$, das Verhältniss $\frac{y}{h}$ kennt man ebenfalls, daher bleibt noch das unbekannte Verhältniss $\frac{b}{h}$ allein zu berechnen übrig. Aus der letzten Gleichung folgt:

$$\left(\frac{y}{h}\right)^3 = \left(\frac{d}{h}\right)^4 + \frac{16}{3\pi}\cdot\frac{b}{h}\left[1-\left(\frac{d}{h}\right)^3\right], \text{ woraus}$$

$$\frac{b}{h} = \frac{\left(\frac{y}{h}\right)^3 - \left(\frac{d}{h}\right)^4}{\frac{16}{3\pi}\left[1-\left(\frac{d}{h}\right)^3\right]}$$

sich ergibt. Wir setzen z. B. für die Schaftmitte $h = 2y$ und $\frac{d}{h} = 0{,}3$, also $d = 0{,}3\,h = 0{,}3 \,.\, 420 = 126^{mm}$, es ist ferner $\frac{y}{h} = \frac{210}{420} = \frac{1}{2}$, man erhält, wenn man diese Zahlenwerthe einsetzt:

$$\frac{b}{h} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(0{,}3\right)^4}{\frac{16}{3\pi}\left[1-(0{,}3)^3\right]} = 0{,}07,$$

also $b = 0{,}07\,h = 0{,}07 \,.\, 420 = 29{,}40$ und abgerundet $b = 30^{mm}$. In gleicher Weise hätte man nun für mehrere Schaftquerschnitte die ihnen entsprechenden Werthe von b zu berechnen, als senkrechte Gerade zur geometrischen Axe aufzutragen und die Endpunkte dieser Senkrechten durch stetige krumme Linien zu verbinden. (Siehe die folgenden Figuren.)

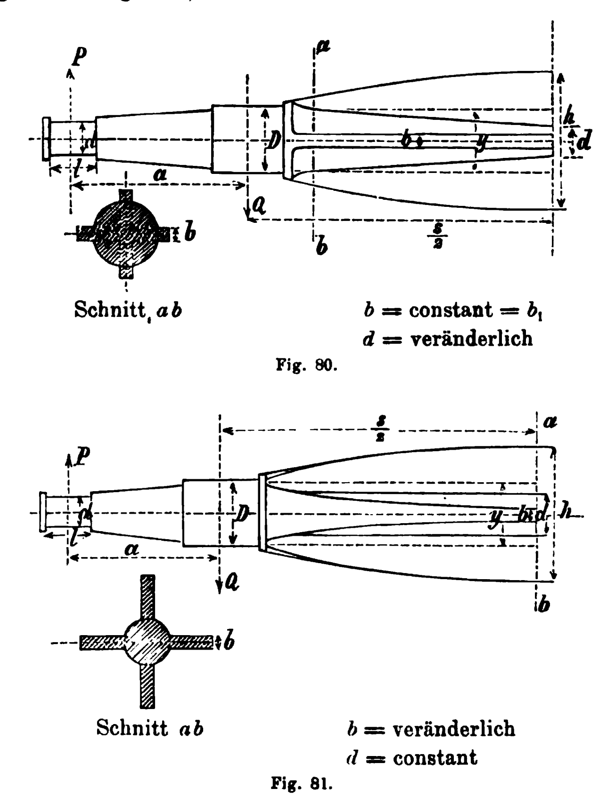


Fig. 80.

Fig. 81.

29. Es ist eine gusseiserne Flügelachse für dieselben Bedingungen wie in Beispiel 28 (siehe dort) zu berechnen; der Querschnitt des Schaftes sei rein kreuzförmig.

Auflösung. Die Dimensionen der Zapfen, Schenkel und Axköpfe fallen ebenso aus, wie in Beispiel 28. Zur Berechnung des Schaftes haben wir in Formel (A) (Beispiel 28) zu setzen: $b_1 = b$, $d = 0$ und im vierten Gliede $d = b$, man erhält dann:

$$\frac{\pi y^3}{32} = \frac{1}{6h}\left[h b^3 + b\,(h^3 - b^3)\right],$$

$y = 210$ constant angenommen, gibt:

$$5454358 = b^3 + b\,h^2 - \frac{b^4}{h},$$

die Flügelhöhe in der Schaftmitte machen wir $h = 420^{mm}$, verzeichnen die Flügelprofile und erhalten dadurch für die verschiedenen Schaftquerschnitte die zugehörigen Werthe der Flügelhöhen. Man erhält für $h = 420$:

$$5454358 = b^3 + 176400\,b - \frac{b^4}{420},$$

dieser Gleichung genügt angenähert der Werth $b = 32^{mm}$, für $h = 400$ erhält man:

$$5454358 = b^3 + 160000\,b - \frac{b^4}{400},$$

dieser Gleichung genügt angenähert der Werth $b = 34^{mm}$; für $h = 370^{mm}$, erhält man:

$$5454358 = b^3 + 136900\,b - \frac{b^4}{370},$$

dieser Gleichung genügt der Werth: $b = 39^{mm}$ u. s. w.,

für $h = 333$ wird $b = 49^{mm}$,
» $h = 288$ » $b = 65^{mm}$,
» $h = 258$ » $b = 82^{mm}$,

Diese Flügeldicken werden der Reihe nach in den betreffenden Punkten als Senkrechte zur geometrischen Axe aufgetragen und die Exdpunkte dieser Senkrechten durch stetige krumme Linien verbunden, die sich in der Nähe der Axköpfe in die Flügelprofile verlaufen. (Siehe letzte Figur.)

30. Es ist eine hölzerne Wasserradaxe aus nachfolgenden Angaben zu berechnen: die Länge der Axe zwischen den beiden Zapfenmitteln betragen $2{,}7^{m}$, die Schenkellängen seien $a_1 = 0{,}8^{m}$, $a_2 = 0{,}45^{m}$ und die betreffenden Belastungen senkrecht zur Axe seien $Q_1 = 4000^{Kg}$ und $Q_2 = 5000^{Kg}$, die Zapfen sind aus Gusseisen.

Auflösung. Zur Ermittlung der Zapfendrücke P_1 und P_2 haben wir die Gleichung zu benützen, welche wir bei der zweifach belasteten Axe in Beispiel 22 für P_1 entwickelten. Wir fanden dort:

$$P_1 = \frac{Q_1\,(s + a_2) + Q_2\,a_2}{a_1 + s + a_2},$$

oder Zahlenwerthe eingesetzt:

$$P_1 = \frac{4000\,(1{,}45 + 0{,}45) + 5000 \,.\, 0{,}45}{2{,}7} = 4185^{Kg},$$

$$P_2 = \frac{Q_2(s+a_1)+Q_1 a_1}{a_1+s+a_2} = \frac{5000(1,45+0,8)+4000 \,.\, 0,45}{2,7} = 4815^{Kg};$$

selbstverständlich muss $P_1 + P_2 = Q_1 + Q_2$, also $4185^{Kg} + 4815^{Kg} = 9000^{Kg}$ sein.

Wir nehmen hier bei den Zapfen das Verhältniss $\frac{l}{d} = 1,5$, wir haben daher die nach den Formeln für Gusseisenzapfen zu berechnenden Durchmesser

$$d_1 = 1,5\sqrt{P_1} = 1,5\sqrt{4185} = 97$$

noch mit $\sqrt[3]{\frac{1,5}{1,3}}$ zu multipliciren (siehe Beispiele über Zapfenberechnung), da die angewandte Zapfenformel für das Verhältniss $\frac{l}{d} = 1,3$ entwickelt wurde. Wir erhalten daher

$$d_1 = 97\sqrt[3]{\frac{1,5}{1,3}} = 97 \,.\, 1,154 = 112^{mm},$$

$$l_1 = 1,5 \,.\, 112 = 170^{mm},$$

$$d_2 = 1,5\sqrt{P_2} \,.\, \sqrt[3]{\frac{1,5}{1,3}} = 1,5\sqrt{4815} \,.\, 1,154 = 120^{mm},$$

$$l_2 = 1,5 \,.\, 120 = 180^{mm}.$$

Für die Durchmesser D_1 und D_2 der Axköpfe einer gleichwerthigen gusseisernen Axe haben wir nach der bei der zweifach belasteten Axe entwickelten Formel:

$$D_1 = d_1\sqrt[3]{\frac{2a_1}{l_1}} = 112\sqrt[3]{\frac{1600}{170}} = 236^{mm},$$

$$D_2 = d_2\sqrt[3]{\frac{2a_2}{l_2}} = 120\sqrt[3]{\frac{900}{180}} = 205^{mm}.$$

Es heisse T_h der Tragmodul für Holz, T_g der Tragmodul für Gusseisen, so hat man für den Axkopf der Holzaxe:

$$M = \frac{\pi}{32} D_h^3 T_h$$

bei Beanspruchung bis zur Elasticitätsgrenze; für den Axkopf der Gusseisenaxe hat man unter der gleichen Beanspruchung:

$$M = \frac{\pi}{32} D_g^3 T_g,$$

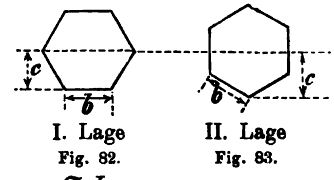
die beiden Gleichungen für M durch einander dividirt:

$$1 = \frac{D_h^3 T_h}{D_g^3 T_g}, \text{ woraus } D_h = D_g \sqrt[3]{\frac{T_g}{T_h}} = D \sqrt[3]{\frac{75}{2}} \text{ und}$$

$$D_h = 1{,}553\, D_g = 1{,}553 \,.\, 236 = 366^{mm} \text{ folgt.}$$

Da dieser Durchmesser dem grösseren Axkopfe angehört und wir die Axe cylindrisch machen, so brauchen wir den zweiten kleineren Axkopf nicht mehr auszurechnen.

Nehmen wir endlich noch an, der Querschnitt der Axe soll ein reguläres Sechseck sein, so haben wir vorerst zu untersuchen, bei welcher Lage des Sechseckes die Festigkeit der Axe die geringste ist. (Siehe beistehende Figuren.) Das Trägheitsmoment dieses Querschnittes ist für beide Lagen dasselbe, aber der Querschnittsmodul ist für die Lage II



I. Lage Fig. 82. II. Lage Fig. 83.

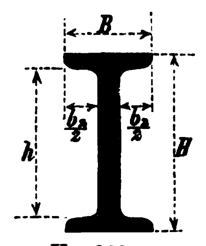
der kleinere, weil die in der Formel $M = \frac{\mathfrak{S}\, J}{c}$ als Divisor auftretende Grösse c in der Lage II die grössere ist. Wir nehmen daher den kleineren Querschnittsmodul in Rechnung und ersehen aus der Tabelle der Querschnittsmoduli, dass für die II. Lage des Sechseckes $Z = 0{,}5413\, b^3$, daher

$$M = \frac{\pi}{32} D_h \mathfrak{S} = 0{,}5413\, b^3 \mathfrak{S} \text{ ist, woraus}$$

$$b = D_h = \sqrt[3]{\frac{\pi}{32 \,.\, 0{,}5413}} = 366 \,.\, 0{,}5656 = 207^{mm}$$

als Sechseckseite folgt.

Es ist jedoch noch zu erwähnen, dass die hier ausgerechneten Querschnittsdimensionen der cylindrischen oder sechsseitigen, prismatischen Axe, also die Werthe D_h oder b noch wegen der Schwächung der Axe durch Einbringung der Gusszapfen etwas verstärkt werden müssen, da man sich ja überdies mit den Querschnittsdimensionen der Axe auch nach den Dimensionen der Zapfenverbindung richten muss.



$H = 232^{mm}$
$B = 97^{mm}$
$b = 77^{mm}$
$h = 206^{mm}$

Fig. 84.

31. Ein Doppel-T-Träger, dessen Querschnittsdimensionen in nebenstehender Figur angegeben sind, ist an seinen beiden Enden unterstützt, und soll auf seiner freien Länge von $l = 4^m$ eine über der ganzen Länge gleichmässig vertheilte Last tragen. Wie gross ist

diese Tragfähigkeit, *a)* wenn der Träger aus Schmiedeisen, *b)* wenn er aus Gusseisen ist?

Auflösung. Für den vorliegenden Unterstützungs- und Belastungsfall haben wir die Formel:

$$\frac{Pl}{8} = \mathfrak{S} Z, \text{ woraus } P = \frac{8 \mathfrak{S} Z}{l}$$

ist, oder für Z den Werth $Z = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$ gesetzt, erhält man:

$$P = \frac{8 \mathfrak{S} (BH^3 - bh^3)}{6lH} = \frac{8 \,.\, 7{,}5 \,[97 \,(232)^3 - 77 \,(206)^3]}{6 \,.\, 4000 \,.\, 232}, \text{ oder}$$

$$\underline{P = 5798^{Kg}.}$$

Die Tragfähigkeit eines gusseisernen Trägers von denselben Querschnittsdimensionen findet man entweder dadurch, dass man in obiger Formel für P, für die Spannung $\mathfrak{S}$ den dem Gusseisen entsprechenden Werth, also $\mathfrak{S}_g = 2{,}5$ einsetzt und den Werth von P berechnet, oder man findet die Tragkraft P_g für den gusseisernen Träger aus der Proportion:

$$P_s : P_g = \mathfrak{S}_s : \mathfrak{S}_g, \text{ woraus}$$

$$P_g = \frac{P_s \mathfrak{S}_g}{\mathfrak{S}_s} = \frac{5798 \,.\, 2{,}5}{7{,}5} = 1932{,}6^{Kg} \text{ folgt.}$$

32. Ein abgestutzter Kegel aus Gusseisen ist an einem Ende in horizontaler Lage eingemauert und am anderen Ende durch eine vertical nach abwärts wirkende Last P auf Biegung beansprucht. Die Halbmesser der beiden Grundflächen seien: $R = 300^{mm}$, und $r = 200^{mm}$, die freie Länge des Kegelstutzes sei $l = 500^{mm}$. Man fragt: *a)* Wo ist der gefährliche Querschnitt? *b)* Wie gross ist die Tragfähigkeit dieses Kegelstutzes bei der angegebenen Art der Belastung, wenn im gefährlichen Querschnitt eine Spannung von $\mathfrak{S} = 2{,}5^{Kg}$ pro Quadrat-Millimeter gestattet ist? *c)* Hat der Kegelstutz die Form der gleichen Festigkeit oder nicht? *d)* Wie gross ist die Tragfähigkeit eines Cylinders, dessen Halbmesser gleich dem mittleren Halbmesser und dessen Länge gleich der des Kegelstutzes ist?

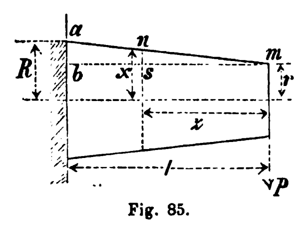


Fig. 85.

Auflösung. Angenommen, es sei in der Entfernung z vom freien Ende des Kegels (siehe nebenstehende Figur) der gefährliche Querschnitt vom Halbmesser x, so ist für diesen Querschnitt das Biegungsmoment $M = \mathfrak{S} Z = \frac{\pi x^3 \mathfrak{S}}{4}$, die Ebene dieses Querschnittes ist also die

Brechungsebene; für diese muss die Grösse $P = \frac{M}{z}$ zu einem Minimum gemacht werden; man kann daher fragen, für welchen Werth von z wird P ein Minimum? Ziehen wir durch den Punkt m eine Parallele $\overline{mb}$ zur Axe des Kegels, so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke amb und mns die Proportion:

$$\overline{ab} : \overline{ns} = l : z, \text{ oder } (R - r) : (x - r) = l : z, \text{ hieraus ist:}$$

$$x - r = \frac{(R - r) z}{l} \text{ und } x = \frac{r l + (R - r) z}{l},$$

diesen Werth von x in die Gleichung $M = \frac{\pi x^3 \mathfrak{S}}{4}$ eingesetzt, gibt:

$$M = \frac{\mathfrak{S}\pi}{4}\left[\frac{(R - r) z + r l}{l}\right]^3 \text{ und } P = \frac{M}{z} = \frac{\mathfrak{S}\pi[(R - r) z + r l]^3}{4 l^3 z}$$
$$= \text{Minimum.}$$

Da in diesem Ausdrucke für P die Grösse $\frac{\pi \mathfrak{S}}{4 l^3}$ constant ist, so frägt es sich jetzt nur, für welchen Werth von z wird der Ausdruck $\frac{[(R - r) z + r l]^3}{z}$ zu einem Minimum? Setzen wir den ersten Differential-Quotienten dieses Ausdruckes nach z gebildet, gleich Null, so ist:

$$\frac{3 [(R - r) z + r l]^2 (R - r) z - [(R - r) z + r l]^3}{z^2} = 0$$

oder mit z^2 beiderseits multiplicirt und $[(R - r) z + r l]^2$ herausgehoben:

$$[(R - r) z + r l]^2 \left\{3 z (R - r) - [(R - r) z + r l]\right\} = 0$$

Da der Factor $[(R - r) z + r l]^2$ nicht $= 0$ werden kann, so muss der andere Factor gleich Null werden, d. h. es wird:

$$3 z (R - r) = (R - r) z + r l, \text{ woraus } z = \frac{r l}{2 (R - r)}$$

folgt; diesen Werth von z in die obige Gleichung für P eingesetzt, gibt:

$$P = \frac{\frac{\mathfrak{S}\pi}{4 l^3}\left[(R - r) \frac{r l}{2 (R - r)} + r l\right]^3}{\frac{r l}{2 (R - r)}} = \frac{\mathfrak{S}\pi}{4 l^3}\left(\frac{r l + 2 r l}{2}\right)^3 \cdot \frac{2 (R - r)}{r l}$$

oder

$$P = \frac{27 \mathfrak{S} \pi r^2 (R - r)}{16 l}.$$

Wenn nun dieser Ausdruck das Minimum der Belastung P für den Werth von $z = \frac{r l}{2 (R - r)}$ vorstellt, so muss offenbar in dem Querschnitte, der sich in der Entfernung z vom freien Ende des Kegels befindet, die Materialfaserspannung ein Maximum sein, d. h. an dieser Stelle ist der gefährliche Querschnitt. In die Gleichungen für P und z die Zahlenwerthe eingesetzt, hat man:

$$P = \frac{27 \cdot 2{,}5 \cdot 3{,}14 \cdot (200)^2 (300 - 200)}{16 \cdot 500} = 105975^{Kg},$$

es ist ferner

$$z = \frac{200 \cdot 500}{2 (300 - 200)} = 500^{mm},$$

somit liegt der gefährliche Querschnitt an der Einmauerungsstelle des Kegels, und es würde daher an dieser Stelle der Bruch bei vermehrter Belastung erfolgen.

Setzt man $z = \frac{r l}{2 (R - r)} = l$, so folgt hieraus $\frac{r}{2} = R - r$ und $r = \frac{2}{3} R$, d. h. also, wenn die Halbmesser der Grundflächen des Kegelstutzes in dem Verhältniss $\frac{R}{r} = \frac{3}{2}$ stehen, so ist der gefährliche Querschnitt immer an der Einmauerungsstelle und für diesen Fall hat man, wenn man in die Gleichung für P anstatt r den Werth $r = \frac{2}{3} R$ einsetzt, die Tragfähigkeit:

$$P = \frac{27 \mathfrak{S} \pi}{16 l} \left(\frac{2}{3} R\right)^3 \cdot \frac{R}{r} = \frac{\mathfrak{S} \pi R^3}{4 l},$$

also denselben Werth, als wenn man in der Gleichung $M = Pl = \mathfrak{S} Z$ für Z den Werth $Z = \frac{\pi R^3}{4}$ eingesetzt hätte.

Der Kegelstutz hat nicht die Form der gleichen Festigkeit, denn an der Einmauerungsstelle ist die Spannung $\mathfrak{S} = 2{,}5$ und in einer beliebigen Entfernung z vom freien Ende ist die Spannung aus der Gleichung

$$P = \frac{\mathfrak{S} \pi}{4} \cdot \frac{[(R - r) z + r l]^3}{l^2 z}$$

zu finden, nämlich

$$\mathfrak{S} = \frac{4\,P l^3 z}{\pi\,[(R - r)\,z + r\,l]^3}$$

d. h. für die verschiedenen Werthe von z, also für verschiedene Querschnitte des Kegelstutzes ist $\mathfrak{S}$ verschieden gross, somit hat der Kegelstutz keine Form der gleichen Festigkeit. Ein Cylinder von dem Halbmesser $r_1 = \frac{R + r}{2}$, $r_1 = \frac{300 + 200}{2} = 250^{mm}$ hat bei derselben Länge wie die des Kegels eine Tragfähigkeit

$$P = \frac{\pi r_1^3 \mathfrak{S}}{4\,l} = \frac{3{,}14\,(250)^3 \,.\, 2{,}5}{500} = 61327{,}5^{Kg},$$

also weit geringer, als der Kegelstutz.

33. Ein Doppel-T-Träger aus Walzeisen, dessen Querschnittsdimensionen aus nebenstehender Figur ersichtlich sind, ist an seinen beiden Enden unterstützt (liegt frei auf), die freie Länge zwischen den Stützen beträgt $l = 5^m$; welche Last P kann dieser Träger in der Mitte seiner Länge tragen, wenn achtfache Sicherheit gewünscht wird?

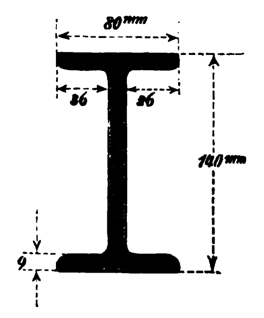


Fig. 86.

Auflösung. Für diesen Belastungs- und Unterstützungsfall hat man in der Gleichung „$M = \mathfrak{S}\,Z$" einzusetzen:

$$M = \frac{P l}{4},\ Z = \frac{B H^3 - b h^3}{6 H} =$$

$$= \frac{80\,(140)^3 - 72\,(122)^3}{6 \,.\, 140} = 105688,$$

daher ist die Tragkraft:

$$P = \frac{4 M}{l} = \frac{4 \mathfrak{S} Z}{.\ l} = \frac{4 \,.\, \frac{40}{8} \,.\, 105688}{5000} = 422{,}75^{Kg}.$$

34. An dem Arme AB des schmiedeisernen Hebels ABC (siehe beistehende Figur) wirkt in horizontaler Richtung die Kraft $P = 250^{Kg}$, um den Widerstand Q am Hebelarme BC im Gleichgewichte zu erhalten; welche Querschnittsdimensionen muss der Arm AB an der Nabe des Hebels erhalten, wenn zehnfache Sicherheit gewünscht wird?

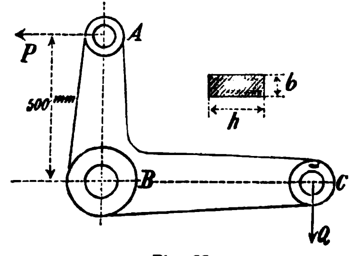


Fig. 87.

Auflösung. Der Hebelarm AB ist als ein an dem einen Ende in B eingemauerter und am anderen freien Ende A belasteter Balken

zu betrachten, daher der Querschnitt an der Nabe zu berechnen ist, nach der Formel: $Pl = \mathfrak{S}\, Z$; wählen wir für den Arm einen rechteckigen Querschnitt, mit dem Verhältniss der Seiten $\frac{h}{b} = 3$ und legen die Dimension h in die Ebene der Kraftrichtung, so ist:

$$Pl = \frac{\mathfrak{S}\, b\, h^2}{6}, \text{ hierin } b = \frac{h}{3} \text{ eingesetzt, gibt:}$$

$$Pl = \frac{\mathfrak{S}\, h^3}{18}, \text{ woraus } h = \sqrt[3]{\frac{18\, Pl}{\mathfrak{S}}} = \sqrt[3]{\frac{18 \,.\, 250 \,.\, 500}{\frac{40}{10}}}$$

$$h = 82^{mm} \text{ und } b = \frac{h}{3} = 27\tfrac{1}{3}^{mm} \text{ folgt.}$$

35. Ein gusseiserner Balken von einem in nebenstehender Figur angegebenen Querschnitte ist an einem Ende in horizontaler Lage eingemauert und am anderen freien Ende durch eine Last $P = 2500^{Kg}$ auf Biegung beansprucht; die freie Länge des Balkens ist $l = 2^m$. Wie gross sind die Querschnittsdimensionen zu machen?

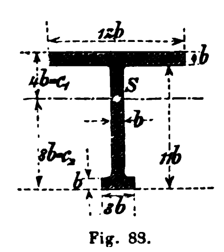


Fig. 83.

Auflösung. Für den vorliegenden Belastungs- und Unterstützungsfall hat man zur Querschnittsberechnung die Formel: $Pl = \mathfrak{S}\, Z$, da aber dieser Querschnitt in Bezug seiner Höhe nicht symmetrisch ist, d. h. der Schwerpunkt S liegt nicht in der Mitte der Höhe, so hat man offenbar, wenn man die Entfernungen des Schwerpunktes von der oberen und unteren Kante mit c_1 und c_2 bezeichnet, die zwei Querschnittsmoduli $Z_1 = \frac{J}{c_1}$ und $Z_2 = \frac{J}{c_2}$, wir führen in die Rechnung den kleineren Werth Z_2 ein. Allgemein soll für die günstigste Materialverwerthung der Querschnitt so angeordnet werden, dass die zulässigen Maximalspannungen auf der Zug- und Druckseite gleichzeitig eintreten; dies ist der Fall, wenn die Proportion stattfindet: $c_1 : c_2 = \mathfrak{S}_1 : \mathfrak{S}_2$, wenn $\mathfrak{S}_1$ die Zug- und $\mathfrak{S}_2$ die Druckspannung bedeuten. Querschnitte dieser Anordnung heissen bekanntlich „Querschnitte gleicher Festigkeit", weil bei denselben die volle Zug- und Druckfestigkeit des Materials ausgenützt wird. Bei Gusseisen ist $\frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{S}_1} = 2$, daher soll $\frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{2}$ sein.

Bestimmen wir nun die Entfernung c_1. Nach der Schwerpunktslehre ist $c_1 = \frac{\Sigma\,(f d)}{F}$, wobei $\Sigma\,(f d) = f_1\, d_1 + f_2\, d_2 + f_3\, d_3$ die

Summe der Producte aus den einzelnen Flächentheilen f_1, f_2, f_3 des ganzen Querschnittes vom Flächeninhalte F in die Entfernungen ihrer Schwerpunkte d_1, d_2, d_3 von der oberen Kante des Querschnittes bedeutet. Setzt man nun in der Formel für c_1 die Werthe

$$f_1 = 12\,b^2, \quad f_2 = 10\,b^2, \quad f_3 = 3\,b^2,$$
$$d_1 = 0{,}5\,b, \quad d_2 = 6\,b, \quad d_3 = 11{,}5\,b$$

und $F = f_1 + f_2 + f_3 = 25\,b^2$ ein, so hat man

$$c_1 = \frac{12\,b^2 \,.\, 0{,}5\,b + 10\,b^2 \,.\, 6\,b + 3\,b^2 \,.\, 11{,}5\,b}{25\,b^2} = 4\,b,$$

somit $c_2 = 8\,b$ und $\frac{c_2}{c_1} = 2$, also ist der vorliegende Querschnitt ein Querschnitt gleicher Festigkeit. (Die Werthe $c_1 = 4\,b$ und $c_2 = 8\,b$ sind in der Aufgabe als unbekannt zu betrachten.) In diesem Falle ist $\mathfrak{S}_1 Z_1 = \mathfrak{S}_2 Z_2 = M$; ist aber $\mathfrak{S}_1 Z_1 \gtrless \mathfrak{S}_2 Z_2$, also $\frac{c_1}{c_2} \lesseqgtr \frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}_2}$, somit der Querschnitt nicht ein Querschnitt gleicher Festigkeit, so ist der kleinere Werth der beiden Producte $\mathfrak{S}_1 Z_1$ und $\mathfrak{S}_2 Z_2$ in Rechnung zu nehmen. Für gusseiserne Träger hätte man daher das kleinste zulässige Biegungsmoment $M = \mathfrak{S}_1 Z_1$ zu wählen, wenn $\frac{c_1}{c_2} > \frac{1}{2}$ ist, denn dann ist $Z_1 \mathfrak{S}_1 < Z_2 \mathfrak{S}_2$; man wird jedoch $M = Z_2 \mathfrak{S}_2$ wählen, wenn $\frac{c_1}{c_2} < \frac{1}{2}$ ist, denn dann ist auch $Z_2 \mathfrak{S}_2 < Z_1 \mathfrak{S}_1$.

Setzt man in der Formel für das Trägheitsmoment des vorliegenden Querschnittes die in der Figur angegebenen Verhältnisszahlen ein, so erhält man $J = 442\,b^4$, also

$$Z_2 = \frac{J}{c_2} = \frac{442\,b^4}{8\,b} = 55{,}25\,b^3,$$

man erhält somit aus der Gleichung

$$„P\,l = 5 \,.\, 55{,}25\,b^3 = 276{,}25\,b^3\text{“} \quad (\mathfrak{S}_2 = 5 \text{ eingesetzt}):$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{P\,l}{276{,}25}} = \sqrt[3]{\frac{2500 \,.\, 2000}{276{,}25}} = 26^{mm}.$$

Die obere Flantsche wird nun $12 \,.\, 26 = 312^{mm}$ und die untere Flantsche $3 \,.\, 26 = 78^{mm}$ breit.

36. Ein gusseiserner Balken, dessen Querschnitt seiner Form nach in Fig. 89 dargestellt ist, wird durch das Moment M auf Biegung beansprucht; es sollen die Dimensionen des Querschnittes so ausgemittelt werden, dass derselbe ein Querschnitt gleicher

Festigkeit werde. Hierbei seien m und n bekannte ganze Zahlen, die beiden Flantschen und der verticale Steg haben dieselbe Dicke b; die Höhe des Querschnittes sei ein $n$faches, die Breite der unteren Flantsche ein $m$faches der Stegdicke b; die Breite x der oberen Flantsche und die Dicke b sind zu finden, resp. durch das Moment M und die Spannung $\mathfrak{S}$ auszudrücken.

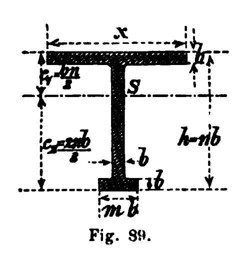


Fig. 89.

Auflösung. Die Bedingung, dass der Querschnitt von gleicher Festigkeit sei, ist ausgedrückt durch den Satz, dass die horizontale Schwerlinie die Höhe des Querschnittes in zwei solche Theile zerlege, die sich zu einander verhalten, wie 1 zu 2. Zerlegt man den ganzen Querschnitt in die Flächentheile f_1, f_2, f_3, deren Schwerpunktsabstände von der obersten Kante des Querschnittes a_1, a_2, a_3 sind, so lautet die Bedingungsgleichung für ein Profil gleicher Festigkeit:

$$\frac{Fh}{3} = \Sigma(fa) \quad \text{oder da} \quad F = f_1 + f_2 + f_3 \quad \text{und}$$

$$\Sigma(fa) = f_1 a_1 + f_2 a_2 + f_3 a_3$$

ist, so hat man:

$$\frac{h}{3}(f_1 + f_2 + f_3) = f_1 a_1 + f_2 a_2 + f_3 a_3,$$

setzt man nun in diese Gleichung die Werthe:

$$f_1 = xb, \qquad f_2 = (n-2)\,b^2, \qquad f_3 = mb^2,$$

$$a_1 = 0{,}5\,b, \quad a_2 = (n-2)\frac{b}{2} + b, \quad a_3 = nb - \frac{b}{2}$$

und $h = nb$ ein, so hat man:

$$\frac{nb}{3}\Big[xb + (n-2)\,b^2 + mb^2\Big] = \frac{xb^2}{2} + (n-2)\,b^2\Big[(n-2)\frac{b}{2} + b\Big] +$$

$$+ mb^2\left(nb - \frac{b}{2}\right),$$

diese Gleichung nach x aufgelöst, gibt:

$$x\left(\frac{nb^2}{3} - \frac{b^2}{2}\right) = \left(nb^2 - 2b^2\right)\frac{nb}{2} - \frac{mnb^3}{3} + \frac{2nb}{3} -$$

$$- \frac{n^2 b^3}{3} + mb^3 n - \frac{mb^3}{2}, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{n^2 b^3 - 2nb^3 + 4mnb^3 - 3mb^3}{b^2(2n-3)}, \text{ oder}$$

$$x = \frac{b^3 (n^2 - 2n + 4mn - 3m)}{b^2 (2n - 3)} = \frac{b [n (n - 2 + 4m) - 3m]}{2n - 3}$$

folgt. Dieser Werth von x ist in die Formel für das Trägheitsmoment des vorliegenden Querschnittes

$$J = \frac{1}{3} \left[x c_1^3 + m b c_2^3 - (x - b)(c_1 - b)^3 - (mb - b)(c_2 - b)^3 \right]$$

einzusetzen. Zur Erleichterung der Rechnung führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$x = \frac{b [n (n - 2 + 4m) - 3m]}{2n - 3} = \alpha b,$$

$$c_1 = \frac{nb}{3} = \beta b, \quad c_2 = 2 \beta b, \text{ also } \frac{n}{3} = \beta; \text{ man erhält:}$$

$$J = \frac{1}{3} \Big[\alpha b \beta^3 b^3 + m b \,.\, 8 \beta^3 b^3 - (\alpha b - b)(\beta b - b)^3 -$$

$$- b (m - 1)(2 \beta b - b)^3 \Big],$$

oder innerhalb der Klammer bei den zwei letzten Gliedern b herausgehoben:

$$J = \frac{1}{3} \left[\alpha b^4 \beta + m \beta^3 \,.\, 8 b^4 - b^4 (a - 1)(\beta - 1)^3 - b^4 (m - 1)(2 \beta - 1)^3 \right]$$

oder b^4 herausgehoben, die angezeigten Operationen verrichtet und reducirt:

$$J = \frac{b^4}{3} \left[9 \beta^3 + 3 \beta^2 (\alpha - 5 + 4m) + 3 \beta (3 - \alpha - 2m) - 2 + \alpha + m \right],$$

für β und α die Werthe gesetzt:

$$\beta = \frac{n}{3} \text{ und } \alpha = \frac{n (n - 2 + 4m) - 3m}{2n - 3},$$

so erhält man nach gehöriger Reduction:

$$J = \frac{b^4}{3} \left[\frac{n^4 - 6n^3 + 14n^2 - 13mn^2 + 15mn - 15n + 4mn^3 - 6m + 6}{2n - 3} \right],$$

oder

$$J = \frac{b^4}{3} \left\{ \frac{(n - 3)^2 n^2 + n^2 [5 + m (4n - 13)] + 3 (m - 1)(5n - 2)}{2n - 3} \right\},$$

oder innerhalb der Klammer n^2 herausgehoben:

$$J = \frac{b^4}{3}\left\{\frac{n^2[(n-3)^2+5+m(4n-13)]+3(m-1)(5n-2)}{2n-3}\right\},$$

der Querschnittsmodul wird:

$$Z_1 = \frac{J}{c_1} = \frac{b^4}{3}\left\{\frac{n^2[(n-3)^2+5+m(4n-13)]+3(m-1)(5n-2)}{2n-3}\right\} : \frac{bn}{3}$$

oder

$$Z_1 = \frac{b^3\{n^2[(n-3)^2+5+m(4n-13)]+3(m-1)(5n-2)\}}{n(2n-3)};$$

setzen wir z. B. $n = 12$, $m = 3$, so wird $J = 442\,b^4$ und

$$Z_1 = \frac{J}{c_1} = \frac{442\,b^4}{4b} = 110{,}5\,b^3, \quad Z_2 = \frac{J}{c_2} = \frac{442\,b^4}{8b} = 55{,}25\,b^3,$$

ferner $x = 12{,}1\,b$ oder abgerundet $x = 12\,b$, also dieselben Werthe, wie in dem speciellen Beispiele Nummer 35. Setzt man aus der Gleichung $M = \mathfrak{S}_1 Z_1$ den Werth $Z_1 = \frac{M}{\mathfrak{S}_1}$ dem oben für Z_1 gefundenen Werthe $Z_1 = 110{,}5\,b^3$, gleich, so erhält man: $\frac{M}{\mathfrak{S}_1} = 110{,}5\,b^3$, woraus

$$b = \sqrt[3]{\frac{M}{110{,}5\,\mathfrak{S}_1}} \quad \text{und} \quad x = 12{,}1\sqrt[3]{\frac{M}{110{,}5\,\mathfrak{S}_1}}$$

folgt. Nimmt man daher für m und n verschiedene Werthe an, so kann man mittelst der Formeln für x, J und Z die Dimensionen verschiedener **T**-förmiger Querschnitte gleicher Festigkeit berechnen. Setzt man $m = 1$, so erhält man die bezüglichen Formeln für den einfachen **T**-Querschnitt gleicher Festigkeit.

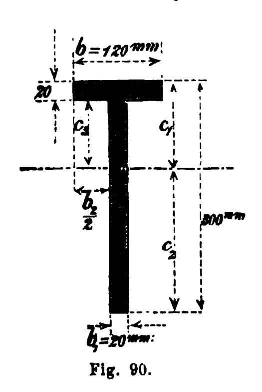


Fig. 90.

37. Es ist die Tragfähigkeit eines gusseisernen Balkens, dessen Querschnitt seiner Form und Grösse nach in nebengezeichneter Figur dargestellt ist, zu berechnen, wenn der Balken an einem Ende eingemauert und auf seiner ganzen freien Länge $l = 1^m$ gleichmässig belastet werden soll.

Auflösung. Bezeichnet man die Breite der horizontalen Flantsche mit $b = 120^{mm}$, die Dicke des verticalen Steges mit $b_1 = 20^{mm}$, sowie die Differenz dieser zwei Dimensionen mit b_2, also $b - b_1 = b_2 = 100^{mm}$, so ist das Trägheitsmoment:

$$J = \frac{1}{3}(b\,c_1^3 + b_1\,c_2^3 - b_2\,c_3^3).$$

Nach der Schwerpunktslehre findet man die Entfernung c_1 des Schwerpunktes des Querschnittes von der oberen Kante durch die Gleichung: $Fc_1 = \Sigma(fd)$, worin F die ganze Querschnittsfläche und $\Sigma(fd)$ die Summe der Producte aus den einzelnen Flächentheilen des Querschnittes in die Enfernungen ihrer Schwerpunkte von der oberen Kante bedeuten; es ist also:

$$F = f_1 + f_2 = 120 . 20 + (300 - 20)\, 20 = 2400 + 5600 = 8000^{mm^2},$$

$$d_1 = 10^{mm},\ d_2 = \frac{300 - 20}{2} + 20 = 160^{mm}, \text{ somit}$$

$$c_1 = \frac{f_1 d_1 + f_2 d_2}{f_1 + f_2} = \frac{2400 . 10 + 5600 . 160}{2400 + 5600} = 115^{mm},$$

und $c_2 = 300 - 115 = 185^{mm}$; die Zahlenwerthe: $b = 12^{cm}$, $c_1 = 11{,}5^{cm}$, $b_1 = 2^{cm}$, $c_2 = 18{,}5^{cm}$, $b_2 = 10^{cm}$, $c_3 = 115 - 20 = = 95^{mm} = 9{,}5^{cm}$ in obige Formel für J eingesetzt, gibt:

$$J = \frac{1}{3}\left[12\,(11{,}5)^3 + 2\,(18{,}5)^3 - 10\,(9{,}5)^3\right] = 7447.$$

Da es hier die zwei Querschnittsmoduli $Z_1 = \frac{J}{c_1}$ und $Z_2 = \frac{J}{c_2}$ gibt, so haben wir zu untersuchen, ob $Z_1 \mathfrak{S}_1 \lesseqgtr Z_2 \mathfrak{S}_2$ ist, weil wir den kleineren der beiden Werthe $Z_1 \mathfrak{S}_1$ und $Z_2 \mathfrak{S}_2$ dem Momente M gleich zu setzen haben.

Ist z. B. $\mathfrak{S}_1 Z_1 < \mathfrak{S}_2 Z_2$, so ist auch $\frac{\mathfrak{S}_1 J}{c_1} < \frac{\mathfrak{S}_2 J}{c_2}$, oder $\frac{\mathfrak{S}_1}{c_1} < \frac{\mathfrak{S}_2}{c_2}$, somit $\frac{c_1}{c_2} > \frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}_2}$, ist jedoch $Z_2 \mathfrak{S}_2 < Z_1 \mathfrak{S}_1$, also $\frac{J\mathfrak{S}_2}{c_2} < \frac{J\mathfrak{S}_1}{c_1}$ oder $\frac{\mathfrak{S}_2}{c_2} < \frac{\mathfrak{S}_1}{c_1}$, so ist auch $\frac{c_1}{c_2} < \frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}_2}$; und ist endlich $Z_1 \mathfrak{S}_1 = Z_2 \mathfrak{S}_2$, so muss auch $\frac{\mathfrak{S}_1 J}{c_1} = \frac{\mathfrak{S}_2 J}{c_2}$ oder $\frac{\mathfrak{S}_1}{c_1} = \frac{\mathfrak{S}_2}{c_2}$, oder $\frac{c_1}{c_2} = \frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}_2}$ sein, welches letztere beim Querschnitte gleicher Festigkeit der Fall ist. Im vorliegenden Falle ist $\frac{c_1}{c_2} = \frac{115}{185} = = \frac{23}{37} > \frac{1}{2}$, und weil bei Gusseisen $\frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}_2} = \frac{1}{2}$ ist, so ist $\frac{c_1}{c_2} > \frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}_2}$, woraus nach Obigem folgt, dass $\mathfrak{S}_1 Z_1 < \mathfrak{S}_2 Z_2$ ist; wir setzen also:

$$M = \mathfrak{S}_1 Z_1 = \frac{\mathfrak{S}_1 J}{c_1} = \frac{250 . 7447}{11{,}5} = \frac{Pl}{2}, \text{ woraus}$$

$$P = \frac{2 J \mathfrak{S}_1}{c_1 l} = \frac{2 . 7447 . 250}{11{,}5 . 100} = 3238^{Kg} \text{ folgt.}$$

38. Es sind die Querschnittsdimensionen eines gusseisernen Balkens zu berechnen, der an einem Ende eingemauert und auf seiner ganzen freien Länge $l = 1^m$ gleichmässig belastet werden soll. Der Querschnitt sei von gleicher Festigkeit und habe die einfache **T**-Form. (Siehe nebenstehende Figur.)

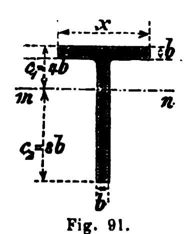


Fig. 91.

Auflösung. Die Bedingung, dass das Profil die Form der gleichen Festigkeit haben soll, ist bekanntlich die, dass die neutrale Axe mn den Querschnitt in zwei Theile zerlege, deren Höhen sich zu einander verhalten sollen wie 1 zu 2. Angenommen, die Dicke der Flantsche und des Steges sei $= b$, die ganze Höhe werde $= 12b$ angenommen, so muss $c_1 = 4b$ und $c_2 = 8b$ sein, damit $\frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{2}$ sei. Nach der Schwerpunktslehre muss

$$(f_1 + f_2)\,c_1 = f_1 d_1 + f_2 d_2$$

sein, es ist aber

$$f_1 = bx, \quad f_2 = 11\,b^2, \quad d_1 = \frac{b}{2}, \quad d_2 = 6{,}5\,b,$$

diese Werthe in die Bedingungsgleichung für das Profil der gleichen Festigkeit „$(f_1 + f_2)\,4b = f_1 d_1 + f_2 d_2$“ eingesetzt, gibt:

$$4b\,(bx + 11\,b^2) = \frac{b^2 x}{2} + 11\,b^2 \,.\, 6{,}5\,b; \quad \text{hieraus ist } \underline{x = 7{,}86\,b.}$$

Das Trägheitsmoment wird:

$$J = \frac{1}{3}\left[7{,}86\,b \,.\, (4b)^3 + b \,.\, (8b)^3 - 6{,}86\,b \,.\, (3b)^3\right] = 276{,}6\,b^4.$$

Hier ist es gleichgiltig, ob wir $Z_1 \mathfrak{S}_1$ oder $Z_2 \mathfrak{S}_2$ dem Biegungsmomente $M = \frac{Pl}{2}$ gleichsetzen. Setzen wir

$$\frac{Pl}{2} = \mathfrak{S}_2 Z_2, \text{ so ist hieraus } Z_2 = \frac{Pl}{2\,\mathfrak{S}_2}, \text{ oder}$$

$$Z_2 = \frac{3000 \,.\, 100}{2 \,.\, 500} = 300,$$

es ist aber auch

$$Z_2 = \frac{J}{c_2} = \frac{276{,}6\,b^4}{8\,b} = 34{,}6\,b^3,$$

man hat daher durch Gleichsetzung der Werthe von Z_2:

$$33{,}6\,b^3 = 300, \text{ woraus } b = \sqrt[3]{\frac{300}{34{,}6}} = 2{,}1^{cm} \text{ folgt.}$$

Die Höhe des Trägers wird: $h = 12\,b = 25{,}2^{cm}$, die Flantschenbreite $b = x = 7{,}86 \,.\, 2{,}1 = 16{,}5^{cm}$.

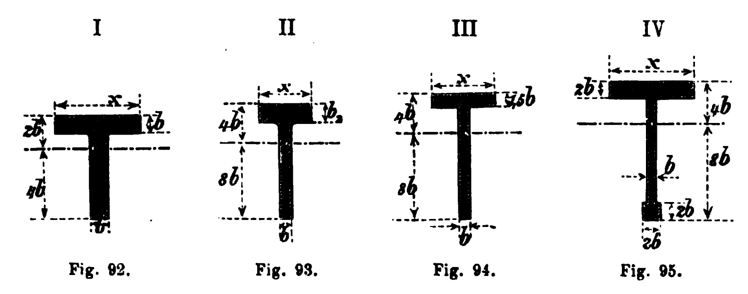


Fig. 92. Fig. 93. Fig. 94. Fig. 95.

Für die durch die Figuren 92, 93, 94 und 95 dargestellten vier T-Querschnitte die Rechnung in gleicher Weise gemacht, erhält man: Aus der Schwerpunktsgleichung für Fig. 92

$$„2\,b\,(x\,b + 5\,b^2) = \frac{b^2\,x}{2} + 5\,b^2 \,.\, 3{,}5\,b“$$

ist $\underline{x = 5\,b,}$ man findet ferner:

$$J = 33{,}33\,b^4,$$

$$Z_2 = \frac{J}{c_2} = \frac{J}{4\,b} = \frac{33{,}33\,b^4}{4\,b} = 8{,}33\,b^3.$$

Aus der für Fig. 93 geltenden Gleichung

$$„4\,b\,(2\,x\,b + 10\,b^2) = 2\,x\,b \,.\, b + 10\,b^2 \,.\, 7\,b“$$

folgt $\underline{x = 5\,b,}$ ferner ist

$$J = 266{,}67\,b^4,$$

$$Z_2 = \frac{J}{8\,b} = \frac{266{,}67\,b^4}{8\,b} = 33{,}33\,b^3.$$

Aus der für Fig. 94 geltenden Gleichung

$$„4\,b\,(x \,.\, 1{,}5\,b + 10{,}5\,b) = 1{,}5\,x\,b \,.\, 0{,}75\,b + 10{,}5\,b^2 \,.\, 6{,}75\,b“$$

folgt: $\underline{x = 5{,}92\,b;}$ ferner ist

$$J = 271{,}33\,b^4,$$

$$Z_2 = \frac{J}{c_2} = \frac{271{,}33\,b^4}{8\,b} = 33{,}92\,b^3.$$

Aus der für Fig. 95 geltenden Gleichung

$$„4\,b\,(2\,b\,x + 8\,b^2 + 4\,b^2) = 2\,b\,x \,.\, b + 8\,b^2 \,.\, 6\,b + 4\,b^2 \,.\, 11\,b“$$

ist $x = 7{,}33\,b$, ferner findet man

$$J = 408{,}81\,b^4 \text{ und}$$

$$Z_2 = \frac{J}{8\,b} = \frac{408{,}81\,b^4}{8\,b} = 51{,}1\,b^3.$$

Setzt man beim einfachen **T**-Querschnitt die ganze Höhe desselben $h = nb$, also gleich einem vielfachen der Stegdicke b, und wendet den Satz aus der Schwerpunktslehre an, dass das statische Moment der ganzen Querschnittsfläche in Bezug auf eine Gerade (hier die oberste Kante von der Länge x) gleich ist der Summe der statischen Momente der einzelnen Flächentheile in Bezug auf dieselbe Gerade, so hat man für das **T**-Profil von der Form der gleichen Festigkeit die Gleichung:

$$F \cdot \frac{nb}{3} = f_1 d_1 + f_2 d_2, \text{ oder da } F = f_1 + f_2 = xb + (n-1) b^2,$$

$$d_1 = \frac{b}{2},\ d_2 = \frac{(n-1) b}{2} + b = \frac{b}{2}(n+1)$$

ist, so hat man auch:

$$\left[xb + (n-1) b^2\right] \frac{nb}{3} = xb \cdot \frac{b}{2} + (n-1) b^2 \cdot \frac{b}{2}(n+1);$$

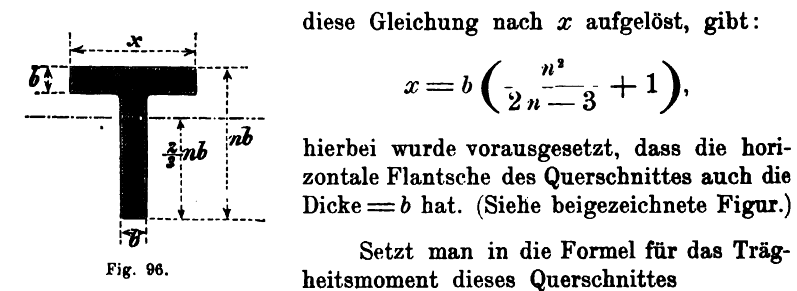


Fig. 96.

diese Gleichung nach x aufgelöst, gibt:

$$x = b\left(\frac{n^2}{2n-3} + 1\right),$$

hierbei wurde vorausgesetzt, dass die horizontale Flantsche des Querschnittes auch die Dicke $= b$ hat. (Siehe beigezeichnete Figur.)

Setzt man in die Formel für das Trägheitsmoment dieses Querschnittes

$$J = \frac{1}{3}\left[x \cdot \left(\frac{nb}{3}\right)^3 + b\left(\frac{2}{3}nb\right)^3 - (x-b)\left(\frac{nb}{3} - b\right)^3\right],$$

für x den oben gefundenen Werth ein und bedient sich dabei der Abkürzungen: $x = (\alpha + 1) b$ und $\frac{n}{3} = \beta$, so erhält man:

$$J = \frac{1}{3}\left\{(\alpha + 1) b^4 \beta^3 + \beta^3 b^4 \cdot 8 - \left[(\alpha + 1) b - b\right] (\beta b - b)^3\right\},$$

nach gehöriger Reduction des Ausdruckes in der Klammer erhält man:

$$J = \frac{b^4}{3}\left(9\beta^3 + 3\alpha\beta^2 - 3\alpha\beta + \alpha\right),$$

für β und α die Werthe gesetzt, gibt:

$$J = \frac{b^4}{3}\left[\frac{n^3}{3} + \frac{n^4}{3(2n-3)} - \frac{3n^2}{3(2n-3)} + \frac{n^2}{2n-3}\right],$$

auf gleiche Benennung gebracht und reducirt:

$$J = \frac{b^4}{3}\left[\frac{n^2(n^2-2n+1)}{2n-3}\right] = \frac{n^2(n-1)^2 b^4}{3(2n-3)}.$$

Die Querschnittsmoduli sind:

$$Z_1 = \frac{J}{\frac{nb}{3}} = \frac{n^2(n-1)^2 b^4}{3(2n-3)} \cdot \frac{3}{nb} = \frac{n(n-1)^2 b^3}{2n-3},$$

$$Z_2 = \frac{J}{\frac{2nb}{3}} = \frac{n^2(n-1)^2 b^4}{3(2n-3)} \cdot \frac{3}{2nb} = \frac{n(n-1)^2 b^3}{2(2n-3)}.$$

Setzt man endlich noch in die Formel für den Flächeninhalt F des Querschnittes „$F = xb + (n-1)b^2$“, für x den obigen Werth, so erhält man:

$$F = \frac{b^2(2n+n^2-3)}{2n-3} + (n-1)b^2 = \frac{2b^2 n + n^2 b^2 - 3b^2 + (nb^2 - b^2)(2n-3)}{2n-3},$$

oder reducirt:

$$F = \frac{3n^2 b^2 - 3nb^2}{2n-3} = \frac{3nb^2(n-1)}{2n-3}.$$

Setzt man in die für x, J, Z_2 und F gefundenen Formeln für n nach einander die Werthe $n = 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$, so erhält man:

für $n = 6$	für $n = 7$	für $n = 8$
$x = 5\,b$	$x = 5{,}455\,b$	$x = 5{,}923\,b$
$J = 33{,}33\,b^4$	$J = 53{,}455\,b^4$	$J = 80{,}41\,b^4$
$Z_2 = 8{,}33\,b^3$	$Z_2 = 11{,}455\,b^3$	$Z_2 = 15{,}077\,b^3$
$F = 10\,b^2$	$F = 11{,}455\,b^2$	$F = 12{,}923\,b^2$

für $n = 9$	für $n = 10$	für $n = 11$
$x = 6{,}4\,b$	$x = 6{,}882\,b$	$x = 7{,}368\,b$
$J = 115{,}2\,b^4$	$J = 158{,}824\,b^3$	$J = 212{,}281\,b^4$
$Z_2 = 19{,}2\,b^3$	$Z_2 = 23{,}823\,b^3$	$Z_2 = 28{,}947\,b^3$
$F = 14{,}4\,b^2$	$F = 15{,}882\,b^2$	$F = 17{,}368\,b^2$

für $n = 12$

$x = 7{,}857\,b$
$J = 276{,}571\,b^4$
$Z_2 = 34{,}571\,b^3$
$F = 18{,}875\,b^2$.

Aus der Gleichung $M = \mathfrak{S}_2 Z_2$ ist $Z_2 = \frac{M}{\mathfrak{S}_2}$, da aber auch $Z_2 = \frac{nb^3(n-1)^2}{2(2n-3)}$ ist, so hat man:

$$\frac{M}{\mathfrak{S}_2} = \frac{n\, b^3 (n - 1)^2}{2\,(2\,n - 3)}, \text{ woraus } b = \sqrt[3]{\frac{2\,(2\,n - 3)\,M}{n\,(n - 1)^2\,\mathfrak{S}_2}}$$

folgt; hier ist nun M und n als bekannt anzusehen und die Druckspannung $\mathfrak{S}_2 = 5^{Kg}$ pro Quadratmillimeter einzusetzen; hat man nun b ausgerechnet, so ist auch die Flantschenbreite x und die Höhe des Querschnittes bekannt.

Es sei z. B. ein an einem Ende eingemauerter gusseiserner Balken von 1^m Länge mit $P = 3000^{Kg}$ gleichmässig auf seiner ganzen Länge belastet; der Querschnitt sei ein **T**-Profil von der Form der gleichen Festigkeit, es sind die Dimensionen desselben auszurechnen.

Es ist $M = \frac{P\,l}{2} = \frac{3000\,.\,1000}{2} = 1500000$; wir setzen z. B. $n = 8$, dann ist nach der oben entwickelten Formel die Dicke b des verticalen Steges

$$b = \sqrt[3]{\frac{2\,(2\,n - 3)\,M}{n\,(n - 1)^2\,\mathfrak{S}_2}} = \sqrt[3]{\frac{2\,(2\,.\,8 - 3)\,1500000}{8\,(8 - 1)^2\,.\,5}} = 27^{mm},$$

hiermit wird $x = 5{,}923\, b = 5{,}923\,.\,27 = 160^{mm}$, und die Höhe h des Querschnittes

$$h = n\,b = 8\,.\,27 = 216^{mm}.$$

39. Ein gusseiserner Träger von $2{,}5^m$ lichter Weite liege an den Enden frei auf und sei auf seiner ganzen freien Länge $l = 2{,}5^m$ gleichmässig mit $P = 3600^{Kg}$ belastet; derselbe soll ein **T**-Profil von der Form der gleichen Festigkeit erhalten, dessen Höhe h aus constructiven Rücksichten 240^{mm} betragen soll; es sind die übrigen Querschnittsdimensionen auszurechnen.

Auflösung. Benützen wir die im vorigen Beispiele gefundene Formel für die Dicke b des verticalen Steges,

$$b = \sqrt[3]{\frac{2\,(2\,n - 3)\,M}{n\,(n - 1)^2\,\mathfrak{S}_2}},$$

in Verbindung mit der Gleichung $h = n\,b$ zur Auflösung dieser beiden Gleichungen nach den Unbekannten b und n, so kommt man durch Gleichsetzung der Werthe von b aus beiden Gleichungen auf die kubische Gleichung

$$\left(\frac{h}{n}\right)^3 = \frac{2\,(2\,n - 3)\,M}{n\,(n - 1)^2\,\mathfrak{S}_2},$$

die geordnet

$$n^3 - n^2\left(\frac{3}{2} + \frac{\mathfrak{S}_2\,h^3}{4\,M}\right) + \frac{n\,\mathfrak{S}_2\,h}{4\,M} = \frac{\mathfrak{S}_2\,h^3}{4\,M}$$

gibt. Um diese kubische Gleichung zu umgehen, erlauben wir uns in der Formel für b eine kleine Vernachlässigung, die wir später wieder corrigiren. Wir setzen $b = \sqrt[3]{\frac{2(2n-3)M}{n^3 \mathfrak{S}_2}}$, nehmen also im Nenner statt des Factors $n-1$ den grösseren Werth n, wodurch offenbar der Werth des Bruches unter dem Wurzelzeichen um $\frac{n^2}{(n-1)^2}$-mal kleiner und der Werth von b um $\sqrt[3]{\frac{n^2}{(n-1)^2}}$-mal kleiner wird. Rechnen wir mit dieser Vernachlässigung den Werth von b aus und multipliciren denselben mit $\sqrt[3]{\frac{n^2}{(n-1)^2}}$, so erhalten wir offenbar den angenähert richtigen Werth von b mit einer für die Praxis genügenden Genauigkeit. Setzen wir nun

$$b = \sqrt[3]{\frac{2(2n-3)M}{n^3 \mathfrak{S}_2}} = \frac{h}{n}$$

und lösen diese Gleichung nach n auf, so erhält man:

$$h^3 = \frac{2(2n-3)M}{\mathfrak{S}_2}, \text{ woraus } n = \frac{h^3 \mathfrak{S}_2 + 6M}{4M}$$

folgt; offenbar ein etwas zu grosser Werth, den wir wieder dadurch corrigiren, dass wir die Höhe h durch den verbesserten Werth von b dividiren. Man erhält:

$$b = \frac{h}{n} = \frac{h}{\frac{h^3 \mathfrak{S}_2 + 6M}{4M}} = \frac{4hM}{h^3 \mathfrak{S}_2 + 6M},$$

diesen Werth von b multiplicirt mit $\sqrt[3]{\frac{n^2}{(n-1)^2}}$, gibt den corrigirten Werth

$$b_1 = \frac{4hM}{h^3 \mathfrak{S}_2 + 6M} \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{h^3 \mathfrak{S}_2 + 6M}{4M}\right)^2}{\left(\frac{h^3 \mathfrak{S}_2 + 6M}{4M} - 1\right)^2}},$$

der verbesserte Werth von n ist $n_1 = \frac{h}{b_1}$, mit diesem Werthe von n_1 die Grösse b noch einmal nach der genauen Formel ausgerechnet, gibt einen noch genaueren Werth der Stegdicke; die beiden gefundenen Werthe von n_1 und b_1 in die Formel für x aus dem vorigen Beispiel eingesetzt, gibt die Flantschenbreite des Querschnittes. Führen wir diesen Rechnungsgang durch und berechnen zunächst n aus der Gleichung:

$$n = \frac{h^3 \mathfrak{S}_2 + 6\,M}{4\,M} = \frac{(24)^3 \,.\, 500 + 6 \,.\, \frac{3600 \,.\, 250}{8}}{4 \,.\, \frac{3600 \,.\, 250}{8}}, \text{ oder}$$

$$n = \frac{6912000 + 675000}{450000} = 16{,}86;$$

hiermit wird $b = \frac{h}{n} = \frac{240}{16{,}86} = 14{,}23^{mm}$; der corrigirte Werth von b wird

$$b_1 = 14{,}23 \sqrt[3]{\frac{(16{,}86)^2}{(15{,}86)^2}} = 14{,}23 \,.\, 1{,}04,$$

$b_1 = 14{,}7992$, oder abgerundet $b_1 = 15^{mm}$. Der verbesserte Werth von n wird $n_1 = \frac{h}{b_1} = \frac{240}{15} = 16$; setzt man jetzt diesen Werth von n_1 in die genaue Formel für

$$b = \sqrt[3]{\frac{2\,(2\,n - 3)\,M}{n\,(n-1)^2\,\mathfrak{S}_2}} = \sqrt[3]{\frac{2 \,.\, 29 \,.\, 112500}{16 \,.\, (15)^2 \,.\, 500}}$$

ein, so erhält man abgerundet $b = 16^{mm}$; die Flantschenbreite wird

$$x = b\left(\frac{n^2}{2\,n - 3} + 1\right) = 16\left(\frac{(16)^2}{29} + 1\right)^{*)},$$

oder $x = 157{,}2^{mm}$, oder abgerundet $x = 157^{mm}$; die Dicke der Flantsche wird wie die Stegdicke $b = 16^{mm}$. Die Dimensionen des vorliegenden Querschnittes können aber auch noch auf eine andere Art, wie folgt, berechnet werden: Aus der Gleichung

$$M = \frac{Pl}{8} = \mathfrak{S}_2 Z_2 \text{ ist } Z_2 = \frac{Pl}{8\,\mathfrak{S}_2} = \frac{3600 \,.\, 250}{8 \,.\, 500} = 225.$$

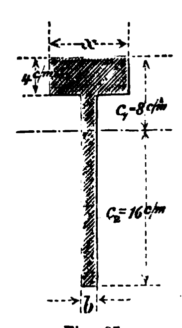


Fig. 97.

Von den Dimensionen des Querschnittes nehmen wir die Flantschenbreite x und die Dicke b des verticalen Steges als unbekannt und die Dicke der Flantsche als bekannt an. Wir bestimmen die zwei Unbekannten aus den zwei Bedingungen, dass der Querschnitt die Form der gleichen Festigkeit habe und einen Querschnittsmodul $Z_2 = 225$ besitze. Nehmen wir die Dicke der horizontalen Flantsche mit 4^{cm} an, so ist die Bedingungsgleichung für die Form der gleichen Festigkeit des Querschnittes:

$$8\,(4\,x + 20\,b) = 4\,x \,.\, 2 + 20\,b \,.\, 14,$$

(siehe nebenstehende Figur) reducirt, gibt: $x = 5\,b$.

*) Siehe Beispiel 38, Seite 234.

Das Trägheitsmoment wird:

$$J = \frac{1}{3}\left[x \,.\, 8^3 + b \,.\, 16^3 - (x - b)\, 4^3\right], \text{ oder}$$

$$3\,J = 448\,x + 4160\,b,$$

andererseits ist aber auch

$$3\,J = 3\,Z_2 c_2 = 3 \,.\, 225 \,.\, 16, \text{ oder } 3\,J = 10800,$$

daher erhält man durch Gleichsetzung der zwei Werthe von $3\,J$: $448\,x + 4160\,b = 10800$, oben fanden wir: $x = 5\,b$. Diese zwei Gleichungen nach x und b aufgelöst, erhält man: $b = 16{,}87$, abgerundet 17^{mm} und $x = 5\,b = 5 \,.\, 16{,}87 = 84{,}35$, oder abgerundet $x = 85^{mm}$. Berechnet man den Querschnittsmodul Z_2 des nach der ersten Methode gefundenen Querschnittes, so findet man:

$$Z_2 = \frac{15{,}7 \,.\, 8^3 + 1{,}6 \,.\, 16^3 - 14{,}1 \,.\, 6{,}5)^3}{3 \,.\, 16} = 223{,}37,$$

also nahe genug dem aus der Gleichung $Z_2 = \frac{P\,l}{8\,\mathfrak{S}_2} = 225$ nach der zweiten Methode gefundenen Querschnittsmodul.

Wäre hingegen die Breite x der horizontalen Flantsche des Querschnittes gegeben und es sollen die übrigen Dimensionen unter der Bedingung ausgerechnet werden, dass der Querschnitt die Form der gleichen Festigkeit habe, so nimmt man am zweckmässigsten die Dicke b des verticalen Steges, gleich der Dicke der horizontalen Flantsche an; z. B. im vorliegenden Falle nehmen wir $b = 15^{mm}$, die Flantschenbreite sei mit $x = 160^{mm}$ gegeben; dann ergibt sich aus der Gleichung $x = b\left(\frac{n^2}{2\,n - 3} + 1\right)$, wenn man diese nach n als Unbekannte auflöst:

$$(2\,n - 3)\,x = 2\,n\,b + b\,n^2 - 3\,b, \text{ woraus}$$

$$b\,n^2 - n\,(2\,x - 2\,b) = 3\,b - 3\,x, \text{ oder}$$

$$n^2 - \frac{n\,(2\,x - 2\,b)}{b} = \frac{3\,b - 3\,x}{b} \text{ und}$$

$$n = \frac{x - b}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{x - b}{b}\right)^2 + \frac{3\,b - 3\,x}{b}}$$

folgt. Setzen wir die Zahlenwerthe $x = 160$, $b = 15$ ein, so erhält man:

$$n = \frac{160 - 15}{15} \pm \sqrt{\left(\frac{160 - 15}{15}\right)^2 + \frac{3\,(15 - 160)}{15}} = 9{,}6 \pm 8,$$

offenbar kann man hier nur den Werth $n = 9{,}6 + 8 = 17{,}6$, oder abgerundet $n = 17$ gebrauchen. Diesen nur probeweise ausgerechneten Werth von $n = 17$ setzen wir in die Formel für den Querschnittsmodul $Z_2 = \frac{n b^3 (n - 1)^2}{2 (2 n - 3)}$ ein und sehen zu, ob der dadurch erhaltene Werth dem durch das Biegungsmoment M und die Spannung $\mathfrak{S}_2$ bestimmten Querschnittsmodul $Z_2 = \frac{M}{\mathfrak{S}_2} = \frac{Pl}{8 \mathfrak{S}_2}$ nahe genug kommt; hier wird $Z_2 = \frac{17 \,.\, (1{,}5)^3 (17 - 1)^2}{2 (2 \,.\, 17 - 3)} = 236$; erforderlich ist jedoch nur der Querschnittsmodul von

$$Z_2 = \frac{Pl}{8 \mathfrak{S}_2} = \frac{3600 \,.\, 250}{8 \,.\, 500} = 225;$$

somit würden die angenommenen Werthe $x = 160$ und $b = 15$ genügen.

Untersucht man endlich noch, ob der Querschnitt wirklich die Form der gleichen Festigkeit hat, so darf man nur aus der Schwerpunktsgleichung $c_1 F = f_1 d_1 + f_2 d_2$ den Werth von c_1 bestimmen; es ist $c_1 = \frac{f_1 d_1 + f_2 d_2}{f_1 + f_2}$, und da $f_1 = 160 \,.\, 15$, $f_2 = 240 \,.\, 15$, $d_1 = 7{,}5$ und $d_2 = 135$ ist, so hat man, wenn man die Zahlenwerthe einsetzt und ausrechnet $c_1 = 84^{mm}$; da nun die ganze Höhe des Querschnittes $h = n b$

$$h = 17 \,.\, 15 = 255^{mm} \text{ und } \frac{h}{3} = \frac{255}{3} = 85^{mm}$$

ist, so ist der gefundene Werth von c_1, der $= \frac{h}{3}$ sein soll, mit 84^{mm} genau genug, damit das Profil als ein Querschnitt von der Form der gleichen Festigkeit angesehen werden könne.

40. Bei einem gusseisernen Doppel-**T**-Träger mit ungleich breiten Flantschen, dessen Querschnitt die Form der gleichen Festigkeit habe, seien auszurechnen: Die Breite der grösseren Flantsche, das Trägheitsmoment, der Querschnittsmodul und der Flächeninhalt des Querschnittes. (Siehe nebenstehende Figur.) Die Höhe des Querschnittes sei $h = 12 b$, die beiden Flantschen seien gleich dick $= 2 b$, die Breite der kleineren Flantsche sei $= 3 b$, der Querschnitt des verticalen Steges sei ein Trapez von den Parallel-Seiten b und $\frac{3}{2} b$.

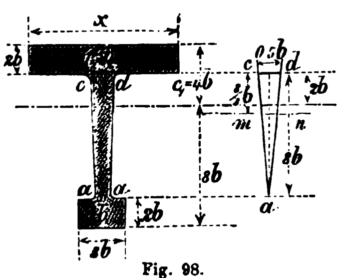


Fig. 98.

Auflösung. Zur Bestimmung der Flantschenbreite x benützen wir den Satz von der Schwerpunktslehre:

$$F c_1 = f_1 d_1 + f_2 d_2 + f_3 d_3 + f_4 d_4,$$

es ist $f_1 = 2bx, f_2 = 8b^2, f_3 = \triangle acd = \frac{0{,}5b \cdot 8b}{2} = 2b^2$, $d_1 = b$, $d_2 = 6b$, $d_3 = \frac{8}{3}b + 2b = 4{,}67b$, $f_4 = 6b^2$ und $d_4 = 11b$, die Zahlenwerthe eingesetzt, gibt:

$$4b(2bx + 8b^2 + 2b^2 + 6b^2) =$$
$$= 2bx \cdot b + 8b^2 \cdot 6b + 2b^2 \cdot 4{,}67b + 6b^2 \cdot 11b;$$

diese Gleichung nach x aufgelöst, erhält man:

$$\underline{x = 9{,}89b.}$$

Das Trägheitsmoment J_1 des Querschnittes mit Vernachlässigung des Dreieckes acd ist:

$$J_1 = \frac{1}{3}\left[9{,}89b\,(4b)^3 + 3b\,(8b)^3 - 2b\,(6b)^3 - 8{,}89b\,(2b)^3\right] =$$
$$= 555{,}28b^4,$$

das Trägheitsmoment i des Dreieckes acd, bezogen auf seine horizontale Schweraxe mn, ist $i = \frac{0{,}5b\,(8b)^3}{36} = 7{,}11b^4$; der Abstand der neutralen Axe des Träger-Querschnittes von der Schweraxe des Dreieckes ist $\frac{8}{3}b - 2b$, der Flächeninhalt des Dreieckes acd ist $= 2b^2$, somit das Trägheitsmoment i_1 des Dreieckes, bezogen auf die neutrale Axe des ganzen Querschnittes:

$$i_1 = 7{,}11b^4 + 2b^2\left(\frac{8}{3}b - 2b\right)^2 = 8b^4;$$

hiermit wird das Trägheitsmoment J des ganzen Querschnittes:

$$\underline{J = 555{,}28b^4 + 8b^4 = 563{,}28b^4;}$$

der Querschnittsmodul wird:

$$Z_2 = \frac{J}{8b}, \text{ oder } Z_2 = \frac{563{,}28b^4}{8b} = 70{,}41b^3;$$

der Flächeninhalt des Querschnittes wird

$$F = 2b \cdot 9{,}89b + 8b^2 + 2b^2 + 6b^2 = 35{,}78b^2.$$

Anmerkung. Da es erlaubt ist, die Theile eines Querschnittes in horizontaler Richtung zu verschieben, ohne das Trägheitsmoment dadurch zu ändern, so kann man auch zwei verschiedene T-Querschnitte von den Formen der gleichen Festigkeit und gleich dicken Flantschen zu einem neuen Querschnitte von der Form der gleichen Festigkeit verbinden, dessen Trägheitsmoment durch einfache Addition der Trägheitsmomente der zu verbindenden Querschnitte erhalten wird. (Siehe die folgenden Figuren.)

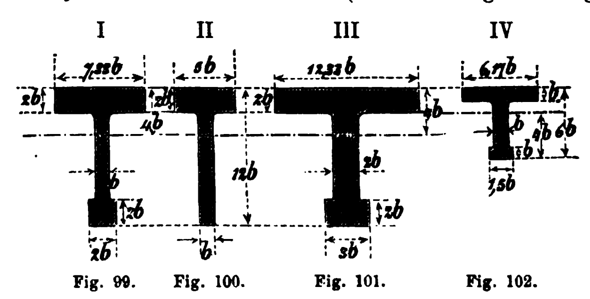


Fig. 99. Fig. 100. Fig. 101. Fig. 102.

Die Profile *I* und *II* horizontal in einander geschoben, geben das Profil *III*.

In Beispiel 38 sind die Trägheitsmomente der Profile *I* und *II* unter den Nummern *IV* und *II* angegeben mit $J_I = 408{,}81\,b^4$, $J_{II} = 266{,}67\,b^4$, durch Addition der Trägheitsmomente J_I und J_{II} erhält man $J_{III} = J_I + J_{II} = 408{,}81\,b^4 + 266{,}67\,b^4 = 675{,}48\,b^4$.

Setzt man im Querschnitte *III* statt b nur $\frac{b}{2}$, so erhält man das Profil *IV*, dessen Trägheitsmoment

$$J_{IV} = \frac{675{,}48\,b^4}{2^4} = 42{,}22\,b^4$$

und dessen Querschnittsmodul

$$Z_2 = \frac{J_{IV}}{4\,b} = \frac{42{,}22\,b^4}{4\,b} = 13{,}07\,b^3$$

wird. Von der Richtigkeit dieser Operation überzeugt man sich, wenn man für Profil *IV* den Abstand der horizontalen Schwerlinie von der oberen Flantschenkante, d. i. die Grösse c_1 und das Trägheitsmoment auf gewöhnliche Weise sucht. Man erhält:

$$c_1 = \frac{6{,}17\,b^2 \,.\, 0{,}5\,b + 4\,b^2 \,.\, 3\,b + 1{,}5\,b^2 \,.\, 5{,}5\,b}{6{,}17\,b^2 + 4\,b^2 + 1{,}5\,b^2} = \frac{23{,}335\,b}{11{,}67} = 2\,b, \text{ und}$$

$$J_{IV} = \frac{b^4}{3}\left(6{,}17 \,.\, 2^3 + 1{,}5 \,.\, 4^3 - 5{,}17 \,.\, 1^3 - 0{,}5 \,.\, 3^3\right), \text{ oder}$$

$$J_{IV} = 42{,}23\,b^4.$$

Bei den bis jetzt besprochenen T-Querschnitten von der Form der gleichen Festigkeit haben wir stillschweigend vorausgesetzt,

dass die biegende Kraft eine constante Richtung habe; ist dies jedoch nicht der Fall, wie es in Wirklichkeit bei den Fällen der Biegungsfestigkeit im Maschinenbau, wie überhaupt bei allen beweglichen Constructionen meist vorkommt, so ist es nöthig, dass die Widerstandsfähigkeit des betreffenden Körpers, sowohl bei der Umkehr der Kraftrichtung (wenn also die biegende Kraft abwechselnd in entgegengesetzter Richtung angreift), als auch dann unverändert bleibe, wenn sich die Kraftrichtung fortwährend so ändert, dass die neutrale Axe sich um den Schwerpunkt des Querschnittes dreht. Der erste Fall findet statt bei den Zähnen der Zahnräder, den Armen von Rädern und Riemscheiben; der zweite Fall bei Tragaxen; daher muss in diesen Fällen auch bei Anwendung von Gusseisen der zweiaxig symmetrische Querschnitt gewählt werden, so dass $c_1 = c_2$ wird, und muss man deshalb hier auf die gleichmässige Verwerthung der Zug- und Druckfestigkeit des Gusseisens verzichten und die zulässige Zugspannung (weil sie die kleinere ist) in die Rechnung einführen. Schmiedeisernen Trägern gibt man am vortheilhaftesten solche Querschnitte, bei denen $c_1 = c_2$ ist; auch bei den Querschnitten, welche durch die neutrale Axe nicht in zwei symmetrische Hälften der Höhe nach getheilt werden, und welche man oft für schmiedeiserne Träger anwendet, z. B. bei den Querschnitten der Eisenbahnschienen und der Blechträger mit ungleichen Gurtungen, sucht man das Material auf beiden Seiten der neutralen Axe so zu vertheilen, dass der Schwerpunkt möglichst in der Mitte der Höhe zu liegen kommt. Ehe man einen gusseisernen Träger anwendet, es ist nöthig, sich über die Gestalt der elastischen Linie zu orientiren. Man muss nämlich die Flantsche des **T**-Trägers, oder wenn zwei Flantschen vorhanden sind, die grössere von beiden nach d e r Seite hinlegen, nach welcher die elastische Linie convex ist, da diese Seite offenbar die gezogene ist. Aus den nachfolgenden Figuren ist ersichtlich, wie der **T**-Träger anzuordnen ist.

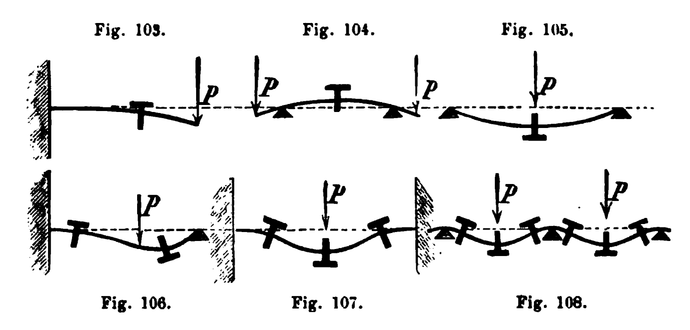


Fig. 103. Fig. 104. Fig. 105.

Fig. 106. Fig. 107. Fig. 108.

In den drei letzten Figuren zeigt die elastische Linie Wendepunkte, weshalb auch eine Umkehrung des Profiles eintreten muss; da dies aber in der Praxis nicht gut ausführbar ist, so folgt dar-

aus, dass man ohne Materialverschwendung einen gusseisernen Träger dort nicht anwenden darf, wo die elastische Linie Wendepunkte hat.

41. Ein prismatischer Balken von der Länge l, der mit seinen beiden Enden frei auf Stützen aufliegt, hat die Tragkraft P, wenn er auf seiner ganzen Länge gleichmässig belastet wird; diese Tragkraft soll dadurch vermehrt werden, dass man die Stützen nach innen rückt; man fragt:

1) Um wie viel sind die beiden Stützen von den Enden des Balkens nach innen zu rücken, damit derselbe die grösstmöglichste Tragkraft bei der angegebenen Belastungsart erlange, und

2) wie gross wird diese grösste Tragkraft, resp. wie viel mal wird sie grösser, als die Last P, welche der Balken tragen kann, wenn er an seinen Enden unterstützt wird? (Siehe nebenstehende Figur.)

Auflösung. Die Entfernungen der Unterstützungen des Balkens von den Enden desselben seien mit e, e, das Biegungsmoment für den Querschnitt in der Mitte der Länge des Balkens mit M_C, die Biegungsmomente für die Querschnitte in den Unterstützungspunkten A und B mit M_A und M_B bezeichnet, letztere beide Momente sind einander gleich.

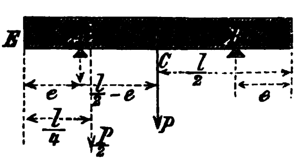


Fig. 109.

Wir haben zu untersuchen, wo der gefährliche Querschnitt liegt, d. h. zu ermitteln, welches von den beiden Momenten M_A und M_C das grössere ist. Für den Punkt C hat man:

$$M_C = \frac{P}{2}\left(\frac{l}{2} = e\right) - \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{4}, \text{ oder}$$

$$M_C = \frac{2P(l-2e)}{8} - \frac{Pl}{8} = \frac{P}{8}(l - 4e).$$

Bezeichnet p die Belastung, welche auf die Balkenstrecke AE entfällt, so findet offenbar die Proportion statt: $p : P = e : l$, woraus $p = \frac{Pe}{l}$ folgt; diese Kraft p wirkt in Bezug auf den Punkt A an den Hebelarm e, daher das Moment über der Stütze in A:

$$M_A = \frac{Pe}{l} \cdot \frac{e}{2} = \frac{Pl^2}{2l},$$

die Bedingung dafür, dass $M_A \lesseqgtr M_C$ sein soll, lautet daher, wenn man für M_A und M_C die Werthe setzt:

$$\frac{Pe^2}{2l} \lesseqgtr \frac{Pl}{8} - \frac{Pe}{2}, \text{ oder } \frac{Pe^2}{2l} + \frac{Pl}{2} \lesseqgtr \frac{Pl}{8}, \text{ oder } e^2 + d \lesseqgtr \frac{l^2}{4},$$

denkt man sich die beiden Ungleichheitszeichen durch das Gleichheitszeichen ersetzt und die dadurch erhaltene unreine quadratische Gleichung nach e als Unbekannte aufgelöst, so erhält man, wenn die Ungleichheitszeichen wieder eingeführt werden:

$$e \lesseqgtr -\frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{4}},$$

und, da e nicht negativ werden kann, so ist

$$e \lesseqgtr -\frac{l}{2} + \frac{l}{2}\sqrt{2}, \text{ oder } e \lesseqgtr \frac{l}{2}(\sqrt{2} - 1), \text{ oder } \underline{e \lesseqgtr 0{,}207\, l.}$$

Ist $e > 0{,}207\, l$, also $M_A > M_C$, so hat man zur Querschnittsberechnung des Balkens den Querschnittsmodul $Z = \frac{M_A}{\mathfrak{S}} = \frac{Pl^2}{2l\mathfrak{S}}$, ist $e < 0{,}207\, l$, so ist $Z = \frac{M_C}{\mathfrak{S}} = \frac{P(l - 4e)}{8\mathfrak{S}}$ zu setzen; im ersten Falle ist das Balkenmaterial beim Punkte C nicht völlig verwerthet (sobald der Balken prismatisch ist); im zweiten Falle wird das Material bei den Querschnitten in den Punkten A und B nicht völlig ausgenützt; deshalb wird die günstigste Lage der Stützen offenbar die sein, bei der $e = 0{,}207\, l$ ist, dann ist $M_A = M_C = M_B$, d. h. in den Punkten A, B und C sind gefährliche Querschnitte. Für diesen Fall ist

$$M = \frac{P(0{,}207)^2\, l^2}{2l} = 0{,}0214\, Pl$$

und da $M = \mathfrak{S} Z$ ist, so hat man $0{,}0214\, Pl = \mathfrak{S} Z$, woraus

$$P = \frac{\mathfrak{S} Z}{0{,}0214\, l} = \frac{46{,}7\, \mathfrak{S} Z}{l}$$

folgt; ist der Balken an den Enden unterstützt, dann ist seine Tragkraft $P = \frac{8\mathfrak{S} Z}{l}$; somit wird letztere um $\frac{46{,}7}{8} = 5{,}8$, also nahezu sechsmal vergrössert, wenn die Stützen, je um $0{,}207\, l$ von den Enden des Balkens nach innen entfernt gelegt werden.

42. Ein prismatischer Balken von der Länge $l = 3^1/_2{}^m$ ist an zwei Punkten seiner Länge A und B, welche von den Balkenenden A_1 und B_1 $0{,}5^m$ und 1^m entfernt sind, unterstützt und durch eine auf seiner ganzen Länge gleichmässig vertheilten Belastung von $P = 8000^{Kg}$ und noch durch drei einzelne Lasten von $P_1 = 800^{Kg}$,

am linken Balkenende im Punkte A_1 angreifend, $P_2 = 1000^{Kg}$ im Punkte C_1, $1^1/_2{}^m$ von A_1 entfernt, und $P_3 = 600^{Kg}$, am rechten Balkenende im Punkte B_1 angreifend, auf Biegung beansprucht; es ist zu untersuchen, ob die elastische Linie Wendepunkte hat, d. h. mit anderen Worten, ob man hier einen gusseisernen Träger mit Vortheil anwenden kann oder nicht. (Siehe Beispiel 40.)

Auflösung. Wir bestimmen für einige Querschnitte des Balkens die Biegungsmomente; haben sie alle gleiche Vorzeichen, so hat die elastische Linie keine Wendepunkte, haben aber die Momente verschiedene Vorzeichen, d. h. es sind positive und negative Momente vorhanden, so ist dies ein Zeichen, dass die elastische Linie Wendepunkte hat, denn das Moment kann von dem positiven in den negativen Werth nur durch die Null hindurch gehen, d. h. an irgend einem Querschnitte des Balkens ist das Moment = Null und an dieser Stelle ist daher ein Wendepunkt der elastischen Linie.

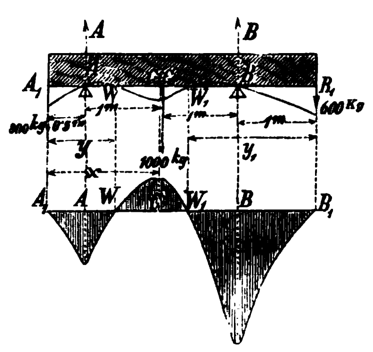


Fig. 110.

Wir bestimmen vorerst die Auflagerdrücke in den Punkten A und B. (Siehe Fig. 110.)

Es seien die Grössen dieser Drücke mit A und B bezeichnet. Für den Punkt B als Drehpunkt hat man zur Bestimmung von A nach dem Hebelgesetz die Gleichung:

$$A \,.\, 2 + 600 \,.\, 1 = 800 \,.\, 2{,}5 + 1000 \,.\, 1 + 8000 \,.\, 0{,}75,$$

woraus $A = 4200^{Kg}$ folgt. Der Stützendruck B wird daher:

$$B = 8000 + 800 + 1000 + 600 - A = 10400 - 4200 = 6200^{Kg}.$$

Um zu erfahren, wo es ein Maximum eines Biegungsmomentes gibt, wo also ein gefährlicher Querschnitt ist, suchen wir von A_1 aus die verticalen Schubkräfte für einige Querschnitte; wir bezeichnen die nach aufwärts wirkenden Verticalkräfte als positive, die nach abwärts wirkenden als negative. Für den Punkt A ist die Verticalkraft:

$$V_A = 4200 - 800 - \frac{8000}{3{,}5} \,.\, 0{,}5 = 2257^1/_7{}^{Kg},$$

für den Punkt C_1 hat man:

$$V_{C_1} = 4200 - 800 - 1000 - \frac{8000}{3{,}5} \,.\, 1{,}5 = -\,1028^4/_7{}^{Kg};$$

da V_A positiv und $V_{C_1}{}'$ negativ ist, so muss es ein Maximalmoment zwischen den Punkten A und C_1 geben, denn der positive Werth der Verticalkraft kann nur durch die Null hindurch in einen negativen Werth übergehen; dort aber, wo die Verticalkraft zwischen den Stützen = Null ist, ist bekanntlich ein Maximalbiegungsmoment. Die Entfernung x des Querschnittes, in welchem ein Maximalbiegungsmoment stattfindet, vom Balkenende A_1 findet sich daher aus der Bedingung, dass für diesen Querschnitt die Verticalkraft, hier im Punkte C gleich Null ist; man hat daher:

$$V_C = 0 = 4200 - 800 - \frac{8000}{3,5} \cdot x, \text{ woraus}$$

$$x = 1,488^m \text{ folgt.}$$

Das grösste positive Biegungsmoment ist:

$$M_C = 4200\,(1,488 - 0,5) - 800 \cdot 1,488 - \frac{8000}{3,5}\,\frac{(1,488)^2}{2}, \text{ oder}$$

$$M_C = 429,6^{Kgm}.$$

Bilden wir von links aus die Momente, so ist das Moment über der Stütze in A negativ (die rechts drehenden Momente gelten als positive, die links drehenden als negative). Es ist

$$M_A = -\,800 \cdot 0,5 - \frac{8000}{3,5}\,\frac{(0,5)^2}{2} = -\,686,$$

das Moment M_C ist positiv und das Moment über der Stütze in B, nämlich

$$M_B = 4200 \cdot 2 - 800 \cdot 2,5 - 1000 \cdot 1 - \frac{8000}{3,5}\,\frac{(2,5)^2}{2} = -1743,$$

ist negativ, daher muss es sowohl zwischen A und C, als auch zwischen B und C je einen Wendepunkt der elastischen Linie geben, weil zwischen den Punkten A und B ein zweimaliger Zeichenwechsel des Momentes eintritt. Die Entfernung y des Wendepunktes W vom linken Balkenende findet man aus der Bedingung, dass für den Punkt W das Biegungsmoment = Null ist; man hat daher für den Punkt W die Momentengleichung:

$$4200\,(y - 0,5) - 800\,y - \frac{8000}{3,5} \cdot \frac{y^2}{2} = 0;$$

diese Gleichung geordnet und nach y aufgelöst, gibt:

$$y^2 - 2,975\,y + 1,8375 = 0,$$

hieraus ist:

$$y = \frac{2,975}{2} \pm \sqrt{\frac{(2,975)^2}{4} - 1,8375},$$

oder $y = 1,4875 + 0,6125$, da aber $y < 1,5$ sein muss, so gilt hier das negative Vorzeichen, also ist

$$y = 1,4875 - 0,6125 = 0,875^m.$$

In gleicher Weise findet man die Entfernung y_1 des zweiten Wendepunktes der elastischen Linie, W_1 vom rechten Balkenende aus der Gleichung:

$$600\, y_1 + \frac{8000}{3,5} \cdot \frac{y_1^2}{2} - 6200\,(y_1 - 1) = 0,$$

welche Gleichung ebenfalls die Bedingung ausdrückt, dass für den Punkt W_1 das Biegungsmoment = Null ist. Die Gleichung geordnet und aufgelöst:

$$y_1^2 - 4,9\, y_1 + 5,425 = 0, \text{ hieraus ist:}$$

$$y_1 = \frac{4,9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4,9}{2}\right)^2 - 5,425}, \text{ oder}$$

$$y_1 = 2,45 \pm 0,76,$$

da aber y_1 kleiner sein muss als 2^m, so ist das negative Zeichen zu nehmen, also hat man

$$y_1 = 2,45 - 0,76 = 1,69^m;$$

einen gusseisernen Träger kann man demnach im vorliegenden Falle nicht mit Vortheil anwenden, weil die elastische Linie Wendepunkte hat. Eine graphische Darstellung der Biegungsbeanspruchung des Balkens erhält man dadurch, dass man die Momente für eine Reihe von Querschnitten als Ordinaten an die Gerade $A_1 B_1$ anträgt, und zwar positive Momente als nach aufwärts, negative Momente als nach abwärts gehende Senkrechte auf $A_1 B_1$; die Endpunkte der Ordinaten durch eine stetige, krumme Linie mit einander verbunden, gibt die in der Figur durch schraffirte Theile dargestellte Biegungsbeanspruchung des Balkens. Aus dieser Figur ist ersichtlich, dass in den Punkten A und B je ein negatives, im Punkte C ein positives Maximalbiegungsmoment und im Punkte B das absolut grösste Biegungsmoment stattfindet, nach welchem der Querschnitt des Balkens aus der Gleichung: $M_B = \mathfrak{S}\, Z = 1743^{Kgm}$ zu berechnen ist.

43. Ein prismatischer Balken, der auf seiner ganzen Länge gleichmässig mit P^{Kg} belastet werden soll, ruht mit dem einen Ende frei auf einer Stütze auf, es ist die Lage der anderen Stütze derart zu bestimmen, dass der Balken ein Maximum trägt. (Siehe Fig. 111.)

Auflösung. Angenommen, wir hätten die Lage der Stütze A, d. i. die Entfernung e schon gefunden. Wir suchen nun das zwischen den Stützpunkten A und B wirkende Maximalbiegungsmoment; angenommen, dieses finde im Punkte C in der Entfernung x vom linken Balkenende statt; hat nun die Stütze A eine solche Lage, dass das Moment über derselben gleich dem Maximalbiegungsmomente im Punkte C ist, dann ist offenbar das Maximum der Tragkraft des Balkens erreicht, denn dann hat letzterer zwei gefährliche Querschnitte, und ausserdem wird das Balkenmaterial an zwei Stellen vollkommen ausgenutzt. Die Entfernung x des gefährlichen Querschnittes in C vom Punkte A_1 findet man aus der Bedingung, dass im Punkte C, wo das Maximalbiegungsmoment stattfindet, die den Balken auf Abscheerung beanspruchende Verticalkraft $V = 0$ ist.

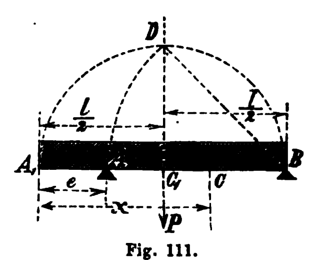


Fig. 111.

Die Verticalkraft im Punkte C ist gleich dem Stützendrucke A im Punkte A, weniger dem Theil der Last P, die auf die Strecke $A_1 C$ entfällt, es heisse dieser Theil P_1, so findet offenbar die Proportion statt: $P_1 : P = x : l$, woraus $P_1 = \frac{Px}{l}$ folgt; somit ist

$$V = A - \frac{Px}{l} = 0;$$

hieraus ist $x = \frac{Al}{P}$. Zur Bestimmung des Stützendruckes A hat man für den Punkt B als Drehpunkt die Momentengleichung:

$$A(l - e) = \frac{Pl}{2}, \text{ woraus } A = \frac{Pl}{2(l - e)}$$

folgt; diesen Werth von A in die Gleichung für x eingesetzt, gibt: $x = \frac{l^2}{2(l - e)}$.

Das Moment im Punkte C wird:

$$M_C = A(x - e) - \frac{Px}{l} \cdot \frac{x}{2} = A(x - e) - \frac{Px^2}{2l},$$

für A und x obige Werthe gesetzt:

$$M_C = \frac{Pl}{2(l - e)} \left[\frac{l^2}{2(l - e)} - e\right] - \frac{P}{2l} \cdot \frac{l^4}{4(l - e)^2}, \text{ oder}$$

$$M_C = \frac{Pl}{2(l-e)}\left[\frac{l^2 - 2le + 2e^2}{2(l-e)}\right] - \frac{Pl^3}{8(l-e)^2},$$

oder auf gleiche Benennung gebracht:

$$M_C = \frac{Pl(2l^2 - 4le + 4e^2) - Pl^3}{8(l-e)^2}, \text{ oder:}$$

$$M_C = \frac{Pl(l^2 - 4le + 4e^2 + l^2) - Pl^3}{8(l-e)^2}, \text{ oder:}$$

$$M_C = \frac{Pl\left[(l-2e)^2 + l^2\right] - Pl^3}{8(l-e)^2},$$

oder Pl herausgehoben:

$$M_C = \frac{Pl\left[(l-2e)^2 + l^2 - l^2\right]}{8(l-e)^2} = \frac{Pl(l-2e)^2}{8(l-e)^2}.$$

Diesen Werth für M_C kann man etwas kürzer, auch wie folgt, finden: Setzt man in die Gleichung $M_C = A(x-e) - \frac{Px^2}{2l}$ statt $\frac{Px}{l}$ den Werth A, so ist

$$M_C = A(x-e) - \frac{Ax}{2} = \frac{Ax}{2} - Ae = A\left(\frac{x}{2} - e\right), \text{ da aber}$$

$$x = \frac{l^2}{2(l-e)}, \text{ also } \frac{x}{2} - e = \frac{l^2}{4(l-e)} - e = \frac{l^2 - 4le + 4e^2}{4(l-e)},$$

oder $\frac{x}{2} - e = \frac{(l-2e)^2}{4(l-e)}$ ist, so hat man: $M_C = \frac{A(l-2e)^2}{4(l-e)}$ und für A den Werth gesetzt:

$$M_C = \frac{Pl}{2(l-e)} \cdot \frac{(l-2e)^2}{4(l-e)} = \frac{Pl(l-2e)^2}{8(l-e)^2},$$

wie früher.

Das Moment über der Stütze in A ist gleich dem Theil der ganzen Last P, der auf die Strecke $A_1 A$ entfällt, multiplicirt mit $\frac{e}{2}$; es heisse die für die Strecke $A_1 A$ entfallende Belastung P_2, so gilt die Proportion: $P_2 : P = e : l$, woraus $P_2 = \frac{Pe}{l}$ folgt. Somit wird $M_A = \frac{Pe}{l} \cdot \frac{e}{2} = \frac{Pe^2}{2l}$; da nun zur Bestimmung von e die Momente M_A und M_C einander gleichgesetzt werden müssen, so hat man durch Gleichsetzung der für M_A und M_C gefundenen Werthe:

$$\frac{Pe^2}{2l} = \frac{Pl(l-2e)^2}{8(l-e)^2};$$

diese Gleichung nach e als Unbekannte geordnet und aufgelöst:

$$e^2 = \frac{l^2(l-2e)^2}{4(l-e)^2},$$

beiderseits die Wurzel gezogen:

$$e = \frac{l(l-2e)}{2(l-e)}, \text{ oder } e^2 - 2le = -\frac{l^2}{2}, \text{ woraus}$$

$$e = l \pm \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{2}} = l \pm \sqrt{\frac{l^2}{2}} = l \pm \frac{l}{\sqrt{2}} \text{ folgt.}$$

Da e kleiner sein muss als l, so muss man offenbar das negative Vorzeichen der Wurzel nehmen und hat demnach:

$$e = l - \frac{l}{\sqrt{2}} = l\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \text{ oder}$$

$$\underline{e = 0{,}293\, l.}$$

Diese Strecke e kann man auch durch Construction wie folgt finden: Man halbirt die Strecke A_1B in C_1, zieht C_1D senkrecht zu A_1B, macht $C_1D = C_1B$ und $BA = BD$; es ist dann:

$$AC_1 = AB - BC_1 = AB - \frac{l}{2}, \text{ oder}$$

$$AC_1 = BD - \frac{l}{2} = \sqrt{\frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{4}} - \frac{l}{2} = \sqrt{\frac{l^2}{2}} - \frac{l}{2},$$

$$AC_1 = \frac{l}{\sqrt{2}} - \frac{l}{2} = l\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right) = \frac{l}{2}(\sqrt{2} - 1) \text{ und}$$

$$A_1A = e = A_1B - AB = A_1B - DB = l - \sqrt{\frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{4}},$$

$$e = l - \frac{l}{\sqrt{2}} = l\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

wie oben. Die gleichzeitig erhaltene Strecke AC_1 ist diejenige Entfernung, in welcher beide Stützen von den Enden des Trägers entfernt nach innen angeordnet werden müssten, wenn der Balken, symmetrisch in Bezug seiner Mitte unterstützt und gleichmässig auf seiner ganzen Länge belastet, ein Maximum tragen soll, ein Fall, der schon im Beispiel 41 behandelt wurde.

Das grösste Moment im vorliegenden Fall ist M_A oder M_C, weil beide gleich sind, und dient eines dieser Momente zur Querschnittsbestimmung des Balkens.

Es ist $M_A = \frac{Pe^2}{2l} = \frac{P(0,293\,l^2)}{2l} = 0,0429\,Pl$, wenn man nämlich für e den gefundenen Werth einsetzt. Da der Querschnittsmodul $Z = \frac{M_A}{\mathfrak{S}}$ ist, so hat man $Z = \frac{0,0429\,Pl}{\mathfrak{S}}$, woraus

$$P = \frac{\mathfrak{S}Z}{0,0429\,l} = \frac{23\,\mathfrak{S}Z}{l}$$

folgt; die Tragkraft ist also nahezu 3mal so gross, als wenn die Stützen an den Enden stehen, in welch letzterem Falle bekanntlich die Tragkraft $P = \frac{8\,\mathfrak{S}Z}{l}$ ist.

Auch hier hat die elastische Linie einen Wendepunkt, denn das Moment in A ist, von links aus gebildet, negativ, im Punkte C positiv, ein gusseiserner Träger ist also auch hier nicht mit Vortheil anwendbar.

44. Ein prismatischer, gusseiserner Balken von der Länge l soll an zwei Punkten seiner Länge so unterstützt werden, dass die elastische Linie keinen Wendepunkt habe und der Balken ein Maximum trage, wenn er auf seiner ganzen Länge gleichmässig belastet wird. Man fragt, wie weit müssen die Stützen von den Balkenenden entfernt nach innen angeordnet werden. (Siehe die folgende Figur.)

Auflösung. Damit die elastische Linie keine Wendepunkte habe, dürfen auf der ganzen Länge des Balkens Biegungsmomente mit verschiedenen Vorzeichen nicht vorkommen; dieses wird dann der Fall sein, wenn das für die Mitte des Balkens im Punkte C geltende Moment gleich Null ist; dann gibt es in den Unterstützungspunkten A und B zwei gleich grosse negative Momente, welche auch zugleich Maximalbiegungsmomente sind.

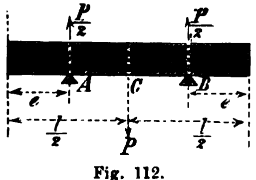


Fig. 112.

Setzt man das für den Punkt C geltende Moment gleich Null, so hat man:

$$M_C = \frac{P}{2}\left(\frac{l}{2} - e\right) - \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{4} = 0; \text{ hieraus ist: } \underline{e = \frac{l}{4}}.$$

Für die Punkte A und B hat man die Momente:

$$M_A = M_B = \frac{Pe}{l} \cdot \frac{e}{2} = \frac{Pe^2}{2l};$$

da dieses Moment das grösste ist, so dient es zur Querschnittsberechnung des Trägers; man hat daher zu setzen:

$$\frac{Pe^2}{2l} = \mathfrak{S}Z \text{ und für } e \text{ den Werth } e = \frac{l}{4}$$

eingesetzt, gibt:

$$\frac{P\left(\frac{l}{4}\right)^2}{2l} = \frac{Pl}{32} = \mathfrak{S}Z, \text{ woraus } P = \frac{32\,\mathfrak{S}Z}{l}$$

folgt; die Tragkraft ist also 4mal so gross, als wenn die Stützen an den Balkenenden wären, für welchen Fall bekanntlich $P = \frac{8\,\mathfrak{S}Z}{l}$ ist.

45. Ein prismatischer Balken von der Länge l soll auf seiner ganzen Länge gleichmässig belastet werden. Mit dem einen Ende ruht er auf einer Stütze auf; es soll die Lage der anderen Stütze so bestimmt werden, dass der Balken ein Maximum trage und die elastische Linie keine Wendepunkte habe, also ein gusseiserner Träger angewendet werden könne. (Siehe folgende Figur.)

Auflösung. Damit die elastische Linie keine Wendepunkte habe, darf kein Zeichenwechsel in den Momenten vorkommen; dieses wird dann der Fall sein, wenn das zwischen den Stützen A und B vorhandene grösste Moment, etwa im Punkte C gleich Null wird. In Beispiel 43, welches denselben Fall, wie den vorliegenden behandelt, jedoch mit dem Unterschiede, dass dort nicht verlangt wurde, dass die elastische Linie keine Wendepunkte haben dürfe, fanden wir für das grösste zwischen den Stützen vorhandene Moment: (siehe dort)

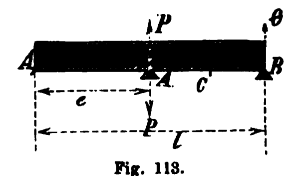


Fig. 113.

$M_C = \frac{Pl\,(l - 2\,e)^2}{8\,(l - e)^2}$, ferner die Entfernung x des Punktes C vom linken Balkenende: $x = \frac{l^2}{2\,(l - e)}$. Setzt man $M_C = 0$, so ist: $\frac{Pl\,(l - 2\,e)^2}{8\,(l - e)^2} = 0$, diese Gleichung nach e aufgelöst, gibt:

$$e = \frac{l}{2}, \text{ sonach wird } x = \frac{l^2}{2\left(l - \frac{l}{2}\right)},$$

oder $x = l$, d. h. der Punkt C fällt mit dem Punkte B zusammen. Alle Momente von A_1 bis B sind negativ, das grösste Moment findet im Punkte A statt; für diesen Punkt ist:

$$M_A = \frac{Pe}{l} \cdot \frac{e}{2} = \frac{Pe^2}{2l}$$

und da $e = \frac{l}{2}$ ist, so hat man

$$M_A = \frac{P\frac{l^2}{4}}{2l} = \frac{Pl}{8};$$

nach diesem Momente ist der Querschnitt des Balkens zu berechnen; man hat also:

$$\frac{Pl}{8} = \mathfrak{S} Z, \text{ woraus } P = \frac{8 \mathfrak{S} Z}{l}$$

folgt; die Tragkraft des Balkens ist also hier ebenso gross, als wenn beide Stützen an den Enden stehen würden.

46. Ein prismatischer Balken von der Länge l, der auf seiner ganzen Länge gleichmässig belastet werden soll, wird in der Entfernung a von dem einen Ende unterstützt; es fragt sich, in welcher Entfernung e vom anderen Ende muss die zweite Stütze angebracht werden, damit die elastische Linie keine Wendepunkte habe und der Balken ein Maximum trage. (Siehe die folgende Figur.)

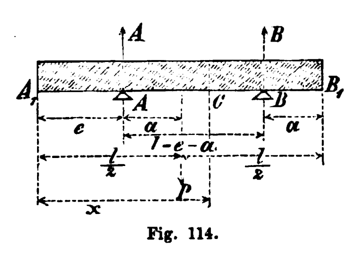


Fig. 114.

Auflösung. Soll die elastische Linie keine Wendepunkte haben, dann muss das zwischen den Stützen A und B auftretende grösste Biegungsmoment gleich 0 gesetzt werden. Angenommen, im Punkte C in der Entfernung x vom linken Ende A_1 sei das grösste Biegungsmoment, dann ist bekanntlich für diesen Querschnitt in C die Verticalkraft $V = A - \frac{Px}{l} = 0$, wenn A den Stützendruck in A bedeutet. Aus der letzten Gleichung folgt $x = \frac{Al}{P}$. Zur Bestimmung des Stützendruckes A hat man für den Punkt B als Drehpunkt die Momentengleichung:

$$A(l - e - a) + \frac{Pa^2}{2l} = \frac{P}{l}(l - a)\frac{(l - a)}{2}, \text{ oder}$$

$$A(l - e - a) + \frac{Pa^2}{2l} = \frac{P}{2l}(l^2 - 2al + a^2), \text{ oder}$$

$$A(l - e - a) + \frac{Pa^2}{2l} = \frac{Pl}{2} - Pa + \frac{Pa^2}{2l}, \text{ reducirt:}$$

$$A(l-e-a) = P\left(\frac{l}{2}-a\right) = \frac{P}{2}(l-2a);$$ hieraus ist

$$A = \frac{P(l-2a)}{2(l-e-a)},$$ daher wird

$$x = \frac{l}{P}\cdot\frac{P(l-2a)}{2(l-e-a)}, \text{ oder } x = \frac{l(l-2a)}{2(l-e-a)}.$$

Das Maximalbiegungsmoment für den Punkt C ist:

$$M_C = A(x-e) - \frac{Px}{l}\cdot\frac{x}{2} = A(x-e) - \frac{Px^2}{2l},$$

oder, für x und A die obigen Werthe gesetzt:

$$M_C = \frac{P(l-2a)}{2(l-e-a)}\left[\frac{l(l-2a)}{2(l-e-a)} - e\right] - \frac{P}{2l}\cdot\frac{l^2(l-2a)^2}{4(l-e-a)^2}, \text{ oder}$$

$$M_C = \frac{2P(l-2a)\left[l(l-2a) - 2e(l-e-a)\right] - Pl(l-2a)^2}{8(l-e-a)^2};$$

setzen wir nun $M_C = 0$ und führen zur Erleichterung der Rechnung die Abkürzung ein, dass wir $l-2a=n$ setzen, so hat man:

$$\frac{2Pn\left[ln - 2e(l-e-a)\right] - Pln^2}{8(l-e-a)^2} = 0, \text{ oder}$$

$$2Pn\left[ln - 2e(l-e-a)\right] - Pln^2 = 0, \text{ oder}$$

$$2Pn\left[ln - 2e(l-e-a)\right] = Pln^2,$$

beiderseits durch Pn dividirt:

$$2(ln - 2el + 2e^2 + 2ae) = ln;$$

die Gleichung nach e als Unbekannte geordnet und aufgelöst:

$$ln - 4el + 4e^2 + 4ae = 0, \text{ oder}$$

$$4e^2 - 4e(l-a) + ln = 0, \text{ oder}$$

$$e^2 - e(l-a) + \frac{ln}{4} = 0, \text{ hieraus folgt:}$$

$$e = \frac{l-a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{l-a}{2}\right)^2 - \frac{ln}{4}}$$

für n den Werth gesetzt:

$$e = \frac{l-a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{l-a}{2}\right)^2 - \frac{l(l-2a)}{4}}, \text{ oder}$$

$$e = \frac{l-a}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2 - 2al + a^2 - l^2 + 2al}{4}},\text{ oder}$$

$$e = \frac{l-a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{l-a}{2} \pm \frac{a}{2};$$

von den zwei Wurzelwerthen $e_1 = \frac{l-a+a}{2} = \frac{l}{2}$ und $e_2 = \frac{l-2a}{2}$ ist offenbar nur der zweite Werth $e_2 = \frac{l-2a}{2}$ zu gebrauchen, denn für $e = \frac{l}{2}$ würde

$$x = \frac{l(l-2a)}{2\left(l - \frac{l}{2} - a\right)} = \frac{l(l-2a)}{2\frac{(l-2a)}{2}} = l,$$

d. h. das Maximalbiegungsmoment, das gleich Null gesetzt wurde, liegt nicht zwischen den Stützen, sondern am Balkenende B_1, was aber gegen unsere Voraussetzung ist, denn wir gingen davon aus, dass das zwischen den Stützen befindliche Maximalbiegungsmoment zu Null werden müsse, d. h. es müsse $x > e$ und $x < l - a$ werden, also kann x nicht gleich l sein; wir müssen daher den Werth $e = \frac{l-2a}{2}$ beibehalten; damit wird:

$$x = \frac{l(l-2a)}{2\left(l - \frac{l-2a}{2} - a\right)} = l - 2a = 2e.$$

Der Querschnitt des Trägers wird nach dem Momente M_A oder M_B zu berechnen sein, je nachdem $e \gtrless a$ ist, für $e > a$ ist M_A und für $e < a$ ist M_B zu wählen, weil offenbar im ersten Falle M_A, im zweiten Falle M_B das grösste Moment ist. Man hat daher zur Querschnittsberechnung das Moment:

$$M_A = \frac{Pe^2}{2l} = \frac{P}{2l} \cdot \left(\frac{l-2a}{2}\right)^2 = \frac{P(l-2a)^2}{8l},$$

hieraus ist die Tragkraft:

$$P = \frac{8 l M_A}{(l-2a)^2} = \frac{8 l \mathfrak{S} Z}{(l-2a)^2};$$

stehen die Stützen an den Enden, so ist die Tragkraft $P_1 = \frac{8 \mathfrak{S} Z}{l}$, offenbar ist $\frac{8 l \mathfrak{S} Z}{(l-2a)^2} > \frac{8 \mathfrak{S} Z}{l}$, denn die beiden Brüche $\frac{l}{(l-2a)^2}$

und $\frac{1}{l}$ auf gleiche Benennung gebracht, gibt $\frac{l^2}{l(l-2a)^2}$ und $\frac{(l-2a)^2}{l(l-2a)^2}$ und da $l^2 > (l-2a)^2$ ist, so ist auch $P > P_1$; es sei z. B. $l = 4^m$, $a = 1^m$, so ist $\left(\frac{l}{l-2a}\right)^2 = \left(\frac{4}{4-2}\right)^2 = 4$, es ist also $P = 4\,P_1$, d. h. die Tragkraft ist viermal so gross, als wenn die Stützen an den Enden stehen würden. Wenn das Moment M_B zur Querschnittsbestimmung benutzt wird, so zeigt es sich auch hier, dass die Tragkraft grösser ist, als wenn die Stützen an den Enden stehen würden.

Es ist $M_B = \frac{Pa^2}{2l} = \mathfrak{S}Z$, woraus folgt: $P = \frac{2l\mathfrak{S}Z}{a^2}$, verglichen mit der Tragkraft $P_1 = \frac{8\mathfrak{S}Z}{l}$, ersieht man sofort aus den Brüchen $\frac{2l}{a^2}$ und $\frac{8}{l}$, oder $\frac{2l^2}{a^2 l}$ und $\frac{8a^2}{a^2 l}$, oder l^2 und $4a^2$, dass $P > P_1$, weil im Allgemeinen $l > 2a$ ist, für $l = 2a$, wird $P = P_1$ und $e = 0$, für $a = e$ wird $M_A = M_B$ und $a = e = \frac{l}{4}$.

Verzichtet man im vorliegenden Beispiele darauf, dass die elastische Linie keine Wendepunkte haben solle und verlangt man nur die Bestimmung der Grösse e, dass der Balken ein Maximum trage, so hat man das Maximalbiegungsmoment M_C zwischen den Stützen gleich zu setzen M_A oder M_B; die weitere Ausführung dieses Falles bleibe dem Fleisse des Lesers überlassen.

Setzt man $M_C = M_B$ und macht die Annahmen: $l = 5^m$, $a = 1^m$, so findet man aus einer quadratischen Gleichung, bei der man den negativen Wurzelwerth zu wählen hat:

$$e = \frac{13}{7} \pm \sqrt{\frac{225}{392}} = \frac{13}{7} \pm \frac{15}{19{,}799};$$

mit dem Werthe von $e = \frac{13}{7} - \frac{15}{19{,}799} = \frac{254^m}{231} = 1{,}099^m$ findet man $x = 2{,}5858^m$.

47. Ein prismatischer, schmiedeiserner Balken von quadratischem Querschnitte mit der Quadratseite $s = 100^{mm}$ trägt eine ihn auf Biegung beanspruchende Last mit einer zweifachen Bruchsicherheit; es soll dieser Balken durch einen anderen schmiedeisernen von kreisförmigem Querschnitte ersetzt werden, der sechsfache Bruchsicherheit gewährt, wie gross ist der Durchmesser dieses zweiten Balkens zu machen?

Auflösung. Das Biegungsmoment wird für beide Balken als gleich vorausgesetzt, da über die Art der Belastung und Unterstützung des Balkens in der Aufgabe nichts gesagt ist. Für den ersten Balken ist das Moment $M = \mathfrak{S} Z = \frac{s^3 \mathfrak{S}}{6}$, beim zweiten Balken soll die Sicherheit dreimal so gross, d. h. also die Spannung dreimal kleiner sein, als im ersten Balken, somit ist in die Gleichung $M = \mathfrak{S} Z$ anstatt $\mathfrak{S}$ nur $\frac{\mathfrak{S}}{3}$ zu setzen; man hat dann:

$$M = \frac{\pi d^3}{32} \cdot \frac{\mathfrak{S}}{3}, \text{ und da } M = \frac{s^3 \mathfrak{S}}{6}$$

ist, so folgt durch Gleichsetzung der Werthe von M:

$$\frac{\pi d^3}{32} \cdot \frac{\mathfrak{S}}{3} = \frac{s^3 \mathfrak{S}}{6}, \text{ woraus}$$

$$d = s \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 3}{6 \cdot \pi}} = 100 \sqrt{5} = 171^{mm} \text{ resultirt.}$$

48. Eine an einer verticalen Wand befestigte, resp. mit einem Ende eingemauerte gusseiserne Lagerconsole wird in einer Entfernung $l = 1^m$ von dem gefährlichen Querschnitte durch einen Druck $P = 450^{Kg}$ auf Biegung beansprucht, es sind die Dimensionen des gefährlichen Querschnittes zu berechnen. (Siehe die nebenstehende Figur.)

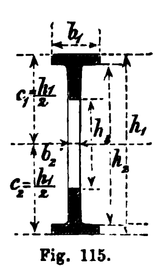


Fig. 115.

Auflösung. Für den vorliegenden Belastungsfall ist das Moment $M = Pl$, da eine Console als ein an einem Ende eingemauerter und an einer Stelle seiner Länge auf Biegung beanspruchter Balken anzusehen ist. Der Querschnittsmodul ist:

$$Z = \frac{b_1 (h_1^3 - h_2^3) + b_2 (h_2^3 - h_3^3)}{6 h_1}.$$

Da in dieser Gleichung fünf Unbekannte vorkommen, und nur eine Gleichung gegeben ist, so machen wir folgende Annahmen:

$$b_1 = \frac{h_1}{4}, \; h_2 = 0{,}9\, h_1, \; b_2 = 0{,}05\, h_1, \; h_3 = \frac{h_1}{2},$$

wir drücken nämlich die Unbekannten b_1, b_2, h_2, h_3 durch h_1 aus und erhalten dadurch nur die Unbekannte h_1. Die angegebenen Substitutionen ausgeführt, erhält man:

$$Z = \frac{\frac{h_1}{4} \left[h_1^3 - (0{,}9\, h_1)^3 + 0{,}05\, h_1 \left[(0{,}9\, h_1)^3 - \left(\frac{h_1}{2}\right)^3 \right] \right]}{6 h_1},$$

die angezeigten Operationen verrichtet und reducirt, gibt:

$$Z = 0{,}016325\, h_1^3.$$

Aus der Gleichung $M = \mathfrak{S}\, Z = Pl$, folgt: $Z = \frac{Pl}{\mathfrak{S}}$, daher erhält man durch Gleichsetzung der Werthe von Z:

$$0{,}016325\, h_1^3 = \frac{Pl}{\mathfrak{S}}, \text{ woraus sich ergibt:}$$

$$h_1 = \sqrt[3]{\frac{Pl}{0{,}016325\,\mathfrak{S}}} = \sqrt[3]{\frac{450 \,.\, 1000}{0{,}016325 \,.\, 2}} = 239{,}4,$$

oder abgerundet $\underline{h_1 = 240^{mm}}$; hiermit werden die anderen Querschnittsdimensionen:

$$b_1 = \frac{h_1}{4} = \frac{240}{4} = \ \ 60^{mm}, \quad h_2 = 0{,}9\, h_1 \ = 0{,}9 \,.\, 240 \ = 216^{mm},$$

$$h_3 = \frac{h_1}{2} = \frac{240}{2} = 120^{mm}. \quad b_2 = 0{,}05\, h_1 = 0{,}05 \,.\, 240 = \ \ 12^{mm}.$$

49. Durch zwei ineinandergreifende gusseiserne Zahnräder (Stirnräder) wird von einer Transmissionswelle, die $u = 40$ Umdrehungen pro Minute macht, eine Arbeit von $N = 20$ Pferdekräften auf die zweite Welle übertragen, es sind die Querschnittsdimensionen eines Zahnes zu berechnen; der Theilkreishalbmesser des Rades, das 40 Umdrehungen macht, ist $R = 900^{mm}$.

Auflösung. Der Zahn eines Stirnrades kann annähernd als ein stabförmiger, prismatischer Körper angesehen werden, der an dem einen Ende (am Radkranze) eingemauert und in einer gewissen Entfernung von diesem Ende durch eine Kraft (zwischen den Zähnen stattfindender Druck oder kurz Zahndruck) P auf Biegung beansprucht wird. Obzwar im Allgemeinen die Kraft P im Theilkreise des Rades, also in einer gewissen Entfernung von dem freien Ende des Zahnes denselben angreift, so ist es für den Zweck der Rechnung doch nöthig, den denkbar ungünstigsten Fall der Angriffsweise der Kraft P anzunehmen, und das ist der, dass die Kraft P am Ende des Zahnes in einer Ecke desselben angreift.

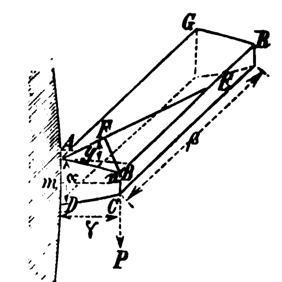


Fig. 116.

Die radial gemessene Länge des Zahnes $ABCD$ (siehe nebenstehende Figur), auch Höhe des Zahnes genannt, sei $mn = \gamma$, die Höhe des Zahnes, auch Zahnstärke oder Zahndicke genannt, sei $\alpha = AD$, die Breite des Zahnes sei $AG = \beta$; in der Ecke bei C

greift die Kraft P an. Angenommen, diese wäre so gross, dass sie einen Bruch des Zahnes herbeiführen würde, so könnte dieser Bruch in irgend einer Linie AE, deren Lage vorläufig noch unbestimmt ist, erfolgen.

Für die Bruchstelle AE ist der Hebelarm der Kraft P offenbar die Senkrechte, die man von dem Punkte B auf AE fällen kann, also die Gerade BF, daher ist das Moment der Kraft P:

$$M = P \cdot \overline{BF} = \frac{\overline{AE} \cdot \overline{AD}^2 \cdot \mathfrak{S}}{6},$$

oder, da $\overline{BF} = \overline{AB} \sin y$ und $\overline{AE} = \frac{\overline{AB}}{\cos y}$ ist, so hat man:

$$P \cdot \overline{AB} \sin y = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}^2 \cdot \mathfrak{S}}{6 \cos y},$$

oder wegen $AD = \alpha$, $P \sin y = \frac{\alpha^2 \mathfrak{S}}{6 \cos y}$, woraus $P = \frac{\alpha^2 \mathfrak{S}}{6 \cos y \cdot \sin y}$ folgt. Aus dieser Gleichung geht hervor, dass die Bruchstelle AE des Zahnes eine solche Lage, d. i. also der Winkel y eine solche Grösse haben wird, dass für denselben P ein Minimum, oder in dem obigen Ausdrucke für P der Nenner $6 \cos y \cdot \sin y$, oder $\cos y \cdot \sin y$ ein Maximum wird. Den ersten Differentialquotienten dieses Ausdruckes gleich Null gesetzt, gibt: $\cos^2 y - \sin^2 y = 0$, woraus $\cos y = \sin y$ und daher $\sphericalangle y = 45^0$ folgt; oder auf elementarem Wege: Es ist $\cos y \sin y = \frac{1}{2} \sin 2y$, der grösste Werth von $\sin 2y$ ist offenbar $= 1$, weil der grösste Werth des Sinusses eines Winkels überhaupt $= 1$ ist, dem entspricht ein Winkel von $2y = 90^0$, also $y = 45^0$ da nun $\cos 45 = \sin 45$ ist, so hat man:

$$P = \frac{\alpha^2 \mathfrak{S}}{6 \cos^2 45} = \frac{\alpha^2 \mathfrak{S}}{6 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\alpha^2 \mathfrak{S}}{3},$$

woraus die Zahnstärke $\alpha = \sqrt{\frac{3P}{\mathfrak{S}}}$ folgt.

Denkt man sich den Zahndruck P nicht in der Ecke, sondern in der Mitte der Kante BR angreifend, so hat man zur Querschnittsberechnung des Zahnes die Gleichung: $P\gamma = \frac{\mathfrak{S} \beta \alpha^2}{6}$, oder wenn man, wie es gewöhnlich im Maschinenbau geschieht, $\gamma = \frac{3}{2} \alpha$ setzt: $P \cdot \frac{3}{2} \alpha = \frac{\mathfrak{S} \beta \alpha^2}{6}$, beiderseits durch β dividirt, gibt:

$$P \cdot \frac{3}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{\mathfrak{S}\,\alpha^2}{6}, \text{ woraus } \alpha = 3\sqrt{\frac{P}{\mathfrak{S}}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}$$

folgt; für $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{3}$ wird auch hier $\alpha = \sqrt{\frac{3P}{\mathfrak{S}}}$, wie oben. Gewöhnlich wird im Maschinenbau $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{6}$ genommen, u. zw. für sogenannte Krahnräder, das sind solche, die bis zu $\frac{1}{2}^m$ Theilkreisgeschwindigkeit haben, nimmt man $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{4}$, und für Triebwerkräder, die eine grössere Umfangsgeschwindigkeit haben, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{6}$.

Sollen beide Berechnungsarten der Zahnstärke α dieselben Werthe geben, so muss für einen beliebigen Werth von $\frac{\alpha}{\beta}$ nothwendiger Weise im zweiten Falle für $\mathfrak{S}$ eine andere Spannung eingesetzt werden, als im ersten Falle; man hat dann:

$$\alpha = \sqrt{\frac{3P}{\mathfrak{S}}} = 3\sqrt{\frac{P}{\mathfrak{S}_1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}, \text{ woraus}$$

$\frac{3P}{\mathfrak{S}} = \frac{9P}{\mathfrak{S}_1} \cdot \frac{\alpha}{\beta}$, oder $\frac{1}{\mathfrak{S}} = \frac{3}{\mathfrak{S}_1} \cdot \frac{\alpha}{\beta}$ und $\mathfrak{S}_1 = 3\,\mathfrak{S}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ folgt.

Bei Maschinen, die durch Menschenkraft bewegt werden, also auch nur mit geringerer Geschwindigkeit laufen, wie z. B. bei Winden, Krahnen, nimmt man $\beta = 4\,\alpha$, man hat dann:

$$\mathfrak{S}_1 = \frac{3\,\mathfrak{S}}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4} = \frac{9}{4},$$

wenn man als erlaubte Faserspannung $\mathfrak{S} = 3$ annimmt. Den Werth von $\mathfrak{S}_1 = \frac{9}{4}$ in die Formel „$\alpha = 3\sqrt{\frac{P}{\mathfrak{S}_1} \cdot \frac{\alpha}{\beta}}$“ eingesetzt, gibt:

$$\alpha = 3\sqrt{\frac{P}{2^1/_4} \cdot \frac{1}{4}} = 3\sqrt{\frac{P}{9}} = \sqrt{P},$$

setzt man $\frac{\alpha}{\beta} = 6$, so ist $\mathfrak{S}_1 = 3\,\mathfrak{S} \cdot \frac{1}{6} = \frac{\mathfrak{S}}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$, hiermit wird $\alpha = 3\sqrt{\frac{P}{\mathfrak{S}} \cdot \frac{1}{6}} = 3\sqrt{\frac{P}{1{,}5} \cdot \frac{1}{6}} = \sqrt{P}$.

Aus der Formel $\mathfrak{S}_1 = 3\,\mathfrak{S}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ ist ersichtlich, dass die in die Formel für die Zahnstärke α einzusetzende Spannung $\mathfrak{S}_1$ abhängig ist von dem Verhältnisse $\frac{\alpha}{\beta}$. Diese Abhängigkeit hat folgende praktische Bedeutung: Die Berechnung der Querschnittsdimensionen eines Zahnes hat nicht blos mit Rücksicht auf seine Festigkeit allein, sondern auch mit Rücksicht auf seine Abnützung und mit Rücksicht auf den Umstand zu geschehen, dass bei Rädern mit grösserer Umfangsgeschwindigkeit durch die zwischen den Zähnen auftretenden, unvermeidlichen Stösse und Erschütterungen in Folge der grösseren Geschwindigkeit die Zähne stärker beansprucht werden, als bei langsam gehenden Rädern von demselben Zahndrucke, weshalb der Zahn stärker gemacht, oder die zulässige Spannung kleiner genommen werden muss. Die Abnützung der Zähne wird um so grösser sein, je grösser die Umfangsgeschwindigkeit der Räder ist; je grösser das Verhältniss $\frac{\beta}{\alpha}$ gemacht wird, desto mehr wird der Abnützung vorgebeugt, je breiter die Zähne sind, desto mehr vertheilt sich der Druck, desto geringer muss offenbar die Abnützung werden; es erscheinen daher sowohl die Spannung, als auch das Verhältniss $\frac{\beta}{\alpha}$ als Functionen, d. h. abhängig von der Umfangsgeschwindigkeit v des Rades. Man erzielt gute Resultate, wenn man setzt: $\mathfrak{S}_1 = \frac{\mathfrak{S}}{\sqrt{v^m}} = \frac{3}{\sqrt{v^m}}$, wobei die Umfangsgeschwindigkeit v in Metern ausgedrückt ist. Setzt man diesen Werth von $\mathfrak{S}_1$ gleich dem oben für $\mathfrak{S}_1$ gefundenen Werthe $\mathfrak{S}_1 = \frac{3\,\mathfrak{S}\,\alpha}{\beta}$, so hat man:

$$3\,\mathfrak{S}\,\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mathfrak{S}}{\sqrt{v^m}}, \text{ woraus } \underline{\frac{\beta}{\alpha} = 3\sqrt{v^m}} \text{ folgt.}$$

Die beiden Formeln „$\mathfrak{S}_1 = \frac{3}{\sqrt{v}}$ und $\frac{\beta}{\alpha} = 3\sqrt{v}$“ sind jedoch nur dann anzuwenden, wenn die Umfangsgeschwindigkeit v grösser als 4^m ist, für $v < 4$ ist die oben entwickelte Formel $\alpha = \sqrt{P}$ zu gebrauchen. Im vorliegenden Falle ist

$$v = \frac{\pi R u}{30} = \frac{3{,}14 \,.\, 0{,}9 \,.\, 40}{30} = 3{,}768^m,$$

somit die Zahnstärke α nach der Formel $\alpha = \sqrt{P}$ zu berechnen. Da in der Aufgabe der Zahndruck P nicht gegeben ist, so finden

wir diesen dadurch, dass wir in der bereits bekannten Gleichung $N = \frac{P v^m}{75}$ für v den Werth $v = \frac{\pi R u}{30}$ einsetzen, man hat dann:

$$N = \frac{P \,.\, \pi R^m u}{75 \,.\, 30}, \text{ woraus}$$

$$P = \frac{2250 N}{\pi R^m u} = \frac{2250 \,.\, 20}{3{,}14 \,.\, 0{,}9 \,.\, 40} = 398{,}08,$$

oder abgerundet $P = 400^{Kg}$ folgt; hiermit wird

$$\alpha = \sqrt{P} = \sqrt{400} = 20^{mm} \text{ und } \beta = 6\alpha = 6 \,.\, 20 = 120^{mm}.$$

Führt man in die Gleichung $P = \frac{2250 N}{\pi R^m u}$ dem Halbmesser R in Millimetern, anstatt in Metern ein, so hat man:

$$P = \frac{2250 \,.\, 1000 \,.\, N}{3{,}14 \,.\, R^{mm} \,.\, u} = \frac{716560 N}{R u};$$

diesen Werth von P in die Formel $\alpha = 3\sqrt{\frac{P}{\mathfrak{S}}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}$ eingeführt, gibt:

$$\alpha = 3\sqrt{\frac{716560 N}{\mathfrak{S} R u} \,.\, \frac{\alpha}{\beta}} = 2539\sqrt{\frac{N}{R u \mathfrak{S}}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)},$$

und im vorliegenden Falle, wo $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{6}$ und $\mathfrak{S} = 1{,}5$ eingesetzt wurde, hat man:

$$\alpha = 2539\sqrt{\frac{N \,.\, 1}{R u \,.\, 1{,}5 \,.\, 6}} = \frac{2539}{3}\sqrt{\frac{N}{R u}}, \text{ oder}$$

$$\alpha = 846{,}33\sqrt{\frac{N}{R u}}.$$

Da man im Maschinenbau die Theilung des Rades (Entfernung einer Zahnmitte von der Mitte des nächsten Zahnes, gemessen auf dem Theilkreise) bei gleichem Material der Zähne beider Räder gleichsetzt $2{,}1\,\alpha$, so ist die Anzahl der Zähne Z des Rades bestimmt durch die Bedingung, dass das Product aus der Zähnezahl Z und der Theilung t eines Rades gleich sein müsse dem Umfange des Theilkreises.

Es findet also die Gleichung statt: $Zt = 2 R \pi$, oder da $t = 2{,}1\,\alpha$ gesetzt wird, so muss $Z \,.\, 2{,}1\,\alpha = 2\pi R$, oder $Z = \frac{2\pi R}{2{,}1\,\alpha}$

sein; diese Zahl Z muss aber offenbar eine ganze Zahl sein; da nun im vorliegenden Beispiele $R = 900^{mm}$ gegeben und $\alpha = 20^{mm}$ ohne Rücksicht darauf, dass Z eine ganze Zahl sein müsse, gefunden wurde, so wird auch der Bruch $\frac{2\pi R}{2{,}1\,\alpha}$ keine ganze Zahl liefern; wir finden

$$\frac{2\pi R}{2{,}1\,\alpha} = \frac{2\,.\,3{,}14\,.\,900}{2{,}1\,.\,20} = 134\tfrac{4}{7},$$

es ist daher diese gemischte Zahl auf eine ganze Zahl abzurunden, indem man den Bruch $\frac{4}{7}$ zu einem Ganzen ergänzt, oder weglässt; wählen wir hier $Z = 134$, so ist noch eine kleine Correctur vorzunehmen, indem man aus der Gleichung $Zt = 2R\pi$ mit den Werthen von $Z = 134$ und $t = 2{,}1\,\alpha = 2{,}1\,.\,20 = 42^{mm}$, den Halbmesser R, oder bei unabänderlichem R den Werth von t aus der angegebenen Gleichung sucht. Nehmen wir $Z = 134$ und $t = 42$, so ergibt sich aus „$Zt = 2R\pi$“:

$$R = \frac{Zt}{2\pi} = \frac{134\,.\,42}{2\,.\,3{,}14} = 896{,}178^{mm};$$

übrigens hat man es in seiner Gewalt, die Zahnzahl Z so zu wählen, dass der Halbmesser oder Durchmesser von einer ganzen Zahl möglichst wenig abweicht; dies erreicht man häufig dadurch, dass man den durch Rechnung gefundenen Werth von t so abändert, dass $\frac{t}{\pi}$ eine solche ganze Zahl gibt, welche im Durchmesser ohne Rest enthalten ist; denn aus der Gleichung $R = \frac{Zt}{2\pi}$ folgt: $\frac{t}{\pi} = \frac{2R}{Z}$; ist z. B. $\frac{t}{\pi} = n =$ einer ganzen Zahl, so ist $Z = \frac{2R}{n}$; kann man t und R etwas verändern, so kann man mittelst der letzten Gleichung Z leicht als ganze Zahl bequem so bestimmen, dass der Halbmesser R sich als ganze Zahl mit dem Zirkel abgreifen lässt. Wir fanden $t = 42$, daher ist $\frac{t}{\pi} = \frac{42}{3{,}1416} = 13{,}36\ldots$, nehmen wir $\frac{t}{\pi} = 14$ und $2R = 1820$, so ist

$$Z = \frac{2R}{14} = \frac{1820}{14} = 130,$$

die Theilung wird: $t = 14\,.\,3{,}14 = 43{,}9824$, oder abgerundet $t = 44^{mm}$, was eine Zahnstärke von $\alpha = \frac{t}{2{,}1} = \frac{44}{2{,}1} = 20{,}95$ und

abgerundet $\alpha = 21^{mm}$ gibt. Wenn hölzerne Zähne mit gusseisernen zusammen arbeiten sollen, so kann man die Dicke des Holzzahnes aus der Eisenzahndicke, wie folgt, finden:

für den Gusseisenzahn ist: $\alpha_g = \sqrt{\frac{3P}{\mathfrak{S}_g}}$,

» » Holzzahn » $\alpha_h = \sqrt{\frac{3P}{\mathfrak{S}_h}}$,

aus diesen zwei Gleichungen den Werth von P bestimmt und die erhaltenen Ausdrücke einander gleichgesetzt, gibt:

$$P = \frac{\alpha_g^2 \mathfrak{S}_g}{3} = \frac{\alpha_h^2 \mathfrak{S}_h}{3}, \text{ woraus } \frac{\alpha_g}{\alpha_h} = \sqrt{\frac{\mathfrak{S}_h}{\mathfrak{S}_g}}$$

folgt. Für die Spannung $\mathfrak{S}_g$ haben wir aber den bereits früher gefundenen Werth $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_g' = \frac{3\,\mathfrak{S}_g\,\alpha}{\beta} = 3\,.\,3\,.\,\frac{\alpha}{\beta}$ zu setzen; man erhält dadurch

$$\frac{\alpha_g}{\alpha_h} = \sqrt{\frac{\mathfrak{S}_h}{3\,\mathfrak{S}_g\,.\,\frac{\alpha}{\beta}}} = \sqrt{\frac{\mathfrak{S}_h}{3\,.\,3\,.\,\frac{\alpha}{\beta}}}.$$

Setzt man für Holz $\mathfrak{S}_h = \frac{2}{3}$, so hat man für $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{4}$,

$$\frac{\alpha_g}{\alpha_h} = \sqrt{\frac{\frac{2}{3}}{3\,.\,3\,.\,\frac{1}{4}}} = \sqrt{\frac{\frac{2}{3}}{\frac{9}{4}}}, \text{ oder}$$

$$\frac{\alpha_g}{\alpha_h} = \sqrt{\frac{8}{27}} = \frac{2{,}8284}{5{,}1962}, \text{ oder } \frac{\alpha_h}{\alpha_g} = 1{,}83, \text{ also } \alpha_h = 1{,}83\,\alpha_g.$$

Für $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{6}$ hat man:

$$\frac{\alpha_h}{\alpha_g} = \sqrt{\frac{3\,.\,3\,.\,\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}}}, \text{ oder } \frac{\alpha_h}{\alpha_g} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}, \text{ also } \alpha_h = 1{,}5\,\alpha_g,$$

man hat daher für das Verhältniss $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{4}$ die Dicke des Eisenzahnes mit 1,83, für das Verhältniss $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{6}$ mit 1,5 zu multipliciren, um die Dicke des Holzzahnes zu erhalten.

Allgemein findet man die Holzzahndicke aus der Gleichung:

$$\alpha_h = \alpha_g \sqrt{\frac{\mathfrak{S}_g}{\mathfrak{S}_h}},$$

$\mathfrak{S}_g = 1{,}5$ und $\mathfrak{S}_h = \frac{2}{3}$ eingesetzt, erhält man sogleich

$$\alpha_h = \alpha_g \sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{3}}} = \alpha_g \sqrt{\frac{9}{4}},$$

oder $\alpha_h = \alpha_g \cdot \frac{3}{2} = 1{,}5\,\alpha_g$, wie oben.

50. Auf eine Handkurbel von 400^{mm} Länge wirkt ein Druck von $P_1 = 50^{Kg}$; ein auf der Kurbelwelle aufzukeilendes Rad von $Z = 20$ Zähnen soll die Kraft auf die nächste Welle übertragen; man fragt nach den Querschnittsdimensionen eines Zahnes.

Auflösung. Die Stärke des Zahnes sei mit α, seine Breite mit β, seine Länge mit $\gamma = \frac{2}{3}\alpha$ bezeichnet, so findet man aus der Festigkeitsgleichung: $P \cdot \frac{3}{2}\gamma = \frac{\beta \alpha^2 \mathfrak{S}}{6}$ die bereits im vorigen Beispiel für die Zahnstärke α entwickelte Formel:

$$\alpha = 3\sqrt{\frac{P}{\mathfrak{S}} \cdot \frac{\alpha}{\beta}};$$

multiplicirt man unter dem Wurzelzeichen Zähler und Nenner mit R, d. i. mit dem Theilkreishalbmesser des Zahnrades, so erhält man:

$$\alpha = 3\sqrt{\frac{PR}{\mathfrak{S}R} \cdot \frac{\alpha}{\beta}},$$

da das Product PR das statische Moment der den Zahn beanspruchenden Kraft P, also gleich ist dem Producte aus der Kurbellänge und dem auf der Kurbel ausgeübten Drucke, somit $M = PR = P_1 R_1$, wenn mit R_1 die Kurbellänge bezeichnet wird, so hat man für die Zahnstärke:

$$\alpha = 3\sqrt{\frac{M}{\mathfrak{S}R}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}.$$

Bezeichnet t die Theilung des Rades, so ist aus der bereits bekannten Gleichung „$Zt = 2R\pi$“: $R = \frac{Zt}{2\pi}$, diesen Werth von R in die Gleichung für α eingesetzt und quadrirt:

$$\alpha^2 = \frac{9 \cdot 2 \pi M}{\mathfrak{S} Z t} \cdot \frac{\alpha}{\beta},$$

für t den Werth gesetzt: $t = 2{,}1\,\alpha$ und dann beiderseits mit α multiplicirt, gibt:

$$\alpha^3 = \frac{18 \pi M}{2{,}1 \mathfrak{S} Z} \cdot \frac{\alpha}{\beta}; \text{ hieraus ist:}$$

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{18 \pi M}{2{,}1 \mathfrak{S} Z} \cdot \frac{\alpha}{\beta}} = 3 \sqrt[3]{\frac{M}{\mathfrak{S} Z} \cdot \frac{\alpha}{\beta}};$$

im vorliegenden Falle gelte $\frac{\alpha}{\beta}$ für ein Krahnrad, daher $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{4}$ und die Spannung $\mathfrak{S}$ ist nach der im vorigen Beispiel entwickelten Gleichung $\mathfrak{S}_1 = 3 \cdot \mathfrak{S} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$, diese Werthe: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{4}$, $\mathfrak{S} = \frac{9}{4}$, sowie $M = 400 \cdot 50$ und $Z = 20$ eingesetzt, gibt:

$$\alpha = 3 \sqrt[3]{\frac{50 \cdot 400}{\frac{9}{4} \cdot 20} \cdot \frac{1}{4}} = 3 \sqrt[3]{\frac{1000}{9}} = 14{,}42^{mm},$$

hiermit wird die Theilung (vorläufig)

$$t = 2{,}1\,\alpha = 2{,}1 \cdot 14{,}42 = 30{,}282^{mm}.$$

Runden wir diese Zahl so ab, dass sie durch π theilbar wird, so hat man z. B. $\frac{t}{\pi} = \frac{31{,}4}{3{,}14} = 10$, somit wird der Halbmesser

$$R = \frac{z t}{2 \pi} = \frac{20}{2} \cdot \frac{31{,}4}{3{,}14} = 10 \cdot 10 = 100^{mm};$$

endlich wird die corrigirte Zahnstärke:

$$\alpha = \frac{t}{2{,}1} = \frac{31{,}4}{2{,}1} = 15^{mm} \text{ und } \beta = 4\,\alpha = 4 \cdot 15 = 60^{mm}.$$

51. Durch zwei ineinandergreifende Zahnräder wird von einer Transmissionswelle auf eine zweite eine mechanische Arbeit von $N = 30$ Pferdekräften übertragen, das kleinere Rad soll $Z = 60$ Zähne erhalten und $u = 96$ Umdrehungen pro Minute machen. Man fragt nach den Querschnittsdimensionen eines Zahnes.

Auflösung. In Beispiel 49 haben wir für die Zahnstärke α die Formel entwickelt:

$$\alpha = 2539 \sqrt{\frac{N}{R u \mathfrak{S}} \cdot \frac{\alpha}{\beta}},$$

da aber hier nicht der Halbmesser R, sondern die Zahnzahl Z des Rades gegeben ist. so führen wir in die Formel für α den aus der Gleichung $2\pi R = Zt$ resultirenden Werth von $R = \frac{Zt}{2\pi}$ ein, man erhält dadurch:

$$\alpha = 2539 \sqrt{\frac{N}{\frac{Zt}{2\pi} \cdot u \mathfrak{S}} \cdot \frac{\alpha}{\beta}},$$

für t den Werth gesetzt: $t = 2{,}1\,\alpha$ und beiderseits quadrirt, gibt:

$$\alpha^2 = (2539)^2 \cdot \frac{N \cdot 2\pi}{2{,}1\,\alpha Z \cdot u \mathfrak{S}} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right),$$

beiderseits mit α multiplicirt:

$$\alpha^3 = (2539)^2 \cdot \frac{2\pi N}{2{,}1\, Z u \mathfrak{S}} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right), \text{ oder}$$

$$\alpha = \sqrt[3]{(2539)^2 \cdot \frac{2\pi N}{2{,}1\, Z u \mathfrak{S}} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}, \text{ oder}$$

$$\underline{\alpha = 268 \sqrt[3]{\frac{N}{Z u \mathfrak{S}} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}.}$$

Setzt man in diese Gleichung die in Beispiel 49 angegebenen Werthe von $\mathfrak{S} = \frac{3}{\sqrt{v}}$, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{3\sqrt{v}}$, sowie für N, Z und u die Zahlenwerthe ein, so erhält man:

$$\alpha = 268 \sqrt[3]{\frac{30}{60 \cdot 96 \cdot \frac{3}{\sqrt{v}}} \cdot \frac{1}{3\sqrt{v}}} = 268 \sqrt[3]{\frac{1}{1729}},$$

$$\alpha = \frac{268}{12} = 22\,{}^1\!/_3{}^{mm}.$$

Die Theilung t des Rades wird:

$t = 2{,}1\,\alpha = 2{,}1 \cdot 22\,{}^1\!/_3 = 46{,}9$ und abgerundet $t = 47^{mm}$.

Der Halbmesser des Rades wird

$$R = \frac{Zt}{2\pi} = \frac{60}{2} \cdot \frac{47}{3{,}14} = 30 \cdot 15 = 450^{mm};$$

hiermit wird die Umfangsgeschwindigkeit im Theilkreise

$$v = \frac{\pi R u}{30} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}45 \cdot 96}{30} = 4{,}52^{m},$$

daher $\frac{\beta}{\alpha} = 3\sqrt{v} = 3\sqrt{4{,}52} = 6{,}378$, somit die Zahnbreite

$$\beta = 6{,}38\,\alpha = 6{,}38 \,.\, 22{,}33,$$

oder abgerundet $\beta = 143^{mm}$.

52. Ein Zahnrad vom Halbmesser $R = 500^{mm}$ soll bei $u = 60$ Umdrehungen pro Minute $N = 20$ Pferdekräfte übertragen; welche Querschnittsdimensionen bekommen die Arme an der Nabe, wenn ihre Anzahl $= 6$ ist; der Querschnitt eines Armes sei ein Rechteck von der Höhe h und der Breite $b = \frac{h}{5}$.

Auflösung. Der Arm eines Zahnrades wird durch den im Theilkreis wirkenden Zahndruck P auf Biegung beansprucht; er ist als ein stabförmiger Körper anzusehen, der an dem einen Ende (an der Nabe) befestigt (eingemauert) und am anderen, frei gedachten Ende (am Kranze) durch die Kraft P auf Biegung beansprucht wird; auch setzen wir voraus, dass der Querschnitt des Armes auf seiner ganzen Länge constant ist. Obzwar die Länge des Armes um den Halbmesser der Radnabe kleiner ist, als der Theilkreishalbmesser des Rades, so setzen wir doch der Einfachheit der Rechnung wegen das den Arm biegende Moment: $M = \frac{PR}{i}$, wenn i die Anzahl der Arme ist. Aus den Gleichungen

$$„N = \frac{P^{Kg}\, v^{m}}{75} \text{ und } v = \frac{\pi R u}{30}“$$

folgt die durch das Rad übertragene Kraft (Zahndruck):

$$P = \frac{30 \,.\, 75\, N}{\pi R u} = \frac{30 \,.\, 75 \,.\, 20}{3{,}14 \,.\, 0{,}5 \,.\, 60} = 477{,}7^{Kg}.$$

Das Biegungsmoment wird:

$$M = \frac{PR}{i} = \frac{477{,}7 \,.\, 500}{6} = 39808{,}33;$$

da aber $M = \mathfrak{S} Z = \mathfrak{S} \,.\, \frac{b h^2}{6}$ und wegen $b = \frac{h}{5}$, $M = \frac{\mathfrak{S} h^3}{30}$ ist, so folgt:

$$h = \sqrt[3]{\frac{30\, M}{\mathfrak{S}}} = \sqrt[3]{\frac{30 \,.\, 39808{,}33}{2}} = 84{,}2^{mm},$$

hiermit wird $b = \frac{h}{5} = \frac{84{,}2}{5} = 16{,}84$ und abgerundet $b = 17^{mm}$. Will man jedoch die Dimensionen b und h genauer berechnen, d. h.

den Umstand berücksichtigen, dass der Arm in Wirklichkeit an seinen beiden Enden befestigt ist, so bediene man sich zur Berechnung des grössten, den Arm biegenden Momentes der von Grashof entwickelten Formel:

$$M = \frac{P(r - a)}{z} \cdot \frac{2l + 3a}{3l + 6a};$$

hierin bedeuten: r den Theilkreishalbmesser des Rades, z die Armzahl, l die Länge eines Armes, a den Halbmesser der Radnabe. Nach dieser Formel die Querschnittsdimensionen des Armes berechnet, würde man erhalten:

$$h = \sqrt[3]{\frac{30\,M}{\mathfrak{S}}} = \sqrt[3]{\frac{30 \cdot \frac{P(r + a)}{z} \cdot \frac{2l + 3a}{3l + 6a}}{\mathfrak{S}}},$$

seien im vorliegenden Falle:

$$a = 82^{mm},\ l = 378^{mm},\ r = 500^{mm},\ \text{so ist}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{30 \cdot 20521}{2}} = 67{,}5 \ldots$$

und abgerundet $h = 68^{mm}$, somit die Dicke $b = \frac{68}{5} = 13{,}6^{mm}$.

Setzt man jedoch, was häufig geschieht, in die letzte Formel für h als zulässige Spannung $\mathfrak{S}$ nicht 2, sondern unter Berücksichtigung des Umstandes, dass der Druck P nicht immer gleichmässig auf alle Arme vertheilt ist, $\mathfrak{S} = 1$, so erhält man $h = 85{,}68^{mm}$, also einen nahezu gleichen Werth, wie wir ihn nach der ersten Berechnungsart gefunden haben.

53. Eine Riemscheibe, deren Halbmesser $R = 400^{mm}$ beträgt, macht pro Minute $u = 60$ Umdrehungen und überträgt $N = 12$ Pferdekräfte. Welche Querschnittsdimensionen bekommen die Arme, wenn deren Zahl $= 4$ ist und die Querschnittsform eine Ellipse mit den Halbaxen $\frac{h}{2}$ und $\frac{h}{4}$ sein soll.

Auflösung. Aus den Gleichungen „$N = \frac{Pv}{75}$ und $v = \frac{\pi R u}{30}$“ folgt die durch die Riemscheibe übertragene Kraft:

$$P = \frac{30 \cdot 75\,N}{\pi R u} = \frac{30 \cdot 75 \cdot 12}{3{,}14 \cdot 400 \cdot 60} = 358^{Kg}.$$

Nach der Erklärung in Beispiel 52 ist das einen Arm biegende Moment $\frac{PR}{4} = \frac{358 \cdot 400}{4} = 35800$; der Querschnittsmodul ist:

$$Z = \frac{\pi}{32} b h^2 = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{h}{2} \cdot h^2 = \frac{\pi h^3}{64},$$

man erhält daher aus der Gleichung

$$„\frac{PR}{4} = \frac{\mathfrak{S} \pi h^3}{64}“$$

die grosse Axe der Ellipse:

$$h = \sqrt[3]{\frac{64 PR}{4 \mathfrak{S} \pi}} = \sqrt[3]{\frac{64 \cdot 358 \cdot 400}{4 \cdot 2 \cdot 3{,}14}} = 71{,}45^{mm}$$

und abgerundet $h = 72^{mm}$, hiermit wird

$$b = \frac{h}{2} = \frac{72}{2} = 36^{mm}.$$

54. Welche Last kann eine Console aus Sandstein an ihrem äusseren Ende tragen, wenn das eigene Gewicht berücksichtigt werden soll, der Querschnitt an der Einmauerungsstelle ein Rechteck von 250^{mm} Breite und 500^{mm} Höhe, der verticale Längenschnitt der Console von einer Parabel begrenzt ist und die freie Länge des Trägers $l = 1^m$ beträgt. (Siehe die nebenstehende Figur.)

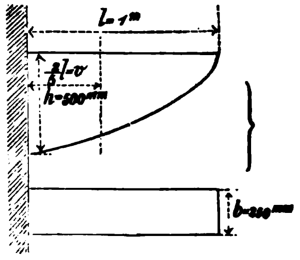


Fig. 117.

Auflösung. Die hier anzuwendende Festigkeitsformel ist:

$$Pl + Gv = \frac{1}{6} b h^2 \mathfrak{S},$$

in welcher Gleichung v die Entfernung des Schwerpunktes der Console von der Einmauerungsstelle bedeutet.

Nach der Schwerpunktslehre ist

$$v = \frac{2}{5} l = \frac{2}{5} \cdot 1000 = 400^{mm}.$$

Zur Berechnung des Consolegewichtes betrachte man den Stein als einen prismatischen Körper, dessen Querschnittsfläche die Parabelfläche und dessen Seitenkantenlänge die Breite des Steines ist. Die Fläche des von der Parabel begrenzten verticalen Längenschnittes ist bekanntlich $f = \frac{2}{3} h l$, nimmt man die Dichte des Steines mit 2 an, so ist das Gewicht desselben:

$$G = \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot 10 \cdot 2{,}5 \cdot 2 \cdot 1 = 166^{Kg}.$$

Obige Festigkeitsgleichung nach P als Unbekannte aufgelöst, gibt:

$$P = \frac{{}^1/_6\, b h^2 \mathfrak{S} - G r}{l} = \frac{{}^1/_6 \,.\, 250\,(500)^2 \,.\, 0{,}12 - 166 \,.\, 400}{1000},$$

$$P = 1183{,}6^{Kg}.$$

55. Eine Eisenbahnschiene von $130{,}8^{mm}$ Höhe und $0{,}75^{m}$ Länge ist an einem Ende eingemauert und am anderen Ende frei, welche Last trägt die Schiene am freien Ende mit Sicherheit?

Auflösung. Der Querschnittsmodul einer Eisenbahnschiene von 131^{mm} Höhe ist*) $Z = 140{,}4$, bezogen auf Centimeter, daher erhält man aus der Gleichung $Pl = \mathfrak{S} Z$:

$$P = \frac{\mathfrak{S} Z}{l} = \frac{700 \,.\, 140{,}4}{75} = 1310^{Kg}.$$

56. Ein schmiedeiserner Balken, der an einem Ende eingemauert und am anderen freien Ende mit $P = 500^{Kg}$, sowie auf seiner ganzen freien Länge von $l = 1{,}5^{m}$, mit $G = 680^{Kg}$ gleichmässig belastet ist, soll durch Eisenbahnschienen von 105^{mm} Höhe ersetzt werden; wie viel solcher Eisenbahnschienen, die horizontal nebeneinander gelegt und entsprechend miteinander verbunden werden, braucht man?

Auflösung. Der Querschnittsmodul des ganzen Trägers ist:

$$Z = \frac{M}{\mathfrak{S}} = \frac{Pl + \frac{G l}{2}}{\mathfrak{S}}, \text{ oder}$$

$$Z = \frac{500 \,.\, 150 + \frac{680 \,.\, 150}{2}}{700} = 180;$$

der Querschnittsmodul einer Eisenbahnschiene von 105^{mm} Höhe ist laut Profiltafel der „Hütte“ $Z = 90$, daher die Anzahl der nöthigen Eisenbahnschienen:

$$x = \frac{180}{90} = 2.$$

57. Ein schmiedeiserner I-Träger liegt mit seinen beiden Enden frei auf zwei Stützen auf, auf seiner ganzen freien Länge von $l = 4{,}3^{m}$ ist er gleichmässig mit $P = 5700^{Kg}$ belastet, welches Profil laut I-Eisen-Tabelle (siehe Schluss dieses Abschnittes) erhält der Träger?

*) Siehe die Tafel der Querschnittsmoduli (Widerstandsmomente) in dem Formelbuche „Hütte“.



Auflösung. Der erforderliche Querschnittsmodul ist

$$Z = \frac{Pl}{8\,\mathfrak{S}} = \frac{5700 \cdot 430}{8 \cdot 700} = 437{,}5,$$

diesem Werthe genügt das Profil Nr. 28 und der Querschnitt (siehe die folgende Figur) erhält folgende Dimensionen:

$$h = 260^{mm},$$
$$d = 12\tfrac{1}{2}^{mm},$$
$$b = 97\tfrac{3}{4}^{mm},$$
$$t = 15^{mm}.$$

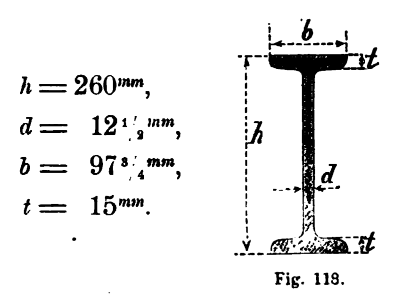


Fig. 118.

58. Ein an beiden Enden frei aufliegender schmiedeiserner Träger hat eine gleichmässige Belastung von $P = 12000^{Kg}$ auf seiner ganzen freien Länge, $l = 2^m$, zu tragen; wie viel Eisenbahnschienen von à $130{,}8^{mm}$ Höhe können diesen Träger ersetzen?

Auflösung. Der erforderliche Querschnittsmodul ist:

$$Z = \frac{Pl}{8\,\mathfrak{S}} = \frac{12000 \cdot 200}{8 \cdot 700} = 428{,}6,$$

der Querschnittsmodul der Eisenbahnschiene von $130{,}8^{mm}$ Höhe ist 140,4, somit ist die erforderliche Anzahl Eisenbahnschienen:

$$x = \frac{428{,}6}{140{,}4} = \text{abgerundet } 3;$$

würden aber die Stützen um ein Stück $e = 0{,}3^m$ von den Enden entfernt, nach innen angeordnet, so werden nicht mehr drei nebeneinander anzuordnende Eisenbahnschienen, sondern weniger nothwendig sein, weil der Querschnittsmodul kleiner wird. Um die Grösse des letzteren zu bestimmen, muss man erst untersuchen, ob e gleich, kleiner oder grösser ist, als $0{,}207\,l$ (siehe Beispiel 41); da nun $0{,}207\,l = 0{,}207 \cdot 2 = 0{,}414^m$ ist, also $e = 0{,}3 < 0{,}414$, so hat man nach den in Beispiel 41 gegebenen Erklärungen das Moment $M = \frac{P(l - 4e)}{8}$ zu setzen; da aber $\frac{P(l - 4e)}{8} = \mathfrak{S} Z$ ist, so folgt der Querschnittsmodul:

$$Z = \frac{P(l - 4e)}{8\,\mathfrak{S}} = \frac{12000\,(200 - 4 \cdot 30)}{8 \cdot 700} = 171{,}4,$$

wofür zwei Eisenbahnschienen von à 105^{mm} Höhe, von denen jede einen Querschnittsmodul von 90 hat, genügen würden. Wäre z. B. zufällig $e = 0,207\,l = 0,207 \,.\, 2$, oder $e = 0,414^m$, dann ist nach Beispiel 41 der Querschnittsmodul

$$Z = \frac{0,0214\,Pl}{\mathfrak{S}} = \frac{0,0214\,.\,12000\,.\,200}{700} = 73,4,$$

wofür offenbar eine einzige Eisenbahnschiene von 105^{mm} Höhe genügen würde, da der Querschnittsmodul der letzteren schon 90 beträgt.

59. Zwei übereinander liegende Balken, von denen jeder einen rechteckigen Querschnitt mit den Dimensionen b und h hat und in gleichen Abständen durch Bolzen und eingelegte Querstücke mit einander fest verbunden sind, liegen mit ihren Enden frei auf und haben in der Mitte der Länge eine Last P zu tragen (siehe die folgende Figur); die freie Länge der Balken sei l; es fragt sich, wie gross ist die verticale Entfernung x der beiden Balken zu machen, damit die Tragkraft des Doppelbalkens n-mal grösser werde, als die Tragkraft der beiden unmittelbar aufeinander liegenden Balken?

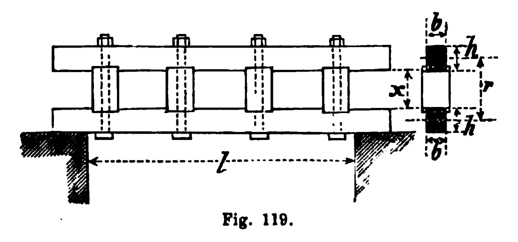


Fig. 119.

Auflösung. Würden die beiden Balken unmittelbar aufeinander liegen und mit einander fest verbunden sein, so wäre die Tragkraft P_1 des zusammengesetzten Balkens ebenso gross, wie beim einfachen Balken von der Höhe $2h$, u. zw.: Für den vorliegenden Belastungs- und Unterstützungsfall ist aus der Festigkeitsgleichung

„$\frac{P_1 l}{4} = \frac{1}{6} b (2h)^2 \mathfrak{S} = \frac{4}{6} b h^2 \mathfrak{S}$“, die Tragkraft $P_1 = \frac{8 b h^2 \mathfrak{S}}{3 l}$.

Befinden sich aber die beiden Balken in der Entfernung x von einander, so ist das Trägheitsmoment des Querschnittes:

$$J = \frac{1}{12} b (x + 2h)^3 - \frac{b}{12} x^3, \text{ oder}$$

$$J = \frac{b}{12} \left[(x + 2h)^3 - x^3 \right];$$

die innerhalb der Klammer angezeigte Operation verrichtet, dann reducirt und $2h$ herausgehoben, gibt:

$$J = \frac{hb}{6}\left(3x^2 + 6hx + 4h^2\right).$$

Die Entfernung c der äussersten Faserschichte von der neutralen Faserschichte ist $c = \frac{x + 2h}{2}$; daher der Querschnittsmodul

$$Z = \frac{J}{c} = \frac{\frac{hb}{6}\left(3x^2 + 6hx + 4h^2\right)}{\frac{x + 2h}{2}}, \text{ oder}$$

$$Z = \frac{hb}{3}\left(\frac{3x^2 + 6hx + 4h^2}{x + 2h}\right),$$

diesen Werth von Z in die Gleichung $\frac{Pl}{4} = \mathfrak{S}Z$ eingesetzt, gibt:

$$\frac{Pl}{4} = \frac{hb}{3}\left(\frac{3x^2 + 6hx + 4h^2}{x + 2h}\right)\mathfrak{S},$$

hieraus ist die Tragkraft

$$P = \frac{4hb\mathfrak{S}}{3l}\left(\frac{3x^2 + 6hx + 4h^2}{x + 2h}\right),$$

der Aufgabe gemäss soll dieser Werth von P n-mal grösser sein, als der obige Werth P_1, daher findet die Gleichung statt: $\frac{P}{P_1} = n$, oder für P und P_1 die Werthe gesetzt:

$$\frac{4hb\mathfrak{S}}{3l}\left(\frac{3x^2 + 6hx + 4h^2}{x + 2h}\right) \cdot \frac{3l}{8bh^2\mathfrak{S}} = n, \text{ oder}$$

$$\frac{3x^2 + 6hx + 4h^2}{2h(x + 2h)} = n;$$

diese Gleichung ist nach x aufzulösen; ordnet man dieselbe, so erhält man:

$$3x^2 + 6hx + 4h^2 = 2hnx + 4nh^2, \text{ oder}$$

$$3x^2 + x(6h - 2nh) = 4nh^2 - 4h^2, \text{ oder}$$

$$x^2 + \frac{2hx}{3}(3 - n) = \frac{4h^2}{3}(n - 1), \text{ hieraus ist:}$$

$$x = -\frac{h(3 - n)}{3} \pm \sqrt{\frac{h^2(3 - n)^2}{9} + \frac{4h^2(n - 1)}{3}};$$

hier kann offenbar nur das positive Vorzeichen der Wurzelgrösse benützt werden; angenommen, es werde verlangt, die Tragkraft P soll dreimal so gross sein, als P_1, also $\frac{P}{P_1} = 3$, oder $n = 3$, so hat man, wenn man noch $h = 100^{mm}$ annimmt,

$$x = -\frac{100\,(3-3)}{3} + \sqrt{\frac{(100)^2\,(3-3)^2}{9} + \frac{4\,(100)^2\,(3-1)}{3}}, \text{ oder}$$

$$x = \sqrt{\frac{8000}{3}} = 163{,}49^{mm};$$

wenn man daher die zwei Balken in dieser Entfernung $x = 163{,}5^{mm}$ von einander durch eingelegte Querstücke und Schraubenbolzen fest mit einander verbindet, so ist die Tragkraft P dieses zusammengesetzten Balkens:

$$P = 3\,P_1 = 3\,.\,\frac{8}{3}\,\frac{b\,h^2\,\mathfrak{S}}{l} = \frac{8\,b\,h^2\,\mathfrak{S}}{l}.$$

Es sei z. B. $b = 50^{mm}$, $h = 100^{mm}$, $l = 2^{m}$, so ist, wenn wir Holzbalken voraussetzen und die erlaubte Belastung pro Quadratmillimeter Querschnitt mit $\mathfrak{S} = 0{,}5^{Kg}$ nehmen, die Tragkraft des zusammengesetzten Balkens:

$$P = \frac{8\,.\,50\,(100)^2\,.\,0{,}5}{2000} = 1000^{Kg},$$

während die Tragkraft der beiden unmittelbar übereinander liegenden Balken nur $\frac{P}{3} = \frac{1000}{3} = 333\,{}^1/_3{}^{Kg}$ ist. Den Werth von $P = 1000$ würde man natürlich auch erhalten, wenn man in die für die vergrösserte Tragkraft des zusammengesetzten Balkens oben entwickelte Formel

$$„P = \frac{4\,h\,b\,\mathfrak{S}}{3\,l}\left(\frac{3\,x^2 + 6\,h\,x + 4\,h^2}{x + 2\,h}\right)“$$

die Zahlenwerthe einsetzen und P ausrechnen würde.

Mittelst der letzten Gleichung kann man auch die Frage beantworten: Wie gross sind die Querschnittsdimensionen b und h von einem der Balken zu machen, die zusammen den zusammengesetzten Balken ausmachen, wenn die Entfernung x, die Länge l und P gegeben sind.

Setzen wir allgemein $h = \alpha\,b$ in die letzte Gleichung ein, so erhält man:

$$P = \frac{4\,\alpha\,b^2\,\mathfrak{S}}{3\,l}\left(\frac{3\,x^2 + 6\,\alpha\,b\,x + 4\,\alpha^2\,b^2}{x + 2\,\alpha\,b}\right),$$

diese Gleichung nach der Unbekannten b geordnet, gibt:

$$3\,l\,x\,P + 6\,\alpha\,b\,l\,P = 12\,\alpha\,b^2\,\mathfrak{S}\,x^2 + 24\,\alpha^2 b^3 x\,\mathfrak{S} + 16\,\alpha^3 b^4\,\mathfrak{S},\ \text{oder}$$

$$b^4 + \frac{3\,x}{2\,\alpha}\,.\,b^3 + \frac{3\,x^2}{4\,\alpha^2}\,.\,b^2 - \frac{3\,l\,P}{8\,\alpha^2\,\mathfrak{S}}\,.\,b = \frac{3\,l\,x\,P}{16\,\alpha^3\,\mathfrak{S}},$$

offenbar eine unreine Gleichung vierten Grades, deren Auflösung man wie folgt umgehen kann: Setzt man in der Gleichung

$$P = \frac{8}{3}\,.\,\frac{b\,h^2\,\mathfrak{S}}{l},$$

(welche, wie wir wissen, dem Fall entspricht, dass beide Balken unmittelbar aufeinander liegen) $h = \alpha\,b$ und berechnet b, so erhält man aus:

$$P = \frac{8}{3}\,.\,\frac{b\,.\,\alpha^2 b^2\,\mathfrak{S}}{l} = \frac{8\,b^3\alpha^2\,\mathfrak{S}}{3\,l},\quad b = \sqrt[3]{\frac{3\,l\,P}{8\,\alpha^2\,\mathfrak{S}}};$$

angenommen, es seien gegeben: $l = 2^m$, $P = 8000^{Kg}$, $\alpha = 2$, $\mathfrak{S} = 0{,}5$, so ist

$$b = \sqrt[3]{\frac{3\,.\,2000\,.\,8000}{8\,.\,4\,.\,0{,}5}} = 145^{mm}$$

und daher $h = 2\,.\,145 = 290^{mm}$; diese Dimensionen gelten, wenn die beiden Holzbalken unmittelbar übereinander liegen; sollen sich dieselben aber in der Entfernung x von einander befinden, so können offenbar die Dimensionen b und h kleiner sein; machen wir z. B. die Annahme: $h = 220^{mm}$, $x = 160^{mm}$, setzen diese Werthe, sowie die früheren, $P = 8000$, $l = 2000$. $\mathfrak{S} = 0{,}5$ in die Gleichung

$$P = \frac{4\,h\,b\,\mathfrak{S}}{3\,l}\left(\frac{3\,x^2 + 6\,h\,x + 4\,h^2}{x + 2\,h}\right)$$

ein, und rechnen b aus, so erhält man:

$$b = \frac{3\,l\,P\,(x + 2\,h)}{4\,h\,\mathfrak{S}\,(3\,x^2 + 6\,h\,x + 4\,h^2)},\ \text{oder}$$

$$b = \frac{3\,.\,2000\,.\,8000\,(160 + 2\,.\,220)}{4\,.\,220\,.\,0{,}5\,[3\,.\,160\,(160 + 2\,.\,220) + 4\,(220)^2]} = 135{,}9^{mm},$$

oder abgerundet $b = 136^{mm}$; das Verhältniss $\frac{h}{b} = \frac{220}{136} = \frac{55}{34}$ kann im vorliegenden Falle als passend angesehen werden; würde man ein anderes Verhältniss zwischen h und b wünschen, so muss man für h einen anderen Werth, als den obigen $h = 220$, probeweise annehmen und b wiederholt ausrechnen. Kommt es jedoch

nicht darauf an, dass zwischen den Grössen h und b ein gewisses Verhältniss, wenn auch nur angenähert, eingehalten werde, so setze man in der ursprünglichen Gleichung

$$M = \frac{Pl}{4} = \frac{\mathfrak{S} J}{c} = \frac{\mathfrak{S}}{c} \cdot \frac{b}{12}\left[(x+2h)^3 - x^3\right]$$

$x + 2h = H$ und erhält

$$\frac{Pl}{4} = \frac{\mathfrak{S}\, b\,(H^3 - x^3)}{6H},$$

nimmt man in dieser Gleichung zwischen b und H ein Verhältniss an, z. B. $b = \alpha H$, und rechnet H aus, so erhält man:

$$\frac{Pl}{4} = \frac{\mathfrak{S}\alpha}{6}(H^3 - x^3), \text{ woraus } H = \sqrt[3]{\frac{6\,Pl}{4\,\mathfrak{S}\alpha} + x^3}$$

folgt, setzen wir die Zahlenwerthe $P = 8000$, $x = 160^{mm}$, $l = 2000$, $\mathfrak{S} = 0{,}5$, $\alpha = 0{,}2$ ein, so ist

$$H = \sqrt[3]{\frac{6 \,.\, 8000 \,.\, 2000}{4 \,.\, 0{,}5 \,.\, 0{,}2} + (160)^3} = 625^{mm}$$

und hiermit die Breite $b = 0{,}2 \,.\, 625 = 125^{mm}$, die Höhe h eines einzelnen Balkens wird:

$$h = \frac{H - x}{2} = \frac{625 - 160}{2} = 232{,}5^{mm}.$$

60. Zwei prismatische, stabförmige Körper von gleichen Längen und einander gleichen, sonst jedoch beliebigen Querschnitten sind mit einander zu einem Doppelbalken fest verbunden, der bei einer bestimmten Belastungs- und Unterstützungsweise die Tragkraft P_1 habe; man fragt, wie gross ist die Entfernung x zu machen, um welche die beiden Balken in verticaler Richtung auseinander zu rücken und durch eingelegte Querstücke und Bolzen (ähnlich wie im vorigen Beispiele) fest zu verbinden sind, damit die Tragkraft des neuen Balkens bei derselben Belastungs- und Unterstützungsweise wie bei dem ersteren Balken n-mal grösser werde, als bei den alten Balken. (Siehe nebenstehende Figur.)

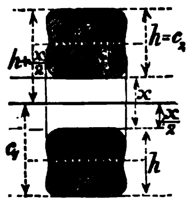


Fig. 120.

Auflösung. Wir setzen als bekannt voraus: Den Flächeninhalt f des Querschnittes eines der beiden Balken, das Trägheitsmoment i dieses Querschnittes, bezogen auf seine horizontale Schweraxe, die Höhe h des Querschnittes, die Entfernung c der Schweraxe desselben von einer der äussersten, z. B. unteren Faserschichte. Für

die beiden unmittelbar aufeinander liegenden Balken ist das Trägheitsmoment des zusammengesetzten Balkens $J_1 = 2(i + fc^2)$; werden die zwei Balken um die Entfernung x in verticaler Richtung auseinander gerückt, so ist das Trägheitsmoment dieses zusammengesetzten Balkens

$$J = 2\left[i + f\left(c + \frac{x}{2}\right)^2\right];$$

im ersteren Falle hat man für eine beliebige Belastungs- und Unterstützungsweise das Maximalbiegungsmoment

$$M_1 = \frac{\mathfrak{S} J_1}{c_2},$$

im letzteren Falle ist unter der Voraussetzung desselben Balkenmaterials, der gleichen Art der Belastung und Unterstützung, wie im ersten Falle, die Tragkraft, also auch das Maximalbiegungsmoment M des zusammengesetzten Balkens n-mal grösser, als im ersten Falle. Man hat

$$M = \frac{\mathfrak{S} J}{c_1},$$

da die Grössen M und M_1 den Tragkräften P und P_1 direct proportional sind, so ist $\frac{M}{M_1} = n$, oder für M und M_1 die Werthe gesetzt:

$$\frac{\mathfrak{S} J}{c_1} : \frac{\mathfrak{S} J_1}{c_2} = \frac{c_2 J}{c_1 J_1} = n,$$

für c_2, c_1, J und J_1 die Werthe gesetzt:

$$c_2 = h,\ c_1 = h + \frac{x}{2},\ J = 2\left[i + f\left(c + \frac{x}{2}\right)^2\right],\ J_1 = 2(i + fc^2),$$

so erhält man:

$$\frac{h\left[i + f\left(c + \frac{x}{2}\right)^2\right]2}{\left(h + \frac{x}{2}\right)\left(i + fc^2\right)2} = n,$$

diese Gleichung ist nach x aufzulösen.

Die angezeigten Operationen verrichtet:

$$\frac{h\left[i + f\left(c^2 + cx + \frac{x^2}{4}\right)\right]}{\left(h + \frac{x}{2}\right)\left(i + fc^2\right)} = n, \text{ oder}$$

$$h\left(i + fc^2 + fcx + \frac{fx^2}{4}\right) = \left(h + \frac{x}{2}\right)\left(i + fc^2\right) n,$$

die Klammern aufgelöst und geordnet:

$$x^2 hf + x(4hfc - 2in - 2fc^2 n) = 4hin + 4fc^2 hn - 4hi - 4hfc^2,$$

oder

$$x^2 + \frac{x\left[2fc(2h - cn) - 2in\right]}{hf} = \frac{4hfc^2(n-1) + 4ih(n-1)}{fh},$$

oder

$$x^2 + \frac{x\left[2fc(2h - cn) - 2in\right]}{fh} = \frac{4(n-1)(fc^2 + i)}{f},$$

hieraus ist:

$$x = -\frac{fc(2h - cn) - ni}{fh} \pm$$

$$\pm \sqrt{\left[\frac{fc(2h - cn) - ni}{fh}\right]^2 + \frac{4(n-1)(fc^2 + i)}{f}}.$$

Hier ist nur das positive Vorzeichen des Wurzelausdruckes zu gebrauchen. Setzt man in diese Formel für i, f und c die einem rechteckigen Querschnitte entsprechenden Werthe ein, nämlich:

$$f = bh,\quad c = \frac{h}{2},\quad i = \frac{bh^3}{12},$$

so erhält man offenbar den im vorigen Beispiel entwickelten Werth von x für den speciellen Fall, dass beide Balken rechteckige Querschnitte haben.

Nehmen wir z. B. an, der Querschnitt der beiden zu verbindenden Balken sei der einer Eisenbahnschiene von einer sehr häufig gebrauchten Profilform, deren Höhe $h = 130^{mm}$, deren Trägheitsmoment $i = 919$ (auf Centimeter bezogen) und deren Flächeninhalt $f = 42{,}75^{cm^2}$ ist, die Entfernung c des Schwerpunktes von der Basiskante der Schiene ist $c = 6{,}5^{cm}$; setzen wir diese Werthe in obige Gleichung für x ein, so erhält man nach einer kleinen vorherigen Umformung des rechten Theiles:

$$x^{cm} = -\frac{2 \cdot 42{,}75 \cdot 6{,}5 \cdot 13 - n\left[(6{,}5)^2 \cdot 42{,}75 + 919\right]}{42{,}75 \cdot 13} +$$

$$+ \sqrt{\left\{\frac{2 \cdot 42{,}75 \cdot 6{,}5 \cdot 13 - n\left[(6{,}5)^2 \cdot 42{,}75 + 919\right]}{42{,}75 \cdot 13}\right\}^2 +}$$

$$\overline{+ \left\{\frac{4\left[42{,}75\,(6{,}5)^2 + 919\right]}{42{,}75}\right\}(n-1)}, \text{ oder}$$

$$x^{cm} = -\frac{7224{,}75 - 2725{,}19\,n}{555{,}57} +$$

$$+\sqrt{\left(\frac{7224{,}75 - 2725{,}19\,n}{555{,}57}\right)^2 + 255\,(n-1)};$$

setzt man z. B. $n = 5$ und $n = 3$, so erhält man $x = 45{,}4^{cm}$ und $x = 29{,}9^{cm}$; soll also die Tragkraft des aus zwei Eisenbahnschienen gebildeten, zusammengesetzten Balkens dreimal, resp. fünfmal vergrössert werden, so sind die Schienen um $29{,}9^{cm}$, beziehungsweise um $45{,}4^{cm}$ in verticaler Richtung auseinander zu rücken und an mehreren Stelle ihrer Länge fest mit einander zu verbinden.

Nun kann man noch die Frage aufwerfen, in welchen Entfernungen von einander sind die Verbindungsstücke zwischen den beiden Schienen anzubringen? Heisse diese Entfernung l, so wird die Berechnung derselben abhängig sein von der Art der Belastung. Greift die Last den zusammengesetzten Balken an einem einzigen Punkte an, z. B. in der Mitte seiner Länge, so ist das Balkenstück zwischen jenen zwei Verbindungsstücken, zwischen welchen die Last angreift, als ein auf zwei Stützen ruhender Balken vom Querschnitte f_1 (dessen Höhe $= h$ ist) anzusehen und muss in diesem Falle die Entfernung l aus der Festigkeitsgleichung $\frac{Pl}{4} = \mathfrak{S} Z$ berechnet werden, in welcher Gleichung Z den Querschnittsmodul einer Schiene, bezogen auf ihre horizontale Schweraxe bezeichnet. Ist aber der an seinen Enden unterstützte zusammengesetzte Balken auf seiner ganzen Länge gleichmässig belastet und wendet man ausser den zwei Endverbindungsstücken noch $n - 1$ Zwischenstützen in gleichen Entfernungen von einander zur Verbindung der beiden Balken an, so theilt man dadurch die ganze Länge L in n gleiche Theile; es heisse ein solcher Theil l, so ist $l = \frac{L}{n}$ und der auf jedes Balkenstück von der Länge l entfallende Belastungstheil ist daher auch $\frac{P}{n}$, wenn P die ganze gleichmässige Belastung bedeutet. Die Endstücke des Balkens, links und rechts, von den Längen l und l sind als Balken anzusehen, die an einem Ende eingemauert und am anderen Ende unterstützt sind; die anderen Balkentheile sind so anzusehen, als ob sie mit ihren beiden Enden eingemauert wären. Für die beiden Endstücke des Balkens gilt die Festigkeitsgleichung:

$$\frac{\frac{1}{n}P}{8}\,.\,l = \mathfrak{S} Z, \text{ für die übrigen Balkenstücke } \frac{\frac{1}{n}P}{12}\,.\,l = \mathfrak{S} Z;$$

da nach der ersteren Gleichung l kleiner ausfällt, so wird man, wenn die Entfernungen l auf der ganzen Länge gleich gross angeordnet werden, l aus den Gleichungen

$$\frac{\frac{1}{n} P}{8} \cdot \frac{L}{n} = \mathfrak{S} Z \text{ und } l = \frac{L}{n}$$

berechnen. Man erhält aus der ersteren Gleichung:

$$n = \sqrt{\frac{P L}{8 \mathfrak{S} Z}}$$

und somit

$$l = \frac{L}{\sqrt{\frac{P L}{8 \mathfrak{S} Z}}} = \frac{\sqrt{L^2}}{\sqrt{\frac{P L}{8 \mathfrak{S} Z}}} = \sqrt{\frac{8 \mathfrak{S} Z L}{P}}.$$

Es sei z. B. $L = 2^m$, $Z = \frac{1}{6} b h^2$ mit $b = 50^{mm}$ und $h = 100^{mm}$, also

$$Z = \frac{1}{6} \cdot 50 \cdot (100)^2 = 83333{,}3, \text{ ferner } P = 1000^{Kg}, \ \mathfrak{S} = 0{,}5$$

(siehe Beispiel 59), so ist

$$n = \sqrt{\frac{P L}{8 \mathfrak{S} Z}} = \sqrt{\frac{1000 \cdot 2000}{8 \cdot 0{,}5 \cdot 83333{,}3}} = 2{,}45;$$

man wird daher die beiden Balken von rechteckigem Querschnitte durch vier Stützen in den gleichen Entfernungen von

$$l = \frac{L}{n} = \frac{2000}{3} \, 666^3{}_{,3}{}^{mm}$$

mit einander verbinden. Dass die Verbindungsstücke selbst rücksichtlich ihrer rückwirkenden Festigkeit die genügenden Querschnittsdimensionen haben müssen, um den entsprechenden Drücken mit der nöthigen Sicherheit zu widerstehen, ist wohl selbstverständlich. Sind z. B., wie im vorliegenden Beispiel, im Ganzen vier Verbindungsstücke angewendet, so wird jede der beiden inneren Stützen mit $\frac{3}{8} P = \frac{3}{8} \cdot 1000 = 375^{Kg}$ gedrückt.

Die Ableitung dieses Werthes $\frac{3}{8} P$ ist sehr einfach und bleibe dem Fleisse des Lesers überlassen.

61. Es ist das Trägheitsmoment und der Querschnittsmodul des Querschnittes einer Eisenbahnschiene von den in Fig. 121 angegebenen Dimensionen zu berechnen.

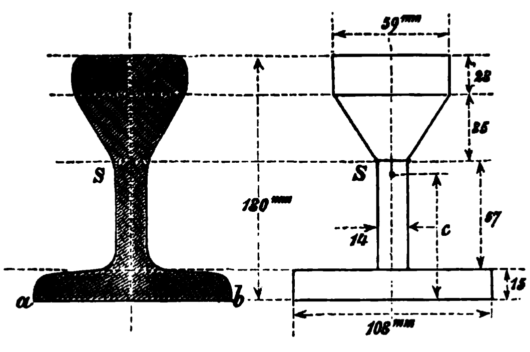


Fig. 121.

Auflösung. Wir ersetzen die krummlinige Begrenzung des Querschnittes durch eine geradlinige, jedoch so, dass die dadurch entstehende Fläche mit der wirklichen Querschnittsfläche gleichen Flächeninhalt behält (was natürlich nur annähernd, aber genügend genau für die Praxis geschehen kann). Diesen geradlinig begrenzten Querschnitt zerlegen wir in solche Theilfiguren, deren Trägheitsmomente bekannt sind, also in das Rechteck von den Seiten 59^{mm} und 23^{mm}, das Trapez von den beiden Parallelseiten 59^{mm} und 14^{mm} und der Höhe von 35^{mm}, ferner in das Rechteck von 14^{mm} und 57^{mm} und endlich in das Rechteck von 103^{mm} Länge und 15^{mm} Höhe. Die Trägheitsmomente dieser vier Figuren, bezogen auf ihre horizontalen Schweraxen, seien i', i'', i''', i'''', die Trägheitsmomente derselben Figuren, sämmtlich bezogen auf die unterste horizontale Kante ab des Querschnittes, seien i_1, i_2, i_3, i_4, das Trägheitsmoment des ganzen Querschnittes, bezogen auf dieselbe Kante, sei J_1, und bezogen auf die horizontale Schweraxe des Querschnittes J; die Entfernung der letzteren von der Kante $a\,b$ sei $= c$, die Entfernungen der Schwerpunkte der vier Flächentheile f_1, f_2, f_3, f_4, von der Kante ab heissen d_1, d_2, d_3, d_4.

Nach dem Satze, dass das Trägheitsmoment einer Figur, bezogen auf eine zur horizontalen Schweraxe parallele Gerade, gleich ist dem Trägheitsmomente der Figur, bezogen auf ihre horizontale zur gegebenen Geraden parallele Schweraxe, mehr dem Producte aus dem Flächeninhalte der Figur in das Quadrat der Entfernung der beiden parallelen Axen, hat man:

$$i_1 = i' + d_1^2 f_1 = \frac{1}{12} b_1 h_1^3 + d_1^2 \, . \, b_1 h_1, \text{ oder}$$

$$i_1 = \frac{1}{12} . 59 (23)^3 + \left(130 - \frac{23}{2}\right)^2 . 59 . 23 = 11420964,$$

$$i_2 = i'' + d_2^2 f_2 = \frac{(a^2 + b^2 + 4ab) h^3}{36 (a + b)} +$$

$$+ \left[15 + 57 + \left(\frac{2b + a}{a + b}\right) \frac{h}{3}\right]^2 (14 + 59) \frac{35}{2},$$

in dieser Gleichung bedeutet der Ausdruck $\left(\frac{2b + a}{a + b}\right) \frac{h}{3}$ die Entfernung des Schwerpunktes des Trapezes von dessen kürzerer Parallelseite $a = 14^{mm}$, daher

$$d_2 = 15 + 57 + \left(\frac{2 . 59 + 14}{14 + 59}\right) . \frac{35}{3} = 15 + 57 + 21{,}1 = 93{,}1^{mm},$$

und

$$i_2 = \frac{[(14)^2 + (59)^2 + 4 . 14 . 59](35)^3}{36 (14 + 59)} + (93{,}1)^2 . \left(\frac{14 + 59}{2}\right) 35 =$$

$$= 11186764{,}92,$$

es ist ferner

$$i_3 = i''' + d_3^2 f_3 = \frac{b_3 h_3^3}{12} + \left(15 + \frac{57}{2}\right)^2 . 14 . 57, \text{ oder}$$

$$i_3 = \frac{14 (57)^3}{12} + \left(15 + \frac{57}{2}\right)^2 . 14 . 57 = 1726090;$$

endlich ist

$$i_4 = \frac{b_3 h_3^3}{12} + d_4^2 f_4 = \frac{103 (15)^3}{12} + \left(\frac{15}{2}\right)^2 . 103 . 15 = 8980196{,}62.$$

Somit ist

$$J_1 = i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 33314015{,}54.$$

Die Entfernung c des Schwerpunktes des Schienenquerschnittes von der Kante ab findet man nach der Schwerpunktslehre aus der Gleichung:

$$c = \frac{\Sigma (fd)}{\Sigma (f)}, \text{ hierin ist}$$

$$\Sigma (fd) = f_1 d_1 + f_2 d_2 + f_3 d_3 + f_4 d_4 \text{ und}$$

$$\Sigma (f) = f_1 + f_2 + f_3 + f_4.$$

Setzt man in die Gleichung für c die Zahlenwerthe:

$$d_1 = 130 - \frac{23}{2} = 118\,{}^1/_2{}^{mm}, \qquad f_1 = b_1 h_1 = 59 \,.\, 23 = 1357,$$

$$d_2 = 93{,}1^{mm}, \qquad f_2 = \frac{14 + 59}{2} \,.\, 35 = 1277{,}5,$$

$$d_3 = 15 + \frac{57}{2} = 43{,}5 \qquad f_3 = 57 \,.\, 14 = 798,$$

$$d_4 = \frac{15}{2} = 7{,}5, \qquad f_4 = 103 \,.\, 15 = 1545$$

ein, so erhält man:

$$c = \frac{f_1 d_1 + f_2 d_2 + f_3 d_3 + f_4 d_4}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4} = \frac{326040{,}25}{4977{,}5} = 65{,}5^{mm}.$$

Hiernach ist das Trägheitsmoment des Querschnittes, bezogen auf dessen horizontale Schweraxe

$$J = J_1 - c^2 F = 33314015{,}54 - (65{,}5)^2 \,.\, 4977{,}5, \text{ oder}$$

$$J = 11957580,$$

oder auf Centimeter bezogen ist $J = 1195{,}758$.

Der Querschnittsmodul wird:

$$Z = \frac{J}{c} = \frac{1195{,}758}{6{,}55} = 182{,}558 \text{ (auf Centimeter bezogen).}$$

Eine andere Methode, das Trägheitsmoment und den Querschnittsmodul des Querschnittes einer Eisenbahnschiene zu finden, die etwas schneller zum Ziele führt, ist die Anwendung der Simpson'schen Regel. Man zerlegt den ganzen Querschnitt seiner Höhe nach durch zur Grundkante ab parallele Sehnen von den Längen b_0, b_1, b_2, $b_3 \ldots . b_n$ in eine gerade Anzahl Streifen, die von einander den gleichen Abstand a haben, misst diese Sehnen und benützt zur Berechnung des Flächeninhaltes F des Querschnittes, der Entfernung c des Schwerpunktes von der Grundkante ab und des Trägheitsmomentes J_1, bezogen auf die Kante ab die Formeln:

$$F = \frac{a}{3}\left(b_0 + 4\,b_1 + 2\,b_2 + 4\,b_3 + 2\,b_4 + \ldots . + 4\,b_{n-1} + b_n\right),$$

$$c = \frac{a^2}{3\,F}\left[4\,b_1 + 2 \,.\, 2\,b_2 + 4 \,.\, 3\,b_3 + 2 \,.\, 4\,b_4 + \ldots . + 4(n-1)b_{n-1} + nb_n\right],$$

$$J_1 = \frac{a^3}{3}\left[4b_1 + 2.2^2 b_2 + 4.3^2 b_3 + 2.4^2 b_4 + \ldots . + 4(n-1)^2 b_{n-1} + n^2 b_n\right].$$

Um mittelst dieser Formeln möglichst genaue Resultate zu erhalten, wird man die Querschnittsform der Eisenbahnschiene in natürlicher Grösse aufzeichnen und die Anzahl n der Streifen möglichst gross machen. Theilen wir z. B. die ganze Höhe des Querschnittes $h = 130^{mm}$ in zehn gleiche Theile, machen also $n = 10$ und $a = 13$ und messen die elf Sehnen, so erhält man:

$$b_0 = 28^{mm}, \quad b_1 = 59^{mm}, \quad b_2 = 54^{mm}, \quad b_3 = 38^{mm},$$
$$b_4 = 23^{mm}, \quad b_5 = 14^{mm}, \quad b_6 = 14^{mm}, \quad b_7 = 14^{mm},$$
$$b_8 = 21^{mm}, \quad b_9 = 76^{mm}, \quad b_{10} = 103^{mm}.$$

Alle diese Werthe, sowie $n = 10$ und $a = 13$ in die Formeln für F, c und J_1 eingesetzt und letztere Grössen ausgerechnet, so erhält man:

$$F = 50{,}1 \text{ oder abgerundet } F = 50^{cm^2},$$
$$c = 6{,}54^{cm},$$
$$J_1 = 3331{,}3613 \text{ (auf Centimeter bezogen)};$$

darnach ist

$$J = J_1 - c^2 F = 3331{,}3613 - (6{,}54)^2\, 50 = 1195{,}861$$

und der Querschnittsmodul

$$Z = \frac{J}{c} = \frac{1195{,}861}{6{,}54} = 182{,}85,$$

also angenähert dieselben Werthe, wie nach der ersten Methode.

62. Es ist das Trägheitsmoment J und der Querschnittsmodul $Z = \frac{J}{c}$ eines Trapezes mit den beiden Parallelseiten a und b und der Höhe h zu berechnen. (Siehe folgende Figur.)

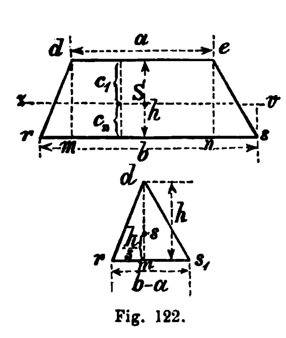


Fig. 122.

Auflösung. Wir ziehen in dem Trapez $rdes$ die beiden auf der Geraden rs senkrechten Geraden dm und en, und denken uns die beiden Dreiecke rdm und ens horizontal aneinander geschoben, so, dass dadurch das Dreieck rds_1 mit der Grundlinie $b - a$ entsteht. Wir setzen:

$$de = a,$$
$$rs = b,$$
$$rs_1 = b - a,$$
$$dm = en = h.$$

Wir bestimmen die Trägheitsmomente i_1 und i_2 des Rechteckes $mden$ und des Dreieckes rds_1, beide bezogen auf die Grundlinie rs,

resp. auf mn und rs_1 und addiren diese Trägheitsmomente; in der Summe derselben erhalten wir das Trägheitsmoment J_1 des Trapezes, bezogen auf die Linie rs, wie folgt:

$$J_1 = i_1 + i_2 = \frac{a h^3}{3} + \frac{1}{12} (b - a) h^3, \text{ oder}$$

$$J_1 = \frac{4 a h^3 + h^3 (b - a)}{12} = \frac{h^3 (4 a + b - a)}{12} = \frac{(3 a + b) h^3}{12}.$$

Die Entfernung c_2 der horizontalen Schwerlinie zv von der unteren Kante rs des Trapezes findet man nach dem Satze der Schwerpunktslehre:

$$c_2 = \frac{\Sigma (f d)}{\Sigma (f)} = \frac{f_1 d_1 + f_2 d_2}{f_1 + f_2}, \text{ hierin ist:}$$

$$f_1 = a h, \qquad d_1 = \frac{h}{2},$$

$$f_2 = (b - a) \frac{h}{2}, \quad d_2 = \frac{h}{3},$$

$$f_1 + f_2 = F = (a + b) \frac{h}{2};$$

diese Werthe eingesetzt, gibt:

$$c_2 = \frac{a h \cdot \frac{h}{2} + \left(b + a\right) \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{3}}{\left(a + b\right) \frac{h}{2}}, \text{ oder}$$

$$c_2 = \frac{3 a h^2 + (b - a) a^2}{6} \cdot \frac{2}{h (a + b)}, \text{ oder}$$

$$c_2 = \frac{h^2 (3 a + b + a)}{3 h (a + b)} = \frac{h (2 a + b)}{3 (a + b)} \text{ und}$$

$$c_1 = h - c_2 = h - \frac{h (2 a + b)}{3 (a + b)} = \frac{3 h (a + b) - h (2 a + b)}{3 (a + b)};$$

reducirt, gibt:

$$c_1 = \frac{h (3 a + 3 b - 2 a - b)}{3 (a + b)} = \frac{h (a + 2 b)}{3 (a + b)},$$

somit wird das Trägheitsmoment des Trapezes, bezogen auf die horizontale Schwerlinie zv:

$$J = J_1 - c_2^2 F = \frac{(3 a + b) h^3}{12} - \frac{h^2 (2 a + b)^2}{9 (a + b)^2} \left(a + b\right) \frac{h}{2},$$

auf gleiche Benennung gebracht:

$$J = \frac{3h^3(3a+b)(a+b) - 2h^3(2a+b)^2}{36(a+b)}, \text{ oder}$$

$$J = \frac{h^3(9a^2 + 3ab + 9ab + 3b^2 - 8a^2 - 8ab - 2b^2)}{36(a+b)}, \text{ oder}$$

$$J = \frac{h^3(a^2 + 4ab + b^2)}{36(a+b)}.$$

Der Querschnittsmodul Z hat hier offenbar wegen der zwei von einander verschiedenen Werthe von c_1 und c_2 auch zwei verschiedene Werthe Z_1 und Z_2; es ist:

$$Z_1 = \frac{J}{c_1} = \frac{h^3(a^2 + 4ab + b^2)}{36(a+b)} : \frac{h(a+2b)}{3(a+b)} = \frac{h^2(a^2 + 4ab + b^2)}{12(a+2b)},$$

$$Z_2 = \frac{J}{c_2} = \frac{h^3(a^2 + 4ab + b^2)}{36(a+b)} : \frac{h(2a+b)}{3(a+b)} = \frac{h^2(a^2 + 4ab + b^2)}{12(2a+b)}.$$

Ist das Material Schmiedeisen, so wird man den kleineren der beiden Werthe von Z, hier also Z_1 in die Gleichung $M = \mathfrak{S} Z$ einsetzen; ist das Material Gusseisen, so hat man zuerst zu untersuchen, ob $\frac{c_1}{c_2} \gtreqless \frac{1}{2}$ ist (siehe Beispiel 37), wobei vorausgetzt wird, dass c_1 die Entfernung des Schwerpunktes S von der stärkst gezogenen und c_2 die Entfernung des Punktes S von der stärkst gedrückten Faserschichte ist.

Für $\frac{c_1}{c_2} > \frac{1}{2}$ wird man $\mathfrak{S}_1 Z_1 = M$, für $\frac{c_1}{c_2} < \frac{1}{2}$, $\mathfrak{S}_2 Z_2 = M$ setzen und für $\frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{2}$, ist $\mathfrak{S}_1 Z_1 = \mathfrak{S}_2 Z_2 = M$, wobei $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ die zulässigen Maximal-Zug- und Druckspannungen bedeuten. Hier ist offenbar $c_1 > c_2$, also $\frac{c_1}{c_2} > 1$, somit auch $\frac{c_1}{c_2} > \frac{1}{2}$, man wird daher $M = \mathfrak{S}_1 Z_1$ setzen. Wäre aber bei der Kante a die äusserste gedrückte und bei der Kante b die äusserste gezogene Faserschichte, so ist $\frac{c_1}{c_2} < 1$, es ist dann aber noch immer, wenn man die Werthe von c_1 und c_2 mit einander verwechselt,

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{h(2a+b)}{3(a+b)} : \frac{h(a+2b)}{3(a+b)} = \frac{2a+b}{a+2b} > \frac{1}{2},$$

man hat daher auch in diesem Falle $M = \mathfrak{S}_1 Z_1$ zu setzen.

63. Zwei mit einander durch Nieten fest verbundene Eisenbahnschienen von à 130^{mm} Höhe und 43^{cm^2} Querschnittsfläche bilden einen Balken, der mit seinen Enden frei auf Stützen aufliegt und in der Mitte der Länge eine Last von 5000^{Kg} trägt. Der Querschnittsmodul und das Trägheitsmoment der Schiene, bezogen auf ihre horizontale Schweraxe, sind: $Z_1 = 140$, $J_1 = 924$ (auf Centimeter bezogen); es ist die Entfernung l der Unterstützungspunkte zu berechnen, damit der Balken die Last mit der nöthigen Sicherheit aushalte.

Auflösung. Die hier anzuwendende Festigkeitsformel ist:

$$\frac{Pl}{4} = \mathfrak{S} Z.$$

Das Trägheitsmoment J des Balkenquerschnittes findet man, wenn man das des einfachen Schienenquerschnittes, bezogen auf die Basiskante der Schiene als Axe, mit 2 multiplicirt. Die Entfernung dieser Kante von der Schweraxe des Schienenquerschnittes ist $c_1 = \frac{J_1}{Z_1} = \frac{924}{140} = 6{,}6^{cm}$, somit das Trägheitsmoment $\frac{J}{2}$ des einfachen Schienenquerschnittes, bezogen auf die Basiskante:

$$\frac{J}{2} = J_1 + c_1^2 F,$$

oder das Trägheitsmoment J des ganzen Balkenquerschnittes, bezogen auf die horizontale Schweraxe desselben:

$$J = 2\,J_1 + 2\,c_1^2\,F = 2\,(J_1 + c_1^2\,F), \text{ oder}$$

$$J = 2\left[924 + (6{,}6)^2 \,.\, 43\right] = 5594{,}16.$$

Die Entfernung c der horizontalen Schweraxe des ganzen Querschnittes von der stärkst gespannten oder gedrückten Faserschichte ist gleich der Höhe einer Schiene $c = 13^{cm}$, daher

$$Z = \frac{J}{c} = \frac{5594{,}16}{13} = 430{,}32.$$

Aus der Gleichung $\frac{Pl}{4} = \mathfrak{S}\,Z$ folgt:

$$l = \frac{4\,\mathfrak{S}\,Z}{P} = \frac{4 \,.\, 600 \,.\, 430{,}32}{5000} = 206{,}55^{cm};$$

würde die Last von 5000^{Kg} auf die ganze Länge des Balkens gleichmässig vertheilt, so könnte letztere doppelt so gross, also $4{,}131^{m}$ gemacht werden.

64. Ein prismatischer Balken, der aus zwei Eisenbahnschienen, einer verticalen Blechwand und vier Winkeleisen gebildet ist (siehe Fig. 123), ruht mit seinen Enden auf zwei Stützen auf;

es ist die Entfernung l der Unterstützungspunkte zu bestimmen, wenn der Balken gleichmässig auf seiner ganzen Länge mit 1600^{Kg} pro laufenden Meter Länge belastet werden soll und die Querschnittsdimensionen die in der Figur angegebenen sind. Das Trägheitsmoment einer Eisenbahnschiene ist $J = 924$, der Querschnittsmodul derselben $Z = 140$ und der Flächeninhalt des Querschnittes ist $F = 43^{cm^2}$.

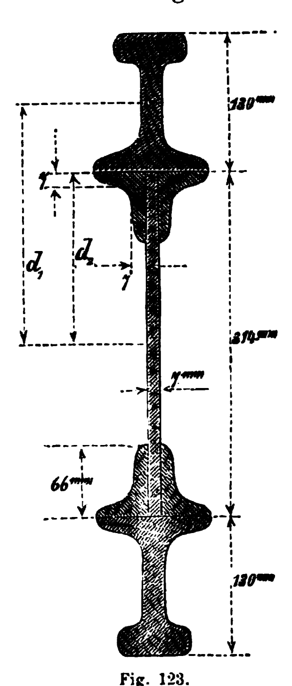


Fig. 123.

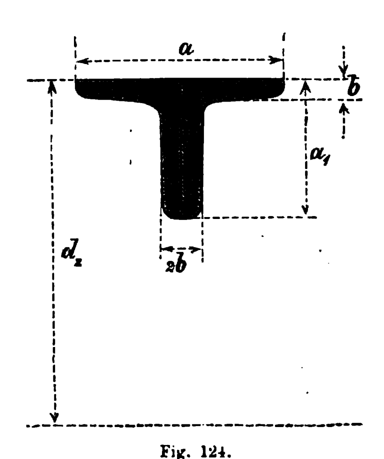


Fig. 124.

Auflösung. Die hier anzuwendende Festigkeitsformel ist: $\frac{1}{8} G l = \mathfrak{S} Z$, wenn G die ganze auf der Länge des Balkens gleichmässig vertheilte Last bedeutet. Bezeichnet q die auf eine Längeneinheit, z. B. Centimeter, entfallende Last, so ist

$$G = q l^{cm}, \text{ daher } \frac{1}{8} q l^2 = \mathfrak{S} Z, \text{ woraus } \underline{l^{cm} = \sqrt{\frac{8 \mathfrak{S} Z}{q}}} \text{ folgt.}$$

Das Trägheitsmoment J des ganzen Querschnittes, bezogen auf die horizontale Schweraxe setzt sich zusammen aus den Trägheitsmomenten $2 i_1$ der beiden Schienen, $2 i_2$ der beiden Paare von Winkeleisen und dem Trägheitsmomente i_3 der verticalen Blechwand, sämmtliche bezogen auf die horizontale Schweraxe des ganzen Querschnittes. Nach der Figur ist:

$$i_1 = i' + d_1^2 f_1 = 924 + (6{,}6 + 15{,}7)^2 . 43 = 22307{,}47,$$

(i' = Trägheitsmoment einer Schiene, bezogen auf ihre horizontale Schweraxe),

$$i_2 = i'' + d_2^2 f_2 \text{ (siehe Fig. 124)},$$

$$i'' = \frac{2 b a_1^3}{3} + \frac{(a - 2b) b^3}{3} = \frac{b}{3}\left[2 a_1^3 + b^2 (a - 2b)\right],$$

oder die Zahlenwerthe eingesetzt:

$$i'' = \frac{0{,}7}{3}\left[2 . (6{,}6)^3 + (0{,}7)^2 (9{,}6 - 2 . 0{,}7)\right] = 135{,}1042,$$

$$d_2 = 15{,}7^{cm},$$

$$f_2 = 2 b a_1 + (a - 2b) b = b (2 a_1 + a - 2b),$$

oder die Zahlenwerthe eingesetzt:

$$f_2 = 0{,}7 (2 . 6{,}6 + 9{,}6 - 2 . 0{,}7) = 14{,}98^{cm^2},$$

hiermit wird

$$i_2 = 135{,}1042 + (15{,}7)^2 . 14{,}98 = 3827{,}5242,$$

$$i_3 = \frac{1}{12} . 0{,}7 (31{,}4)^3 = 1805{,}95,$$

somit ist

$$J = 2 (i_1 + i_2) + i_3 = 2 (22307{,}47 + 3827{,}5242) + 1805{,}95,$$

$$J = 54075{,}9384,$$

$$c = 13 + 15{,}7 = 28{,}7^{cm} \text{ und}$$

$$Z = \frac{J}{c} = \frac{54075{,}9384}{28{,}7} = 1884{,}179;$$

diesen Werth von Z, sowie $\mathfrak{S} = 600$, $q = 16$ (bezogen auf eine Längeneinheit $= 1^{cm}$) in obige Formel für l eingesetzt, gibt:

$$l^{cm} = \sqrt{\frac{8 . 600 . 1884{,}179}{16}} = 751{,}8^{cm} \text{ oder}$$

$$l = 7{,}518^m.$$

65. Ein Wasserreservoir von prismatischer Form ruht auf Holzbalken von à 6^m Länge, 250^{mm} Breite und 315^{mm} Höhe; die Mitten je zweier Balken sind 1^m von einander entfernt; es ist die Höhe der Wassersäule im Reservoir zu berechnen, welche die Balken mit der nöthigen Sicherheit zu tragen vermögen, wenn von dem Gewichte des Reservoirs selbst abgesehen wird und die Länge eines Balkens auch gleich der Länge des Reservoirs ist. (Siehe die folgende Figur.)

Auflösung. Der auf einen Balken entfallende Theil der ganzen Belastung ist offenbar: $P = l^m . B^m . H^m . 1000$, oder die Dimensionen in Millimetern ausgedrückt und die gegebenen Zahlenwerthe eingesetzt:

$$P = \frac{6000 . 1000 . H^{mm} . 1000}{1000000000} = 6\, H^{mm}.$$

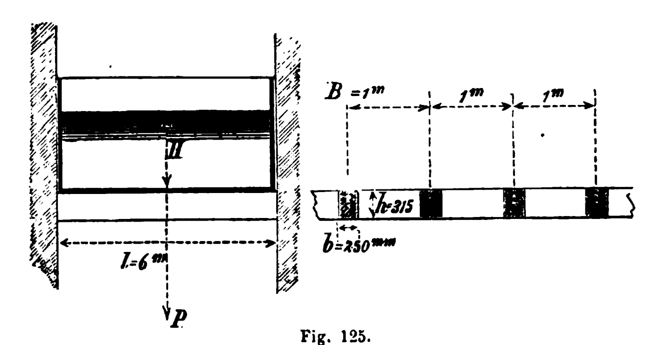


Fig. 125.

Da die Balken als in einem Gebäude befindlich gedacht, an beiden Enden als eingemauert zu betrachten sind, so hat man hier die Festigkeitsformel zu gebrauchen:

$$\frac{Pl}{12} = \mathfrak{S} Z,$$

für P obigen Werth eingesetzt:

$$\frac{6\, Hl}{12} = \mathfrak{S} Z = \mathfrak{S} . \frac{1}{6}\, b h^2,$$

hieraus ist:

$$H = \frac{\mathfrak{S}\, b h^2}{3\, l} = \frac{0{,}6 . 250\, (315)^2}{3 . 6000} = 826{,}875^{mm},$$

die Höhe der Wassersäule im Reservoir soll also 827^{mm} nicht überschreiten.

66. Es ist die Entfernung l der Querschwellen für die Eisenbahnschienen zu berechnen, wenn das Gewicht einer Locomotive mit 30000^{Kg} angenommen wird.

Auflösung. Die Entfernung zweier Schwellen soll so gross sein, dass nur eines der vier Triebräder der Locomotive zwischen den Befestigungspunkten der Schiene zu liegen komme, dass also auch nur ein Viertel des ganzen Locomotivgewichtes die Belastung jenes Schienenstückes ausmacht, das zwischen zwei aufeinander folgenden Schwellen liegt. Die Schienen sind mit Nägeln auf den Schwellen befestigt, so dass jedes zwischen zwei Schwellen liegende

Schienenstück als ein Balken angesehen werden kann, der mit seinen Enden eingeklemmt (eingemauert) ist; daher hat man zur Berechnung der Entfernung l die Festigkeitsformel:

$$\frac{Pl}{8} = \mathfrak{S}\,Z, \text{ woraus } l = \frac{8\,\mathfrak{S}\,Z}{P} \text{ folgt.}$$

Die Zahlenwerthe: $\mathfrak{S} = 600$, $Z = 140$, $P = \frac{30000}{4} = 7500$ eingesetzt, gibt:

$$l = \frac{8\,.\,600\,.\,140}{7500} = 89{,}6^{cm}, \text{ oder abgerundet } l = 90^{cm}.$$

67. Aus einem auf Biegung beanspruchten Cylinder vom Durchmesser $d = 300^{mm}$ soll ein Balken grösster Tragkraft von rechteckigem Querschnitte hergestellt werden; man fragt nach den Dimensionen b und h des Rechteck-Querschnittes.

Auflösung. Das den Balken von rechteckigem Querschnitte biegende Moment ist $M = \frac{1}{6}\,b\,h^2\,\mathfrak{S}$. Soll die Tragkraft ein Maximum werden, so muss der Querschnittsmodul $\frac{b\,h^2}{6}$, oder, da die Grösse $\frac{1}{6}$ unveränderlich ist, nur das Product $b\,h^2$ ein Maximum werden. Da die Diagonale des Rechteckes zusammenfällt mit dem Durchmesser des Kreisquerschnittes (welches Verhältniss die Rechteckseiten auch haben mögen), so folgt daraus $h^2 = d^2 - b^2$, diesen Werth von h^2 in die Gleichung $b\,h^2 =$ Maximum eingesetzt: $b\,(d^2 - b^2) =$ Maximum.

Den ersten Differential-Quotienten dieses Ausdruckes, nach der Variablen b gebildet, gleich Null gesetzt:

$$\frac{\partial\,(b\,d^2 - b^3)}{\partial\,b} = \frac{\partial\,b\,(d^2 - 3\,b^2)}{\partial\,b} = d^2 - 3\,b^2 = 0,$$

hieraus folgt: $d^2 = 3\,b^2$, diese Gleichung in Verbindung mit:

$$d^2 = h^2 + b^2 \text{ gibt: } 3\,b^2 = h^2 + b^2, \text{ oder}$$

$$2\,b^2 = h^2, \text{ oder } \frac{b}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

Zähler und Nenner dieses Bruches mit 5 multiplicirt, gibt:

$$\frac{b}{h} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{50}} \text{ und angenähert: } \underline{\frac{b}{h} = \frac{5}{7}}.$$

Aus den Gleichungen:

$$d^2 = 3\,b^2 \text{ und } d^2 = h^2 + b^2 \text{ folgt: } 3\,h^2 = 2\,d^2 \text{ und}$$

$$h = d\sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}8164\,d = 0{,}8164 \,.\, 300 = 245^{mm},$$

$$b = \frac{h}{\sqrt{2}} = \frac{245}{1{,}4142} = 173{,}2^{mm}, \text{ oder}$$

$$b = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{300}{1{,}7321} = 173{,}2^{mm},$$

setzt man aber $b = \frac{5h}{7}$, so erhält man angenähert:

$$b = \frac{5 \,.\, 245}{7} = 175^{mm}.$$

Würde umgekehrt nach dem Durchmesser d des Cylinders gefragt, aus dem ein Balken grösster Tragkraft von rechteckigem Querschnitte hergestellt werden soll, so sind nach dem gegebenen speciellen Belastungs- und Unterstützungsfall aus der Festigkeitsgleichung $M = \frac{1}{6} b h^2 \mathfrak{S}$ und der Gleichung $\frac{b}{h} = \frac{5}{7}$ die Dimensionen b und h auszurechnen und in die Gleichung $d = \sqrt{h^2 + b^2}$, oder $d = b\sqrt{3}$ einzusetzen.

Aufsuchung der Beziehungen zwischen d, h und b auf elementarem Wege.

Es soll der Ausdruck $b\,(d^2 - b^2)$ ein Maximum sein, dann muss auch das Quadrat des Ausdruckes, nämlich $b^2\,(d^2 - b^2)\,(d^2 - b^2)$, oder auch $2\,b^2\,(d^2 - b^2)\,(d^2 - b^2) =$ Maximum sein; wenn aber das Product der drei Factoren $2\,b^2$, $(d^2 - b^2)$, $(d^2 - b^2)$ ein Maximum sein soll, so müssen diese drei Factoren einander gleich sein, d. h. es muss $d^2 - b^2 = 2\,b^2$, oder $d^2 = 3\,b^2$ sein, wie schon oben gefunden wurde.

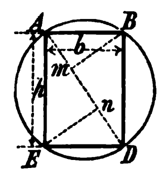


Fig. 126.

Die geometrische Construction des Rechteckes von den Seiten b und h aus dem Kreise vom Durchmesser d ergibt sich wie folgt: In dem rechtwinkligen Dreiecke ABD (siehe nebenstehende Figur) ist AB die mittlere geometrische Proportionale zwischen dem Stücke Am und dem Durchmesser AD, d. h. es findet die Proportion statt:

$$\overline{Am} : \overline{AB} = \overline{AB} \,.\, \overline{AD}; \text{ hieraus ist}$$

$$\overline{Am} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{DA}}, \text{ oder da } AB = b \text{ und } AD = d$$

ist, so hat man auch: $\overline{Am} = \frac{b^2}{d}$, weil aber nach obiger Rechnung $b^2 = \frac{d^2}{3}$ ist, so folgt: $\overline{Am} = \frac{d^2}{3d} = \frac{d}{3}$; für das rechtwinklige Dreieck AED gilt dasselbe, d. h. es ist auch $\overline{Dn} = \frac{d}{3}$; somit geht daraus folgende Construction hervor: Man zieht im Kreise einen beliebigen Durchmesser AD, theilt diesen in drei gleiche Theile, errichtet in den Theilpunkten m und n die senkrechten Geraden mB und nE auf dem Durchmesser AD, diese schneiden den Umfang des Kreises in den Punkten B und E; verbindet man nun die vier Punkte A, B, D und E entsprechend mit einander, so erhält man das gesuchte Rechteck.

68. Aus einem auf Biegung beanspruchten prismatischen Körper, dessen Querschnitt ein beliebiges Dreieck ist, soll ein Balken grösster Tragkraft von rechteckigem Querschnitte hergestellt werden; man fragt nach den Dimensionen b und h des Rechteckes, wenn die Grundlinie g und die Höhe h_1 des Dreieck-Querschnittes gegeben sind.

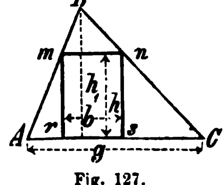


Fig. 127.

Auflösung. In dem Dreiecke ABC (siehe nebenstehende Figur) sei $mnrs$ das gesuchte Rechteck, und zwar so gelegen, dass $mn \parallel AC$ ist, daher folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und mBn die Proportion:

$$mn : AC = (h_1 - h) : h_1, \text{ oder}$$

$$b : g = (h_1 - h) : h_1; \text{ hieraus ist}$$

$$b = \frac{g(h_1 - h)}{h_1}.$$

Soll die Tragkraft ein Maximum sein, so muss auch der Querschnittsmodul $Z = \frac{1}{6} b h^2$, oder da $\frac{1}{6}$ eine constante Grösse ist, bh^2 ein Maximum sein; für b den gefundenen Werth gesetzt:

$$\frac{g(h_1 - h)}{h_1} \cdot h^2 = \text{Maximum},$$

da die Grössen g und h_1 constant sind, so soll nur der Ausdruck $(h_1 - h) h^2 = \text{Maximum}$ sein.

Den ersten Differential-Quotienten dieses Ausdruckes nach der Variablen h gebildet, gleich Null gesetzt, gibt:

$$2h\partial h(h_1 - h) - h^2 \partial h = h\partial h\left[2(h_1 - h) - h\right] = 0, \text{ woraus}$$

$$2h_1 - 2h = h,\ 2h_1 = 3h \text{ und } h = \frac{2h_1}{3}$$

folgt; demgemäss wird die andere Rechteckseite

$$b = \frac{g\left(h_1 - \frac{2h_1}{3}\right)}{h_1} = \frac{g h_1}{3 h_1} = \frac{g}{3};$$

die beiden Rechteckseiten sind also:

$$h = \frac{2}{3} h_1 \text{ und } b = \frac{1}{3} g.$$

Aufsuchung der Beziehungen zwischen h, h_1, b und g auf elementarem Wege.

Soll das Product $(h_1 - h) h^2 =$ Maximum sein, so muss auch der Ausdruck

$$2(h_1 - h) \cdot h \cdot h, \text{ oder } (2h_1 - 2h) h \cdot h = \text{Maximum}$$

sein, dieses ist aber dann der Fall, wenn die drei Factoren $(2h_1 - 2h)$, h, h einander gleich sind, also $h = 2h_1 - 2h$, woraus $h = \frac{2h_1}{3}$ wie oben folgt.

69. Aus einem auf Biegung beanspruchten Cylinder vom Durchmesser d soll ein prismatischer Balken grösster Tragkraft hergestellt werden, dessen Querschnitt ein gleichschenkliges Dreieck von der Grundlinie g und der Höhe h ist.

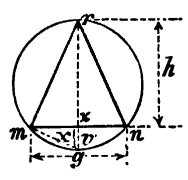


Fig. 128.

Auflösung. Offenbar muss auch hier der Querschnittsmodul des Dreieckes, nämlich

$$Z = \frac{g h^2}{24} = \text{Maximum}$$

sein. Es sei das Dreieck mnr (siehe Fig. 128) das gesuchte Dreieck, so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke vmz und mzr die Proportion:

$$\overline{vz} : \overline{mz} = \overline{mz} : \overline{rz}, \text{ woraus}$$

$$\overline{mz} = \sqrt{\overline{vz} \cdot \overline{rz}}, \text{ oder mit } \overline{vz} = x$$

$$\frac{g}{2} = \sqrt{x(d - x)},$$

somit $g = 2\sqrt{x(d-x)}$ folgt; diesen Werth von g, sowie $h^2 = (d-x)^2$ in die Formel für Z eingesetzt, gibt:

$$\frac{1}{24} \cdot 2\sqrt{x(d-x)} \cdot (d-x)^2 = \text{Maximum, oder}$$

$$\sqrt{x(d-x)}\,(d-x)^2 = \text{Maximum};$$

wird dieser Ausdruck zu einem Maximum, so wird auch das Quadrat desselben, nämlich $x(d-x)(d-x)^4$ zu einem Maximum.

Den ersten Differential-Quotienten dieses Ausdruckes nach der Variablen x gebildet, gleich Null gesetzt, gibt:

$$(d-2x)(d-x)^4 - (dx-x^2)(d-x)^3 \cdot 4 = 0, \text{ oder}$$

$$(d-2x)(d-x)^4 = 4(dx-x^2)(d-x)^3, \text{ woraus}$$

$$(d-2x)(d-x) = 4x(d-x), \text{ oder}$$

$$d-2x = 4x \text{ und } x = \frac{d}{6}$$

folgt; hiermit wird:

$$h = d - x = d - \frac{d}{6} = \frac{5}{6}d \text{ und}$$

$$g = 2\sqrt{x(d-x)} = 2\sqrt{\frac{d}{6}\left(d-\frac{d}{6}\right)} = 2\sqrt{\frac{5d^2}{36}} = \frac{d}{3}\sqrt{5} = 0{,}745\,d,$$

die gefundenen Grössen sind also: die Grundlinie $g = 0{,}745\,d$, und die Höhe des gesuchten Dreieckes $h = \frac{5}{6}d$. Zu demselben Resultate gelangt man aber auch ohne Anwendung des höheren Calcüls, wie folgt: Soll der Ausdruck $x(d-x)^5$ zu einem Maximum werden, so wird unter denselben Bedingungen offenbar auch der Ausdruck $5x(d-x)^5 = \text{Maximum}$ werden, oder

$$5x(d-x)(d-x)(d-x)(d-x)(d-x) = \text{Maximum}.$$

Dieser Ausdruck wird aber zu einem Maximum, wenn die Factoren desselben unter einander gleich werden, d. h. wenn $5x = d - x$ wird, dies gibt: $x = \frac{d}{6}$, wie bereits oben gefunden wurde.

70. Ein stabförmiger Körper aus Gusseisen, dessen Querschnitte Rechtecke von variablen Höhen und constanten Breiten sind, ist mit dem einen (dickeren) Ende in horizontaler Lage eingemauert und am anderen Ende durch eine Last P auf Biegung beansprucht. Die Abmessungen des Querschnittes an der Befestigungsstelle seien: $b = 100^{mm}$, $h = 200^{mm}$, an dem freien Ende des Stabes ist $h_1 = 100^{mm}$, $b = 100^{mm}$; die Länge l des Stabes ist $l = 2000^{mm}$; man fragt: 1) Wo ist der gefährliche Querschnitt? 2) Wie gross ist die Tragfähigkeit dieses Balkens?

Auflösung. Angenommen, es sei in der Entfernung z vom freien Ende des Körpers (siehe nebenstehende Figur) der gefährliche Querschnitt von der Höhe x; so ist für diesen Punkt das Biegungsmoment: $Pz = \frac{1}{6} \mathfrak{S} b x^2$; im Allgemeinen werden die Lasten P_1, P_2, $P_3 \ldots$, die in den aufeinander folgenden Querschnitten von den Höhen x_1, x_2, $x_3 \ldots$ in den Entfernungen z_1, z_2, $z_3 \ldots$ vom freien Ende ein Abbrechen hervorbringen könnten, verschieden gross sein, der kleinste der Werthe P_1, P_2, $P_3 \ldots$ muss dem gefährlichen Querschnitte entsprechen, so dass man fragen kann, für welchen Werth von z wird P zu einem Minimum? Da $\frac{\mathfrak{S} b}{b}$ constant ist, so braucht nur der Ausdruck $\frac{x^2}{z}$ zu einem Minimum zu werden. Aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke sac und smn folgt:

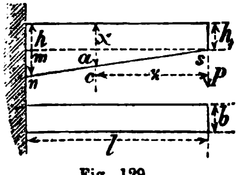


Fig. 129.

$$\overline{ac} : \overline{mn} = z : l, \text{ oder } (x - h_1) : (h - h_1) = z : l, \text{ woraus}$$

$$x - h_1 = \frac{(h - h_1) z}{l} \text{ und } x = \frac{(h - h_1) z + h_1 l}{l}$$

folgt; diesen Werth von x in den Ausdruck $\frac{x^2}{z}$ anstatt x eingesetzt, gibt $\frac{\left[(h - h_1) z + h_1 l\right]^2}{l^2 z}$, da aber l^2 im Nenner dieses Bruches eine constante Grösse ist, so braucht nur der Ausdruck

$$\frac{\left[(h - h_1) z + h_1 l\right]^2}{z} = \text{Minimum}$$

zu werden. Den ersten Differential-Quotienten dieses Ausdruckes nach der Variablen z gebildet, gleich Null gesetzt, gibt:

$$\frac{2\left[(h - h_1) z + h_1 l\right](h - h_1) z - \left[(h - h_1) z + h_1 l\right]^2}{z^2} = 0$$

oder die Gleichung mit z^2 multiplicirt und im linken Theile $(h - h_1) z + h_1 l$ herausgehoben:

$$\left[(h - h_1) z + h_1 l\right]\left[(h - h_1) 2 z - (h - h_1) z - h_1 l\right] = 0, \text{ oder}$$

$$\left[(h - h_1) z + h_1 l\right]\left[(h - h_1) z - h_1 l\right] = 0, \text{ woraus}$$

$$(h - h_1) z - h_1 l = 0 \text{ und } z = \frac{h_1 l}{h - h_1}$$

folgt; für diesen Werth von z wird also P zu einem Minimum; in die Gleichung für x den für z gefundenen Werth eingesetzt:

$$x = \frac{(h - h_1)\dfrac{h_1 l}{h - h_1} + h_1 l}{l} = \frac{h_1 l + h_1 l}{l} = 2 h_1,$$

die Werthe von x und z in die Gleichung für P eingeführt:

$$P = \frac{b \cdot 4 h_1^2 \mathfrak{S} (h - h_1)}{6 h_1 l} = \frac{2}{3} \cdot \frac{b h_1 \mathfrak{S} (h - h_1)}{l},$$

die gegebenen Zahlenwerthe eingesetzt:

$$P = \frac{2}{3} \cdot \frac{100 \cdot 100 \cdot 2{,}5 \cdot 100}{2000} = 833\,{}^1\!/_3{}^{Kg}.$$

Für den Fall, dass der gefährliche Querschnitt an der Einmauerungsstelle ist, muss $z = l$ werden, in der Gleichung „$z = \frac{h_1 l}{h - h_1}$" $z = l$ gesetzt: $l = \frac{h_1 l}{h - h_1}$, woraus $h_1 = \frac{h}{2}$ folgt; findet also diese letzte Gleichung statt, so liegt der gefährliche Querschnitt an der Einmauerungsstelle, im vorliegenden Beispiele ist dies der Fall, denn setzt man in die Gleichung für z die Zahlenwerthe ein, so erhält man: $z = \frac{100 \cdot 2000}{100} = 2000^{mm} = l$; setzt man endlich in die Gleichung für P, $h_1 = \frac{h}{2}$ ein, so erhält man: $P = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{6 l}$, also denselben Werth von P, wie für einen prismatischen Körper; in die letzte Gleichung für P die gegebenen Zahlenwerthe eingesetzt, erhält man selbstverständlich wie oben: $P = 833\,{}^1\!/_3{}^{Kg}$.

Aufsuchung des Werthes von z auf elementarem Wege.

Wir fanden oben:

$$\frac{\left[(h - h_1) z + h_1 l\right]^2}{z} = \text{Minimum};$$

die im Zähler des linken Theiles angezeigte Operation verrichtet:

$$\frac{(h - h_1)^2 z^2 + 2 h_1 l z (h - h_1) + h_1^2 l^2}{z} = \text{Minimum, oder}$$

$$(h - h_1)^2 z + 2 h_1 l (h - h_1) + \frac{h_1^2 l^2}{z} = \text{Minimum},$$

da das mittlere Glied eine constante Grösse ist, so folgt:

$$(h - h_1)^2 z + \frac{h_1^2 l^2}{z} = \text{Minimum},$$

die Summe der beiden Glieder des linken Theiles wird dann ein Minimum, wenn die Summanden einander gleich sind, d. h. wenn

$$(h - h_1)^2 z = \frac{h_1^2 l^2}{z} \text{ wird, woraus } (h - h_1)^2 z^2 = h_1^2 l^2$$

und beiderseits die Quadratwurzel gezogen:

$$(h - h_1) z = h_1 l \text{ und } z = \frac{h_1 l}{h - h_1}$$

wie oben, folgt.

71. Dieselbe Aufgabe wie in voriger Nummer, jedoch mit dem Unterschiede, dass die Querschnitte an allen Stellen der Länge des Balkens eine constante Höhe h, aber eine veränderliche Breite, an der Einmauerungsstelle b, am freien Felde b_1 haben (siehe nebenstehende Figur).

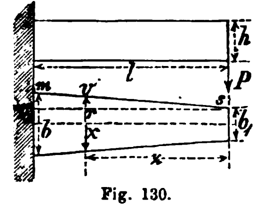


Fig. 130.

Auflösung. Die Abmessungen des gefährlichen Querschnittes in der Entfernung z vom freien Ende seien h und x, das Biegungsmoment für den gefährlichen Querschnitt ist: $Pz = \frac{\mathfrak{S}}{6} x h^2$; da in dieser Gleichung die zwei Variablen z und x vorkommen, so drücken wir x durch z und constante Grössen, ähnlich wie im vorigen Beispiele, aus. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke smn und svr folgt:

$$\overline{rv} : \overline{mn} = z : l, \text{ oder } \overline{rv} = y \text{ und } \overline{mn} = \frac{b - b_1}{2} \text{ gesetzt,}$$

$$y : \left(\frac{b - b_1}{2}\right) = z : l, \text{ woraus}$$

$$y = \frac{(b - b_1) z}{2 l} \text{ und hiermit } x = b_1 + 2 y = b_1 + \frac{2 z (b - b_1)}{2 l}, \text{ oder}$$

$$x = \frac{b_1 l + (b - b_1) z}{l}$$

folgt; diesen Werth von x in die Gleichung „$P = \frac{\mathfrak{S} x h^2}{6 z} = \text{Minimum}$“, oder, da $\frac{\mathfrak{S} h^2}{6}$ eine constante Grösse ist, $\frac{x}{z} = \text{Minimum}$ eingesetzt:

$$\frac{b_1 l + (b - b_1) z}{z} = \text{Minimum};$$

da auch l constant ist, so hat man:

$$\frac{b_1 l + (b - b_1) z}{z} = \text{Minimum, oder } \frac{b_1 l}{z} + b - b_1 = \text{Minimum,}$$

da $b - b_1$ constant ist, so folgt: $\frac{b_1 l}{z} = \text{Minimum}$; dieser Ausdruck wird offenbar in Rücksicht auf die veränderliche Grösse z ein Minimum, wenn z seinen grössten Werth erreicht, d. h. wenn $z = l$ wird, der gefährliche Querschnitt ist also an der Befestigungsstelle, den Werth von $z = l$ in die Gleichung für x eingesetzt:

$$x = \frac{b_1 l + (b - b_1) l}{l} = b;$$

hiermit wird

$$P = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{6 z} = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{6 l},$$

also wie beim prismatischen Körper. Wäre die Breite b_1 am freien Ende des Balkens $= 0$, so hätte man dann, in der Gleichung „$x = \frac{b_1 l + (b - b_1) z}{l}$“, $b_1 = 0$ gesetzt: $x = \frac{b z}{l}$; diesen Werth von x in die Gleichung „$P = \frac{\mathfrak{S} x h^2}{6 z}$“ eingesetzt:

$$P = \frac{\mathfrak{S} b z}{6 l} \cdot \frac{h^2}{z} = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{6 l}, \text{ woraus } \mathfrak{S} = \frac{6 P l}{b h^2}$$

folgt; da der rechte Theil dieser Gleichung nur constante Grössen enthält, also von der Veränderlichen z unabhängig ist, so folgt daraus, dass die Faserspannung $\mathfrak{S}$ an allen Querschnitten dieselbe ist, d. h. alle Querschnitte sind gefährliche oder mit anderen Worten: Der Körper hat in diesem Falle (wenn der Grundriss ein Dreieck ist) die Form der gleichen Festigkeit.

72. Dieselbe Aufgabe, wie in Nummer 70, jedoch mit dem Unterschiede, dass alle Querschnitte des Balkens ähnliche Rechtecke sind. Die Abmessungen der Querschnitte an der Befestigungsstelle und am freien Ende sind:

$$b = 180^{mm}, \quad h = 360^{mm},$$

$$b_1 = 120^{mm}, \quad h_1 = 240^{mm}.$$

Auflösung. Die Dimensionen des gefährlichen Querschnittes seien x und y, darnach ist für letzteren das Biegungsmoment in der Entfernung z vom freien Ende: $P z = \frac{\mathfrak{S} x y^2}{6}$, den Werth von x durch z und andere constante Grössen ausgedrückt, findet man

ebenso wie im vorigen Beispiele $x = \frac{b_1 l + (b - b_1) z}{l}$; aus der Aehnlichkeit der Rechtecke folgt:

$$y : x = h : b, \text{ woraus } y = \frac{x h}{b},$$

und für x den Werth gesetzt:

$$y = \frac{b_1 l + (b - b_1) z}{l} \cdot \frac{h}{b}$$

folgt; die Werthe von x und y in die Gleichung „$P = \frac{\mathfrak{S} x y^2}{6 z}$" eingesetzt:

$$P = \frac{\left[b_1 l + (b - b_1) z\right]^3}{z} \cdot \frac{\mathfrak{S} h^2}{6 b^2 l^3} = \text{Minimum},$$

oder, da $\frac{\mathfrak{S} h^2}{6 b^2 l^3}$ constant ist,

$$\frac{\left[b_1 l + (b - b_1) z\right]^3}{z} = \text{Minimum}.$$

Den ersten Differential-Quotienten dieses Ausdruckes, nach der Veränderlichen z gebildet, gleich Null gesetzt:

$$\frac{3\left[(b - b_1) z + b_1 l\right]^2 (b - b_1) z - \left[(b - b_1) z + b_1 l\right]^3}{z^2} = 0$$

oder mit z^2 beiderseits multiplicirt und durch $\left[(b - b_1) z + b_1 l\right]^2$ beiderseits dividirt:

$$3 (b - b_1) z = (b - b_1) z + b_1 l, \text{ woraus}$$

$$2 (b - b_1) z = b_1 l \text{ und } z = \frac{b_1 l}{2 (b - b_1)}$$

folgt; für diesen Werth von z wird P ein Minimum, in die Gleichungen für x und y den Werth von z eingesetzt:

$$x = \frac{b_1 l + (b - b_1) \frac{b_1 l}{2 (b - b_1)}}{l} = \frac{b_1 l + \frac{b_1 l}{2}}{l} = \frac{3 b_1}{2},$$

$$y = \frac{h x}{b} = \frac{h}{b} \cdot \frac{3 b_1}{2} = \frac{3 h b_1}{2 b},$$

die Werthe von x und y in die Gleichung für P eingesetzt:

$$P = \frac{\frac{\mathfrak{S}}{6} \cdot \frac{3 b_1}{2} \cdot \frac{9 h^2 b_1^2}{4 b^2}}{\frac{b_1 l}{2(b - b_1)}} = \frac{\frac{27 \mathfrak{S} b_1^3 h^2}{48 b^2}}{\frac{b_1 l}{2(b - b_1)}} = \frac{9 \mathfrak{S} b_1^2 h^2 (b - b_1)}{8 b^2 l};$$

soll der gefährliche Querschnitt an der Einmauerungsstelle sein, so geht z in l über, man hat dann: $l = \frac{b_1 l}{2(b - b_1)}$, oder $b_1 = 2(b - b_1)$, woraus $b_1 = \frac{2b}{3}$ folgt; für diesen Werth von b_1 erhält man für P:

$$P = \frac{9 \mathfrak{S}}{8} \cdot \frac{4 b^2}{9} \cdot \frac{h^2 \left(b - \frac{2b}{3}\right)}{b^2 l} = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{6 l},$$

also wie beim prismatischen Balken; im vorliegenden Zahlenbeispiele ist zufällig $b_1 = \frac{2b}{3}$, daher $z = l$, der gefährliche Querschnitt also an der Befestigungsstelle; setzt man in der Gleichung für z die Zahlenwerthe ein, so erhält man auch:

$$z = \frac{b_1 l}{2(b - b_1)} = \frac{120 \cdot 2000}{2(180 - 120)} = 2000^{mm};$$

die Tragkraft P wird

$$P = \frac{2{,}5 \cdot 180 \cdot (360)^2}{6 \cdot 2000} = 4860^{Kg}$$

$$\underline{P = 4860^{Kg}.}$$

73. Ein stabförmiger Körper von der Länge l liegt mit seinen beiden Enden frei auf zwei Unterstützungen auf und ist in der Entfernung a von dem einen Ende durch eine Last P auf Biegung beansprucht; der Querschnitt des Körpers sei an allen Stellen seiner Länge ein Rechteck von constanter Breite b und veränderlicher Höhe, an den Unterstützungspunkten seien die Abmessungen der Querschnitte b, h, b_1 und h_1, man fragt 1) wo ist der gefährliche Querschnitt, 2) wie gross ist die Tragkraft des Balkens? (Siehe nebenstehende Figur.)

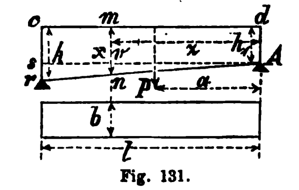


Fig. 131.

Auflösung. Für den gefährlichen Querschnitt von der Höhe x und der Breite b in der Entfernung z von dem Ende A ist das Biegungsmoment nach der Lehre von der Biegungsfestigkeit

$$\frac{P(l - a)}{l} \cdot z = \frac{\mathfrak{S} b x^2}{6}, \text{ wobei } \frac{P(l - a)}{l}$$

den Auflagerdruck in A bedeutet. Bilden die Endpunkte der veränderlichen Höhen eine gerade Linie und man zieht durch A die Gerade $As \parallel cd$, so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke Ars und Avn: $\overline{vn} : \overline{rs} = z : l$, woraus $\overline{vn} = \frac{\overline{rs} \cdot z}{l}$ und wegen $\overline{rs} = h - h_1$, $\overline{vn} = \frac{(h - h_1) z}{l}$, somit

$$x = \overline{mn} = h_1 + \overline{vn} = h_1 + \frac{(h - h_1) z}{l} = \frac{h_1 l + (h - h_1) z}{l}$$

folgt; diesen Werth von x in den aus obiger Momentengleichung gezogenen Werth von P eingesetzt:

$$P = \frac{\mathfrak{S} b x^2 l}{6 z (l - a)} = \frac{\mathfrak{S} b l}{6 z (l - a)} \cdot \left[\frac{h_1 l + (h - h_1) z}{l}\right]^2,$$

dieser Ausdruck wird zu einem Minimum, wenn

$$\left[\frac{(h - h_1) z + h_1 l}{z}\right]^2 = \text{Minimum}$$

wird; in Beispiel 70 fanden wir, dass dieser Ausdruck ein Minimum wird, für $z = \frac{h_1 l}{h - h_1}$, hiermit wird

$$x = \frac{h_1 l + (h - h_1) \frac{h_1 l}{h - h_1}}{l}, \text{ oder } x = \frac{h_1 l + h_1 l}{l} = 2 h_1,$$

die Werthe von x und z in die Gleichung für P eingesetzt:

$$P = \frac{\mathfrak{S} b \cdot (2 h_1)^2 l}{6 \cdot \frac{h_1 l}{h - h_1} (l - a)} = \frac{2 \mathfrak{S} b h_1 (h - h_1)}{3 (l - a)};$$

nehmen wir beispielsweise die Zahlenwerthe an:

$$b = 100^{mm},\ h = 200^{mm},\ h_1 = 60^{mm},\ l = 2000^{mm},\ a = 500^{mm}$$

und das Material aus Gusseisen, so ist:

$$P = \frac{2 \cdot 2{,}5 \cdot 100 \cdot 60 (200 - 60)}{3 (2000 - 500)} = 933\tfrac{1}{3}^{Kg};$$

der gefährliche Querschnitt ist von dem Punkte A entfernt um:

$$z = \frac{h_1 l}{h - h_1} = \frac{60 \cdot 2000}{200 - 60} = 857\tfrac{1}{7}^{mm};$$

soll der gefährliche Querschnitt im Angriffspunkte der Last sein, so muss z in a übergehen, dann ist $a = \frac{h_1 l}{h - h_1}$, woraus

$$a(h - h_1) = h_1 l, \text{ oder } a h = h_1 (l + a) \text{ und } \frac{h}{h_1} = \frac{l + a}{a}$$

folgt; haben also die in der Aufgabe gegebenen Daten solche Grössen, dass die letzte Gleichung stattfindet, dann wird der Bruch bei vermehrter Belastung im Angriffspunkte der Last erfolgen; im vorliegenden Zahlenbeispiele ist dies aber nicht der Fall, da

$$\frac{l + a}{a} = \frac{2000 + 500}{500} = 5 \text{ und } \frac{h}{h_1} = \frac{200}{60} = 3\,^1/_3 \text{ ist.}$$

74. Dieselbe Aufgabe, wie in voriger Nummer, jedoch mit dem Unterschiede, dass die Breite des Körpers variabel und die Höhe aller Querschnitte constant sei.

Fig. 132.

Auflösung. Der gefährliche Querschnitt hat die Dimensionen x und h und befinde sich in der Entfernung z vom Endpunkte A. (Siehe Fig. 132.) Für die Bruchstelle hat man das Biegungsmoment:

$$\frac{P(l - a)}{l} \cdot z = \frac{\mathfrak{S} x h^2}{6};$$

denkt man sich die Endpunkte der veränderlichen Breiten durch eine gerade Linie verbunden, so hat man aus der Aehnlichkeit der Dreiecke rst und rmn die Proportion:

$$\overline{mn} : \overline{st} = z : l, \text{ oder } \overline{mn} : (b - b_1) = z : l, \text{ woraus}$$

$$\overline{mn} = \frac{(b - b_1) z}{l} \text{ und}$$

$$x = b_1 + \overline{mn} = b_1 + \frac{(b - b_1) z}{l} = \frac{b_1 l + (b - b_1) z}{l}$$

folgt. Diesen Werth von x in die Gleichung „$P = \frac{\mathfrak{S} x h^2 l}{6 z (l - a)}$“ eingesetzt, gibt:

$$P = \frac{\mathfrak{S} h^2 l \left[b_1 l + (b - b_1) z\right]}{6 z (l - a) l} = \frac{\mathfrak{S} h^2}{6 (l - a)} \cdot \frac{b_1 l + (b - b_1) z}{z};$$

dieser Ausdruck wird ein Minimum, oder, was dieselbe Bedeutung hat, der Werth der Spannung $\mathfrak{S}$ aus dieser Gleichung wird ein Maximum, wenn der Ausdruck

$$\frac{(b-b_1)z+b_1 l}{z}=b-b_1+\frac{b_1 l}{z}=\text{Minimum}$$

wird; da $b-b_1$ constant ist, so braucht nur $\frac{b_1 l}{z}$ ein Minimum zu werden; dies geschieht, wenn der Nenner z seinen grössten Werth erreicht, d. h. $z=a$ wird, den Werth $z=a$ in die Gleichung für P eingesetzt:

$$P=\frac{\mathfrak{S}h^2}{6(l-a)}\cdot\frac{b_1 l+(b-b_1)a}{a},$$

der gefährliche Querschnitt ist also im Angriffspunkte der Last, die Zahlenwerthe: $h=200^{mm}$, $l=2000^{mm}$, $b=100^{mm}$, $b_1=60^{mm}$, $\mathfrak{S}=2{,}5$, und $a=500^{mm}$ in die letzte Gleichung für P eingesetzt, gibt:

$$\underline{P=3111\,{}^1/_9{}^{Kg}.}$$

Setzt man in der Gleichung für P, $b=b_1$, so erhält man selbstverständlich in P den Werth der für den prismatischen Körper im vorliegenden Belastungs- und Unterstützungsfalle geltenden Tragkraft, nämlich:

$$P=\frac{\mathfrak{S}h^2}{6(l-a)}\cdot\frac{bl}{a};$$

setzt man hingegen in obiger Gleichung für P, $a=\frac{l}{2}$, so erhält man:

$$P=\frac{\mathfrak{S}h^2}{6\cdot\frac{l}{2}}\cdot\frac{b_1 l+(b-b_1)\frac{l}{2}}{\frac{l}{2}}=\frac{\mathfrak{S}h^2}{3l}\cdot\frac{(2b_1+b-b_1)l}{l}=\frac{\mathfrak{S}h^2}{3l}(b+b_1),$$

oder $P=\frac{2\mathfrak{S}h^2}{3l}\cdot\frac{(b+b_1)}{2}$, es ist aber $\frac{b+b_1}{2}$ das arithmetische Mittel der Breiten an den Enden des Balkens und kann letzteres als die Breite β eines prismatischen Balkens von rechteckigem Querschnitte angesehen werden, dementsprechend man auch erhält:

$$P=\frac{2\mathfrak{S}h^2\beta}{3l}=\frac{4\mathfrak{S}h^2\beta}{6l},$$

woraus die für den prismatischen Körper geltende Formel

$$\text{„}\frac{Pl}{4}=\frac{\mathfrak{S}h^2\beta}{6}\text{“}$$

hervorgeht; d. h. also wenn die Last P in der Mitte der Länge des Balkens angreift, so ist die Tragkraft ebenso gross, wie beim

prismatischen Körper von rechteckigem Querschnitte, dessen Höhe h und dessen Breite $\beta = \frac{b + b_1}{2}$ ist.

75. Ein stabförmiger Körper von der Länge l sei in horizontaler Lage mit einem Ende eingemauert und auf seiner ganzen Länge gleichförmig belastet; der Querschnitt sei an allen Stellen der Länge ein Rechteck von constanter Breite b und variabler Höhe, die Endpunkte der veränderlichen Höhen mit einander verbunden, geben eine gerade Linie, die Abmessungen des Querschnittes an der Einmauerungsstelle seien h und b, am freien Ende h_1 und b; man fragt: 1) Wo ist der gefährliche Querschnitt, 2) wie gross ist die Tragkraft des Balkens? (Siehe nebenstehende Fig.)

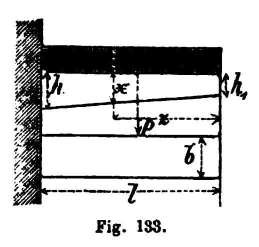


Fig. 133.

Auflösung. Angenommen, der gefährliche Querschnitt liege in der Entfernung z vom freien Ende und habe die Abmessungen b und x, für diese angenommene Bruchstelle hat man nach der Lehre von der Biegungsfestigkeit die Gleichung: $\frac{q z^2}{2} = \frac{\mathfrak{S} b x^2}{6}$, wenn q die auf eine Längeneinheit entfallende Last bedeutet; nach früheren Entwicklungen ist $x = \frac{(h - h_1) z + h_1 l}{l}$, hiermit wird

$$\frac{q z^2}{2} = \frac{\mathfrak{S} b}{6} \left[\frac{(h - h_1) z + h_1 l}{l} \right]^2, \text{ oder}$$

$$q = \frac{2 \mathfrak{S} b \left[(h - h_1) z + h_1 l \right]^2}{6 z^2 l^2},$$

dieser Ausdruck muss für einen gewissen Werth von z zu einem Minimum werden, da aber $\frac{2 \mathfrak{S} b}{6 l^2}$ constant ist, so braucht nur

$$\left[\frac{(h - h_1) z + h_1 l}{z} \right]^2 = \text{Minimum}$$

zu werden, oder

$$\frac{(h - h_1) z + h_1 l}{z} = \text{Minimum, oder}$$

$$h - h_1 + \frac{h_1 l}{z} = \text{Minimum, somit } \frac{h_1 l}{z} = \text{Minimum},$$

dieses geschieht, wenn $z = l$ wird, d. h. der gefährliche Querschnitt liegt an der Einmauerungsstelle; demgemäss erhält man auch, wenn man diesen Werth von z in die Gleichung für x einsetzt:

$$x = \frac{(h - h_1)\,l + h_1\,l}{l} = h, \text{ hiermit wird:}$$

$$q = \frac{2\,\mathfrak{S}\,b\left[(h - h_1) + h_1\,l\right]^2}{6\,l^4} = \frac{\mathfrak{S}\,b\,h^2}{3\,l^2} \text{ und}$$

$$P = q\,l = \frac{\mathfrak{S}\,b\,h^2\,l}{3\,l^2} = \frac{\mathfrak{S}\,b\,h^2}{3\,l},$$

wie beim prismatischen Körper.

76. Dieselbe Aufgabe, wie in voriger Nummer, jedoch mit dem Unterschiede, dass die Höhe des Balkens constant $= h$ und die Breite b veränderlich sei.

Auflösung. Für die Bruchstelle ist $\frac{q\,z^2}{2} = \frac{\mathfrak{S}\,x\,h^2}{6}$; wenn die Endpunkte der veränderlichen Breiten mit einander verbunden, eine gerade Linie bilden, dann ist nach früheren Entwicklungen:

$$x = \frac{(b - b_1)\,z + b_1\,l}{l}, \text{ hiermit wird}$$

$$\frac{q\,z^2}{2} = \frac{\mathfrak{S}\,h^2}{6}\left[\frac{(b - b_1)\,z + b_1\,l}{l}\right] \text{ und } q = \frac{2\,\mathfrak{S}\,h^2\left[(b - b_1)\,z + b_1 l\right]}{6\,l\,z^2},$$

dieser Ausdruck wird ein Minimum, wenn

$$\frac{(b - b_1)\,z + b_1\,l}{z^2} = \frac{b - b_1}{z} + \frac{b_1\,l}{z^2} = \text{Minimum}$$

wird, dieses ist der Fall, wenn z seinen grössten Werth erreicht, d. h. $z = l$ wird, der gefährliche Querschnitt liegt also an der Einmauerungsstelle; man erhält für $z = l$:

$$x = \frac{(b - b_1)\,l + b_1\,l}{l} = b \text{ und}$$

$$q = \frac{\mathfrak{S}\,h^2\left[(b - b_1)\,l + b_1\,l\right]}{3\,l^3} = \frac{\mathfrak{S}\,h^2 b}{3\,l^2}, \text{ somit}$$

$$P = q\,l = \frac{\mathfrak{S}\,h^2 b}{3\,l},$$

also wie beim prismatischen Körper.

77. Dieselbe Aufgabe, wie in voriger Nummer, jedoch mit dem Unterschiede, dass die Querschnitte des Balkens sämmtlich ähnliche Rechtecke sind von den Abmessungen b und h an der Einmauerungsstelle, b_1 und h_1 am freien Ende, es sind also alle Breiten und Höhen der Querschnitte veränderlich.

Auflösung. Angenommen, die Verbindungslinien der Endpunkte der veränderlichen Höhen und Breiten sind gerade Linien, so hat man nach der in Nr. 72 gemachten Entwicklung, wenn x die Breite und y die Höhe des gefährlichen Querschnittes in der Entfernung z vom freien Ende ist:

$$x = \frac{b_1 l + (b - b_1) z}{l},$$

$$y = \frac{x h}{b} = \frac{b_1 l + (b - b_1) z}{l} \cdot \frac{h}{b},$$

diese Werthe für x und y in die für die Bruchstelle geltende Gleichung „$\frac{q z^2}{2} = \frac{\mathfrak{S} x y^2}{6}$“ eingesetzt:

$$\frac{q z^2}{2} = \frac{\mathfrak{S} h^2}{6 b^2} \left[\frac{b_1 l + (b - b_1) z}{l}\right]^3, \text{ oder}$$

$$q = \frac{\mathfrak{S} h^2}{3 b^2 l^3} \frac{\left[b_1 l + (b - b_1) z\right]^3}{z^2},$$

dieser Ausdruck wird zu einem Minimum, wenn

$$\frac{\left[b_1 l + (b - b_1) z\right]^3}{z^2} = \text{Minimum}$$

wird; den ersten Differential-Quotienten dieses Ausdruckes nach der Variablen z gebildet, gleich Null gesetzt:

$$\frac{3 \left[b_1 l + (b - b_1) z\right]^2 (b - b_1) z^2 - \left[b_1 l + (b - b_1) z\right]^3 . 2 z}{z^4} = 0,$$

oder beiderseits mit z^4 multiplicirt und durch $\left[b_1 l + (b - b_1) z\right]^2 z$ dividirt:

$$3 (b - b_1) z = 2 \left[b_1 l + (b - b_1) z\right],$$

diese Gleichung nach z aufgelöst:

$$z (b - b_1) \left(\frac{3}{2} - 1\right) = b_1 l, \text{ woraus}$$

$$z = \frac{2 b_1 l}{b - b_1} \text{ und hiermit}$$

$$q = \frac{\mathfrak{S} h^2}{3 b^2 l^3} \frac{\left[b_1 l + (b - b_1) \frac{2 b_1 l}{b - b_1}\right]^3}{\left(\frac{2 b_1 l}{b - b_1}\right)^2} = \frac{\mathfrak{S} h^2 . 27 b_1^3 l^3 (b - b_1)^2}{3 b^2 l^3 . 4 b_1^2 l^2},$$

oder

$$q = \frac{9 \mathfrak{S} h^2 b_1 (b - b_1)^2}{4 b^2 l^2} = \left[\frac{3 h (b - b_1)}{2 b l}\right]^2 \mathfrak{S} b_1$$

folgt; man erhält mit diesem Werthe von q:

$$P = q l = \left[\frac{3 h (b - b_1)}{2 b}\right]^2 \frac{b_1 \mathfrak{S}}{l};$$

es seien die Zahlenwerthe: $l = 2000^{mm}$, $b = 180^{mm}$, $b_1 = 50^{mm}$, $\mathfrak{S} = 2{,}5^{Kg}$, $h = 360^{mm}$, $h_1 = 100^{mm}$ gegeben, so findet man

$$P = \left[\frac{3 \,.\, 360\,(180 - 50)}{2 \,.\, 180}\right]^2 \frac{50 \,.\, 2{,}5}{2000} = 9506{,}25^{Kg};$$

der gefährliche Querschnitt ist um das Stück

$$z = \frac{2 b_1 l}{b - b_1} = \frac{2 \,.\, 50 \,.\, 2000}{180 - 50} = 1538\,{}^6/_{13}{}^{mm}$$

vom freien Ende entfernt; für den Fall, dass z in l übergeht, erhält man $l = \frac{2 b_1 l}{b - b_1}$, woraus $b - b_1 = 2 b_1$ und $b = 3 b_1$ folgt; wäre z. B. $b_1 = 60$, $b = 180$, also das Verhältniss $\frac{b}{b_1} = 3$ in der Aufgabe eingehalten, so hätte man: $z = l = 2000^{mm}$, $x = b$, $y = h$ und

$$P = \left[\frac{3 h \left(b - \frac{b}{3}\right)}{2 b}\right]^2 \frac{b \mathfrak{S}}{3 l} = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{3 l},$$

wie beim prismatischen Körper; die Zahlenwerthe eingesetzt:

$$P = \frac{2{,}5 \,.\, 180 \,.\, (360)^2}{3 \,.\, 2000} = 9720^{Kg}.$$

78. Ein Balken von der Länge l ist an seinen beiden Enden unterstützt und in der Entfernung a von dem einen Unterstützungspunkte durch eine Last P auf Biegung beansprucht; sämmtliche Querschnitte sind ähnliche Rechtecke von den Dimensionen b und h, b_1 und h_1 an den beiden Auflagern; die Endpunkte der veränderlichen Höhen und Breiten mit einander verbunden, geben gerade Linien; man fragt: 1) Wo ist der gefährliche Querschnitt? 2) Wie gross ist die Tragkraft des Balkens?

Auflösung. Der gefährliche Querschnitt, in der Entfernung z von dem einen Ende, habe die Breite x und die Höhe y, so ist das diesen Querschnitt beanspruchende biegende Moment:

$$\frac{P (l - a)}{l} z = \frac{\mathfrak{S} x y^2}{6};$$

in Nummer 72 fanden wir

$$x = \frac{b_1 l + (b - b_1) z}{l}, \quad y = \frac{h x}{b} = \frac{h}{b} \cdot \frac{b_1 l + (b - b_1) z}{l},$$

diese Werthe von x und y in die Gleichung

$$\frac{P(l-a)}{l} z = \frac{\mathfrak{S} x y^2}{6} \text{ eingesetzt:}$$

$$\frac{P(l-a)}{l} z = \frac{\mathfrak{S} h^2}{6 b^2 l^3} \left[(b - b_1) z + b_1 l\right]^3, \text{ oder}$$

$$P = \frac{\mathfrak{S} h^2}{6 b^2 l^3 (l-a)} \cdot \frac{\left[(b - b_1) z + b_1 l\right]^3}{z},$$

dieser Ausdruck wird zu einem Minimum, wenn

$$\frac{\left[(b - b_1) z + b_1 l\right]^3}{z} = \text{Minimum}$$

wird, in Nummer 72 fanden wir, dass dieser Ausdruck zu einem Minimum wird, wenn $z = \frac{b_1 l}{2(b - b_1)}$ wird, dieser Werth von z in die Gleichungen für x und y eingesetzt:

$$x = \frac{b_1 l + (b - b_1) \frac{b_1 l}{2(b - b_1)}}{l} = \frac{b_1 l + \frac{b_1 l}{2}}{l} = \frac{3 b_1}{2},$$

$$y = \frac{h}{b} \cdot \frac{3 b_1}{2} = \frac{3 h b_1}{2 b},$$

hiermit wird:

$$P = \frac{9}{8} \frac{\mathfrak{S} b_1^2 h^2 (b - b_1)}{b^2 (l-a)};$$

soll der gefährliche Querschnitt im Angriffspunkte der Last sein, so muss z in a übergehen, d. h. es muss

$$a = \frac{b_1 l}{2(b - b_1)} \text{ sein, woraus } \frac{b_1}{b} = \frac{h_1}{h} = \frac{2a}{l + 2a}$$

folgt; es seien z. B. die Zahlenwerthe:

$a = 500^{mm}$, $l = 2000^{mm}$, $\mathfrak{S} = 2{,}5$ (d. h. das Material ist Gusseisen),

$$b_1 = 50^{mm}, \quad b = 150^{mm}, \quad h = 300^{mm}, \quad h_1 = 100^{mm}$$

gegeben, so ist

$$\frac{b_1}{b} = \frac{h_1}{h} = \frac{2a}{l + 2a} = \frac{1}{3}, \text{ also } z = a = 500^{mm},$$

der gefährliche Querschnitt ist im Angriffspunkte der Last, die Tragkraft ist

$$P = \frac{9 \cdot 2{,}5\,(50)^2\,(300)^2\,(150-50)}{8 \cdot (150)^2\,(2000-500)}, \text{ oder}$$

$$\underline{P = 1875^{Kg},}$$

die Dimensionen des gefährlichen Querschnittes sind:

$$x = \frac{3\,b_1}{2} = \frac{3 \cdot 50}{2} = 75^{mm},$$

$$y = \frac{3\,h\,b_1}{2\,b} = \frac{3 \cdot 300 \cdot 50}{2 \cdot 150} = 150^{mm},$$

diese Werthe von x und y in die Gleichung „$\frac{P(l-a)}{l}\,z = \frac{\mathfrak{S}\,x\,y^2}{6}$“ eingesetzt und P bestimmt, so erhält man selbstverständlich denselben Werth wie oben, $P = 1875^{Kg}$.

79. Ein Balken von der Länge l ist an seinen beiden Enden unterstützt und auf seiner ganzen Länge gleichmässig mit P^{Kg} belastet; die Querschnitte sind an allen Stellen der Länge Rechtecke von constanter Breite b und veränderlicher Höhe; an den Auflagern sind die Abmessungen der Querschnitte b und h, b und h_1, die Endpunkte der veränderlichen Höhen mit einander verbunden, geben eine gerade Linie; man fragt: 1) Wo ist der gefährliche Querschnitt? 2) Wie gross ist die Tragkraft des Balkens?

Auflösung. Für den gefährlichen Querschnitt von den Dimensionen b und x in der Entfernung z von dem einen Unterstützungspunkte ist das Biegungsmoment

$$\frac{q\,l}{2} \cdot z - \frac{q\,z^2}{2} = \frac{\mathfrak{S}\,b\,x^2}{6} = \frac{q}{2}\,(z\,l - z^2),$$

nach früheren Entwicklungen ist $x = \frac{h_1\,l + (h - h_1)\,z}{l}$, diesen Werth von x in die letzte Festigkeitsgleichung eingesetzt:

$$\frac{q}{2}\,(l\,z - z^2) = \frac{\mathfrak{S}\,b\left[h_1\,l + (h-h_1)\,z\right]^2}{6\,l^2}, \text{ oder}$$

$$q = \frac{\mathfrak{S}\,b\left[h_1\,l + (h-h_1)\,z\right]^2}{3\,l^2\,(z\,l - z^2)};$$

dieser Ausdruck soll ein Minimum werden, dies geschieht, wenn $\frac{\left[h_1\,l + (h-h_1)\,z\right]^2}{z\,(l-z)} = $ Minimum wird; den ersten Differential-

Quotienten dieses Ausdruckes nach der Variablen z gebildet, gleich Null gesetzt:

$$\frac{2\left[h_1 l+(h-h_1)z\right](h-h_1)z(l-z)-\left[h_1 l+(h-h_1)z\right]^2(l-2z)}{z^2(l-z)^2}=0,$$

oder beiderseits mit dem Nenner multiplicirt und durch $\left[h_1 l+(h-h_1)z\right]$ dividirt:

$$2z(h-h_1)(l-z)=\left[h_1 l+(h-h_1)z\right](l-2z),$$

die angezeigten Multiplicationen ausgeführt:

$$2hzl-2zh_1 l-2hz^2+2z^2h_1=$$
$$=h_1 l^2+hzl-h_1 zl-2zh_1 l-2hz^2+2h_1 z^2,$$

reducirt:

$$2hzl-hzl+h_1 zl=h_1 l^2,$$

hieraus z bestimmt:

$$z(h+h_1)=h_1 l \text{ und } z=\frac{h_1 l}{h+h_1};$$

hiermit wird

$$x=\frac{h_1 l+(h-h_1)\dfrac{h_1 l}{h+h_1}}{l}=h_1+\frac{(h-h_1)h_1}{h+h_1}=\frac{h_1 h+h_1^2+h_1 h-h_1^2}{h+h_1},$$

oder $x=\dfrac{2h_1 h}{h+h_1}$ und

$$q=\frac{\mathfrak{S}b\left[h_1 l+(h-h_1)\dfrac{h_1 l}{h+h_1}\right]^2}{3l^2\left[\dfrac{h_1 l^2}{h+h_1}-\dfrac{h_1^2 l^2}{(h+h_1)^2}\right]}=\frac{\mathfrak{S}b\left[\dfrac{h_1 l(h+h_1)+(h-h_1)h_1 l}{h+h_1}\right]^2}{3l^2\left[\dfrac{h_1 l^2(h+h_1)-h_1^2 l^2}{(h+h_1)^2}\right]},$$

oder

$$q=\frac{\mathfrak{S}b\left[h_1 l(h+h_1)+(h-h_1)h_1 l\right]^2}{3l^2\left[h_1 l^2(h+h_1)-h_1^2 l^2\right]}=\frac{\mathfrak{S}b(h_1 hl+h_1^2 l+h_1 hl-h_1^2 l)^2}{3l^2(hh_1 l^2+h_1^2 l^2-h_1^2 l^2)},$$

$$q=\frac{\mathfrak{S}b(2h_1 hl)^2}{3l^2 hh_1 l^2}=\frac{4\mathfrak{S}bh_1 h}{3l^2} \text{ und}$$

$$P=ql=\frac{4\mathfrak{S}bhh_1}{3l};$$

es seien z. B. die Zahlenwerthe: $l=2000^{mm}$, $b=150^{mm}$, $h=300^{mm}$, $h_1=100^{mm}$, $\mathfrak{S}=2{,}5$ (Material-Gusseisen) gegeben, so ist der gefährliche Querschnitt um das Stück

$$z = \frac{h_1 l}{h + h_1} = \frac{100 \,.\, 2000}{300 + 100} = 500^{mm}$$

von dem einen Unterstützungspunkte entfernt,

$$x = \frac{2 h_1 h}{h + h_1} = \frac{2 \,.\, 100 \,.\, 300}{300 + 100} = 150^{mm},$$

ist die Höhe des gefährlichen Querschnittes, die Tragkraft ist:

$$P = \frac{4 \mathfrak{S} b h h_1}{3 l} = \frac{4 \,.\, 2{,}5 \,.\, 150 \,.\, 300 \,.\, 100}{3 \,.\, 2000} = 7500^{Kg};$$

soll der gefährliche Querschnitt in der Mitte der Länge sein, so wird $z = \frac{l}{2} = \frac{h_1 l}{h + h_1}$, oder $\frac{1}{2} = \frac{h_1}{h + h_1}$, oder $h + h_1 = 2 h_1$ und $h_1 = h$, d. h. der Körper muss eine prismatische Gestalt haben.

80. Dieselbe Aufgabe wie in voriger Nummer, jedoch mit dem Unterschiede, dass die Höhe aller Rechteck-Querschnitte constant $= h$ und die Breite variabel sei, die Endpunkte der veränderlichen Breiten mit einander verbunden, geben eine gerade Linie; an den Auflagerpunkten sind die Querschnittsdimensionen b und h, b_1 und h.

Auflösung. Für den gefährlichen Querschnitt in der Entfernung z von dem einen Unterstützungspunkte und den Dimensionen h und y hat man das Biegungsmoment:

$$\frac{q l}{2} z - \frac{q z^2}{2} = \frac{\mathfrak{S} h^2 y}{6},$$

oder, da nach Früherem

$$y = \frac{b_1 l + (b - b_1) z}{l}$$

ist, so hat man auch:

$$\frac{q}{2} (l z - z^2) = \frac{\mathfrak{S} h^2 \left[b_1 l + (b - b_1) z\right]}{6 l}, \text{ oder}$$

$$q = \frac{\mathfrak{S} h^2 \left[b_1 l + (b - b_1) z\right]}{3 l (l z - z^2)};$$

dieser Ausdruck soll ein Minimum werden, dies geschieht, wenn $\frac{b_1 l + (b - b_1) z}{l z - z^2} =$ Minimum wird.

Den ersten Differential-Quotienten dieses Ausdruckes, nach der Variablen z gebildet, gleich Null gesetzt, erhält man:

$$\frac{(b-b_1)(lz-z^2)-\left[b_1 l+(b-b_1)z\right](l-2z)}{(lz-z^2)^2}=0$$

diese Gleichung nach z aufgelöst:

$$(b-b_1)(lz-z^2)=\left[b_1 l+(b-b_1)z\right](l-2z),$$

die angezeigten Multiplicationen verrichtet:

$$blz-b_1 lz-bz^2+b_1 z^2=(b_1 l+bz-b_1 z)(l-2z),$$

$$=b_1 l^2+lbz-lb_1 z-2zb_1 l-2z^2 b+2b_1 z^2,$$

reducirt:

$$z^2 b-b_1 z^2+2zb_1 l=b_1 l^2, \text{ oder}$$

$$z^2(b-b_1)+2zb_1 l=b_1 l^2, \text{ oder}$$

$$z^2+\frac{2zb_1 l}{b-b_1}=\frac{b_1 l^2}{b-b_1}, \text{ hieraus ist:}$$

$$z=-\frac{b_1 l}{b-b_1}\pm\sqrt{\left(\frac{b_1 l}{b-b_1}\right)^2+\frac{b_1 l^2(b-b_1)}{(b-b_1)(b-b_1)}}, \text{ oder}$$

$$z=\frac{-b_1 l\pm\sqrt{b_1 l^2(b_1+b-b_1)}}{b-b_1}=\frac{-b_1 l\pm l\sqrt{b_1 b}}{b-b_1};$$

da hier offenbar nur der positive Wurzelwerth zu gebrauchen ist, so hat man die Entfernung z des gefährlichen Querschnittes von dem einen Unterstützungspunkte: $z=\frac{l(\sqrt{b_1 b}-b_1)}{b-b_1}$.

Soll der gefährliche Querschnitt in der Mitte der Länge sein, so muss $z=\frac{l}{2}=\frac{l(\sqrt{b_1 b}-b_1)}{b-b_1}$, oder $\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{b_1 b}-b_1}{b-b_1}$ sein; diese Gleichung nach b aufgelöst:

$$b-b_1=2\sqrt{b_1 b}-2b_1, \text{ oder}$$

$$b+b_1=2\sqrt{b_1 b}, \text{ quadrirt:}$$

$$b^2+2bb_1+b_1^2=4b_1 b, \text{ oder}$$

$$b^2-2b_1 b+b_1^2=(b-b_1)^2=0, \text{ also } b-b_1=0,$$

d. h. $b=b_1$, dies sagt: Der Körper muss prismatisch sein, wenn der gefährliche Querschnitt in der Mitte der Länge sein soll. Den Werth von z in die Gleichung für y eingesetzt:

$$y = \frac{b_1 l + l(\sqrt{b_1 b} - b_1)}{l} = \sqrt{b_1 b},$$

die Werthe von y und z in die Gleichung „$\frac{q}{2}(lz - z^2) = \frac{\mathfrak{S} h^2 y}{6}$“ eingesetzt:

$$\frac{q}{2}\left[\frac{l^2(\sqrt{b_1 b} - b_1)}{b - b_1} - \frac{l^2(\sqrt{b_1 b} - b_1)^2}{(b - b_1)^2}\right] = \frac{\mathfrak{S} h^2 \sqrt{b_1 b}}{6}, \text{ oder}$$

$$\frac{q}{2}\left[\frac{l^2(\sqrt{b_1 b} - b_1)}{b - b_1}\right]\left(1 - \frac{\sqrt{b_1 b} - b_1}{b - b_1}\right) = \frac{\mathfrak{S} h^2 \sqrt{b_1 b}}{6}, \text{ oder}$$

$$\frac{q l^2(\sqrt{b_1 b} - b_1)}{b - b_1}\left[\frac{b - b_1 - \sqrt{b_1 b} + b_1}{b - b_1}\right] = \frac{\mathfrak{S} h^2 \sqrt{b_1 b}}{3}, \text{ oder}$$

$$\frac{q l^2(\sqrt{b_1 b} - b_1)}{(b - b_1)^2}(b - \sqrt{b_1 b}) = \frac{\mathfrak{S} h^2 \sqrt{b_1 b}}{3}, \text{ oder}$$

$$\frac{q l^2(\sqrt{b_1 b} - \sqrt{b_1}\sqrt{b_1})(\sqrt{b}\,.\sqrt{b} - \sqrt{b_1 b})}{(\sqrt{b} + \sqrt{b_1})^2(\sqrt{b} - \sqrt{b_1})^2} = \frac{\mathfrak{S} h^2 \sqrt{b_1 b}}{3}, \text{ oder}$$

$$\frac{q l^2 \sqrt{b_1}(\sqrt{b} - \sqrt{b_1})\sqrt{b}(\sqrt{b} - \sqrt{b_1})}{(\sqrt{b} + \sqrt{b_1})^2(\sqrt{b} - \sqrt{b_1})^2} = \frac{\mathfrak{S} h^2 \sqrt{b_1 b}}{3}, \text{ oder}$$

$$\frac{q l^2 \sqrt{b b_1}}{(\sqrt{b} + \sqrt{b_1})^2} = \frac{\mathfrak{S} h^2}{3},$$

hieraus ist die Tragkraft:

$$q l = P = \frac{(\sqrt{b} + \sqrt{b_1})^2 \mathfrak{S} h^2}{3 l}.$$

Die Zahlenwerthe: $b = 144^{mm}$, $b_1 = 49^{mm}$, $l = 2000^{mm}$, $h = 300^{mm}$, $\mathfrak{S} = 2{,}5$ (Material: Gusseisen) in die Gleichungen für P und z eingesetzt:

$$P = \frac{2{,}5\,.\,90000\,(\sqrt{144} + \sqrt{49})^2}{3\,.\,2000} = 13537{,}5^{Kg};$$

der gefährliche Querschnitt liegt um das Stück

$$z = \frac{l(\sqrt{b_1 b} - b_1)}{b - b_1} = \frac{2000\,(\sqrt{49\,.\,144} - 49)}{144 - 49} = 736{,}84^{mm}$$

von dem einen Unterstützungspunkte entfernt.

Wir haben oben gesehen, dass, wenn $z = \frac{l}{2}$ werden soll, $b = b_1$, also der Körper prismatisch sein müsse, es muss daher auch umgekehrt, in der Gleichung für z, $b = b_1$ gesetzt, $z = \frac{l}{2}$ werden; man erhält, wenn man in der Gleichung

$$„z = \frac{l(\sqrt{b_1 b} - b_1)}{b - b_1}“ \; b = b_1 \text{ setzt: } z = \frac{l(\sqrt{b^2} - b)}{b - b} = \frac{l(0)}{(0)};$$

diese unbestimmte Form vermeidet man, wenn man setzt:

$$z = \frac{l(\sqrt{b_1 b} - \sqrt{b_1}\sqrt{b_1})}{(\sqrt{b} + \sqrt{b_1})(\sqrt{b} - \sqrt{b_1})} = \frac{l\sqrt{b_1}(\sqrt{b} - \sqrt{b_1})}{(\sqrt{b} + \sqrt{b_1})(\sqrt{b} - \sqrt{b_1})} = \frac{l\sqrt{b_1}}{\sqrt{b} + \sqrt{b_1}},$$

hierin $b = b_1$ gesetzt, erhält man:

$$z = \frac{l\sqrt{b}}{2\sqrt{b}} = \frac{l}{2};$$

die Werthe, $y = \sqrt{b_1 b}$ und $z = \frac{l\sqrt{b_1}}{\sqrt{b} + \sqrt{b_1}}$ in die Gleichung:

$$\frac{q}{2}(lz - z^2) = \frac{\mathfrak{S} h^2 y}{6}$$

eingesetzt, erhält man selbstverständlich, wie oben:

$$ql = P = \frac{\mathfrak{S} h^2 (\sqrt{b} + \sqrt{b_1})^2}{3l};$$

in dieser Gleichung $b = b_1$ gesetzt, erhält man, wie für den prismatischen Körper geltend: $P = \frac{4 \mathfrak{S} b h^2}{3l}$.

81. Dieselbe Aufgabe wie in voriger Nummer, jedoch mit dem Unterschiede, dass sämmtliche Querschnitte ähnliche Rechtecke sind von den Dimensionen b und h, b_1 und h_1 an den Auflagerstellen; die Endpunkte der veränderlichen Breiten und Höhen mit einander verbunden, geben gerade Linien; man fragt wieder: Wo ist der gefährliche Querschnitt und wie gross ist die Tragkraft des Balkens?

Auflösung. Für den gefährlichen Querschnitt von der Höhe y und der Breite x in der Entfernung z von dem einen Unterstützungspunkte ist das Biegungsmoment:

$$\frac{q}{2} \cdot z - \frac{q z^2}{2} = \frac{\mathfrak{S} x y^2}{6}$$

in Beispiel 72 fanden wir:

$$x = \frac{b_1 l + (b - b_1) z}{l},$$

wegen der Aehnlichkeit der Rechtecke ist auch:

$$y = \frac{h x}{b} = \frac{h}{b} \cdot \frac{b_1 l + (b - b_1) z}{l},$$

die Werthe von x und y in obige Festigkeitsgleichung eingesetzt:

$$\frac{q l}{2} z - \frac{q z^2}{2} = \frac{\mathfrak{S} h^2}{6 b^2 l^3} \left[(b - b_1) z + b_1 l\right]^3, \text{ oder}$$

$$q = \frac{\mathfrak{S} h^2 \left[(b - b_1) z + b_1 l\right]^3}{3 b^2 l^3 (l z - z^2)};$$

dieser Ausdruck soll zu einem Minimum werden, dies geschieht, wenn

$$\frac{\left[(b - b_1) z + b_1 l\right]^3}{l z - z^2} = \text{Minimum}$$

wird; den ersten Differential-Quotienten dieses Ausdruckes nach der Variablen z gebildet, gleich Null gesetzt:

$$\frac{3\left[(b - b_1) z + b_1 l\right]^2 (b - b_1)(l z - z^2) - \left[(b - b_1) z + b_1 l\right]^3 (l - 2 z)}{(l z - z^2)^2} = 0,$$

oder beiderseits mit $(l z - z^2)^2$ multiplicirt und durch

$\left[(b - b_1) z + b_1 l\right]^2$ dividirt:

$$3 (b - b_1)(l z - z^2) = \left[(b - b_1) z + b_1 l\right] (l - 2 z),$$

diese Gleichung nach z aufgelöst:

$$3 b l z - 3 b_1 l z - 3 b z^2 + 3 b_1 z^2 = b l z - b_1 l z + b_1 l^2 - 2 b z^2 + 2 b_1 z^2 - 2 b_1 l z,$$

reducirt:

$$b_1 z^2 - b z^2 + 2 b l z = b_1 l^2, \text{ oder}$$

$$z^2 (b_1 - b) + 2 b l z = b_1 l^2, \text{ oder}$$

$$z^2 + \frac{2 b l z}{b_1 - b} = \frac{b_1 l^2}{b_1 - b}, \text{ oder}$$

$$z^2 - \frac{2 b l z}{b - b_1} = - \frac{b_1 l^2}{b - b_1}, \text{ hieraus ist:}$$

$$z = \frac{b l}{b - b_1} \pm \sqrt{\left(\frac{b l}{b - b_1}\right)^2 - \frac{b_1 l^2}{b - b_1}} = \frac{b l \pm \sqrt{b^2 l^2 - b_1 l^2 (b - b_1)}}{b - b_1}$$

oder

$$z = \frac{b\,l \pm \sqrt{l^2 (b^2 - b_1 b + b_1^2)}}{b - b_1} = \frac{l \left(b \pm \sqrt{b^2 - b_1 b + b_1^2}\right)}{b - b_1};$$

hier ist offenbar nur der negative Wurzelwerth zu gebrauchen; man hat daher für die Entfernung des gefährlichen Querschnittes von dem einen Unterstützungspunkte:

$$z = \frac{l \left(b - \sqrt{b^2 - b_1 b + b_1^2}\right)}{b - b_1}.$$

Setzt man in dieser Gleichung $z = \frac{l}{2}$, so erhält man:

$$\frac{l}{2} = \frac{l \left(b - \sqrt{b^2 - b_1 b + b_1^2}\right)}{b - b_1}, \text{ oder}$$

$$b - b_1 = 2b - 2\sqrt{b^2 - b_1 b + b_1^2}, \text{ oder:}$$

$$b + b_1 = 2\sqrt{b^2 - b_1 b + b_1^2},$$

diese Gleichung nach b_1 aufgelöst:

$$b^2 + 2 b b_1 + b_1^2 = 4 b^2 - 4 b_1 b + 4 b_1^2, \text{ reducirt:}$$

$$b_1^2 - 2 b b_1 + b^2 = 0, \text{ oder}$$

$$(b - b_1)^2 = 0, \text{ somit } b - b_1 = 0 \text{ und } b_1 = b;$$

mit den Werthen $z = \frac{l}{2}$, $b_1 = b$, wird auch $x = b$ und $y = h$, d. h. soll der gefährliche Querschnitt in der Mitte der Länge sein, so muss der Körper prismatisch sein; setzt man daher umgekehrt in der Gleichung für z, $b = b_1$, so muss z übergehen in $\frac{l}{2}$; in der Gleichung „$z = \frac{l \left(b - \sqrt{b^2 - b_1 b + b_1^2}\right)}{b - b_1}$" $b = b_1$ gesetzt, erhält man $z = l \cdot \frac{0}{0}$, um diese unbestimmte Form zu vermeiden, multiplicire man im rechten Theile der Gleichung für z Zähler und Nenner mit $b + \sqrt{b^2 - b_1 b + b_1^2}$, man erhält:

$$z = \frac{l \left[\left(b + \sqrt{b^2 - b_1 b + b_1^2}\right)\left(b - \sqrt{b^2 - b_1 b + b_1^2}\right)\right]}{(b - b_1)\left(b + \sqrt{b^2 - b_1 b + b_1^2}\right)}, \text{ oder}$$

$$z = \frac{l\,(b^2 - b^2 + b_1 b - b_1^2)}{(b - b_1)\left(b + \sqrt{b^2 - b_1 b + b_1^2}\right)} = \frac{l b_1 (b - b_1}{(b - b_1)\left(b + \sqrt{b^2 - b_1 b + b_1^2}\right)}, \text{ oder}$$

$$z = \frac{l b_1}{b + \sqrt{b^2 - b_1 b + b_1^2}},$$

hierin $b = b_1$ gesetzt:

$$z = \frac{l b}{b + b} = \frac{l}{2};$$

setzt man den Werth von $z = \frac{l\left(b - \sqrt{b^2 - b_1 b + b_1^2}\right)}{b - b_1}$ in die Gleichungen für x und y ein, wobei wir uns der kürzeren Bezeichnungsweise „$\sqrt{b^2 - b_1 b + b_1^2} = w$" bedienen, so erhält man:

$$x = \frac{b_1 l + l(b - w)}{l} = b_1 + b - w, \text{ und } y = (b_1 + b - w)\frac{h}{b};$$

setzt man endlich die Werthe von x, y und z in die Gleichung „$\frac{qz}{2}(l - z) = \frac{\mathfrak{S} x y^2}{6}$" ein, und behält die angegebene kürzere Bezeichnungsweise bei, so hat man:

$$\frac{q}{2} \cdot \frac{l b_1}{b + w}\left(\frac{l b + l w - l b_1}{b + w}\right) = \frac{\mathfrak{S}}{6}(b_1 + b - w)^3 \frac{h^2}{b^2}, \text{ oder}$$

$$\frac{q l^2 b_1 (b + w - b_1)}{(b + w)^2} = \frac{\mathfrak{S} h^2 (b_1 + b - w)^3}{3 b^2},$$

woraus die Tragkraft des Balkens

$$q l = P = \frac{(b + w)^2 \mathfrak{S} h^2 (b + b_1 - w)^3}{3 b^2 b_1 l (b + w - b_1)},$$

und den Werth von $w = \sqrt{b^2 - b_1 b + b_1^2}$ wieder eingesetzt,

$$P = \frac{\left(b + \sqrt{b^2 - b_1 b + b_1^2}\right)^2 \left(b + b_1 - \sqrt{b^2 - b_1 b + b_1^2}\right)^3 \mathfrak{S} h^2}{3 b^2 b_1 l \left(b - b_1 + \sqrt{b^2 - b_1 b + b_1^2}\right)}$$

folgt; in dieser Gleichung $b = b_1$ gesetzt, erhält man die für den prismatischen Körper von derselben Belastungs- und Unterstützungsweise geltende Tragkraft:

$$P = \frac{(b + b)^2 (2b - b)^3 \mathfrak{S} h^2}{3 b^3 l b} = \frac{4 b^5 \mathfrak{S} h^2}{3 b^4 l} = \frac{4 b \mathfrak{S} h^2}{3 l},$$

in der Gleichung für z die Zahlenwerthe: $b = 150^{mm}$, $b_1 = 50^{mm}$, $l = 2000^{mm}$ gesetzt, erhält man $z = 354{,}4^{mm}$.

82. Ein abgestutzter Kegel von der Länge l und den Halbmessern r_1 und r_2 der beiden Grundflächen ruht mit seinen Enden auf zwei Stützen auf und ist in der Entfernung a von dem einen

Ende durch die Last P^{Kg} auf Biegung beansprucht; man fragt: 1) Wo ist der gefährliche Querschnitt, 2) wie gross ist die Tragkraft? (Siehe die folgende Figur.)

Fig. 134.

Auflösung. Für die Bruchstelle vom Halbmesser x in der Entfernung z von dem einen Ende ist das Biegungsmoment: $P_1 z = \frac{\mathfrak{S} x^3 \pi}{4}$, oder, da $P_1 = \frac{P(l-a)}{l}$ ist, so hat man auch: $\frac{P(l-a)}{l} z = \frac{\mathfrak{S} x^3 \pi}{4}$; aus der Aehnlichkeit der Dreiecke scd und smn folgt: $\overline{mn} : \overline{cd} = z . l$, und wegen $\overline{cd} = r_2 - r_1$,

$$\overline{mn} : (r_2 - r_1) = z : l, \text{ woraus } \overline{mn} = (r_2 - r_1)\frac{z}{l} \text{ und}$$

$$x = r_1 + \overline{mn} = r_1 + (r_2 - r_1)\frac{z}{l} = \frac{(r_2 - r_1) z + r_1 l}{l} \text{ folgt.}$$

Hiermit erhält man:

$$\frac{P(l-a) z}{l} = \frac{\mathfrak{S}\pi}{4} \frac{\left[(r_2 - r_1) z + r_1 l\right]^3}{l^3}, \text{ oder}$$

$$P = \frac{\mathfrak{S}\pi \left[(r_2 - r_1) z + r_1 l\right]^3}{(l-a) l^2 z};$$

dieser Ausdruck für P soll ein Minimum werden, dies geschieht, wenn

$$\frac{\left[(r_2 - r_1) z + r_1 l\right]^3}{z} = \text{Minimum}$$

wird; den ersten Differential-Quotienten dieses Ausdruckes, nach der Variablen z gebildet, gleich Null gesetzt und aus der dadurch erhaltenen Gleichung z bestimmt (siehe Beispiel 32), gibt:

$$z = \frac{r_1 l}{2(r_2 - r_1)},$$

diesen Werth in die obige Gleichung für P eingesetzt, gibt:

$$P = \frac{27 \mathfrak{S} \pi r_1^3 (r_2 - r_1)}{16 (l - a)}$$

als Tragkraft des Balkens.

Soll die Bruchstelle in der Mitte der Länge sein, so muss $\frac{l}{2} = z = \frac{r_1 l}{2(r_2 - r_1)}$ sein; hieraus folgt $1 = \frac{r_1}{r_2 - r_1}$ und $r_2 = 2 r_1$,

oder $\frac{r_2}{r_1} = 2$, ist also dieses Verhältniss der Halbmesser der beiden Grundflächen des abgestutzten Kegels eingehalten, so wird bei vermehrter Belastung der Bruch in der Mitte erfolgen. Soll die Bruchstelle im Angriffspunkte der Last sein, also $a = z$, so hat man:

$$a = \frac{r_1 l}{2(r_2 - r_1)}, \text{ woraus } 2ar_2 - 2ar_1 = r_1 l,$$

$$r_2 = \frac{r_1(l + 2a)}{2a} \text{ und } \frac{r_2}{r_1} = \frac{l + 2a}{2a}$$

folgt; der gefährliche Querschnitt ist aber bekanntlich auch dann im Angriffspunkte der Last, wenn bei der vorliegenden Belastungs- und Unterstützungsweise der Körper prismatisch ist; setzt man also in der Gleichung

$$„\frac{P(l - a)z}{l} = \frac{\mathfrak{S}\pi}{4}\left[\frac{(r_2 - r_1)z + r_1 l}{l}\right]^3“$$

$r_2 = r_1 = r$ und dementsprechend auch $z = a$, so erhält man

$$\frac{P(l - a)a}{l} = \frac{\mathfrak{S}r^3\pi}{4},$$

wie beim prismatischen Körper.

83. Ein abgestutzter Kegel von der Länge l und den Halbmessern r_2 und r_1 an den beiden Grundflächen ist an seinen beiden Enden unterstützt und auf seiner ganzen Länge gleichmässig belastet, man fragt: 1) Wo ist der gefährliche Querschnitt? 2) Wie gross ist die Tragkraft des Balkens?

Auflösung. Für die Bruchstelle vom Halbmesser x in der Entfernung z von dem einen Ende hat man das Biegungsmoment:

$$\frac{q}{2} z(l - z) = \frac{\mathfrak{S}x^3\pi}{4}$$

und da nach dem vorigen Beispiel

$$x = \frac{(r_2 - r_1)z + r_1 l}{l}$$

ist, so hat man auch:

$$\frac{q}{2}(lz - z^2) = \frac{\mathfrak{S}x^3\pi}{4} = \frac{\mathfrak{S}\pi}{4}\left[\frac{(r_2 - r_1)z + r_1 l}{l}\right]^3,$$

hieraus ist:

$$q = \frac{\mathfrak{S}\pi}{2l^3}\,\frac{\left[(r_2 - r_1) + r_1 l\right]^3}{lz - z^2},$$

dieser Ausdruck wird ein Minimum, wenn

$$\frac{\left[(r_2 - r_1) z + r_1 l\right]^3}{l z - z^2} = \text{Minimum}$$

wird; den ersten Differential-Quotienten dieses Ausdruckes, nach der Variablen z gebildet, gleich Null gesetzt:

$$\frac{3\left[(r_2 - r_1) z + r_1 l\right]^2 (r_2 - r_1)(l z - z^2) - \left[(r_2 - z_1) z + r_1 l\right]^3 (l - 2 z)}{(l z - z^2)^2} = 0,$$

beiderseits mit $(l z - z^2)^2$ multiplicirt und durch $\left[(r_2 - r_1) z + r_1 l\right]^2$ dividirt:

$$3 (r_2 - r_1)(l z - z^2) = \left[(r_2 - r_1) z + r_1 l\right] (l - 2 z),$$

die angezeigten Operationen ausgeführt, reducirt und die Gleichung nach der Unbekannten z geordnet:

$$z^2 - \frac{2 r_2 l z}{r_2 - r_1} + \frac{r_1 l^2}{r_2 - r_1} = 0, \text{ hieraus ist:}$$

$$z = \frac{r_2 l}{r_2 - r_1} \pm \sqrt{\left(\frac{r_2 l}{r_2 - r_1}\right)^2 - \frac{r_1 l^2}{r_2 - r_1}} = \frac{r_2 l \pm \sqrt{r_2^2 l^2 - r_1 l^2 (r_2 - r_1)}}{r_2 - r_1},$$

oder

$$z = \frac{l\left(r_2 \pm \sqrt{r_2^2 - r_2 r_1 + r_1^2}\right)}{r_2 - r_1};$$

hier ist offenbar nur der negative Wurzelwerth zu gebrauchen, man erhält also:

$$z = \frac{l\left(r_2 - \sqrt{r_2^2 - r_2 r_1 + r_1^2}\right)}{r_2 - r_1};$$

setzt man in dieser Gleichung $z = \frac{l}{2}$, d. h. die Bruchstelle soll in der Mitte der Länge sein, so hat man

$$\frac{l}{2} = \frac{l\left(r_2 - \sqrt{r_2^2 - r_2 r_1 + r_1^2}\right)}{r_2 - r_1},$$

diese Gleichung nach r_1 oder r_2 aufgelöst, gibt:

$$r_2 - r_1 = 2\left(r_2 - \sqrt{r_2^2 - r_2 r_1 + r_1^2}\right) = 2 r_2 - 2\sqrt{r_2^2 - r_2 r_1 + r_1^2},$$

oder

$$r_2 + r_1 = 2\sqrt{r_2^2 - r_2 r_1 + r_1^2}, \text{ oder:}$$

$$r_2^2 + 2 r_1 r_2 + r_1^2 = 4 r_2^2 - 4 r_2 r_1 + 4 r_1^2, \text{ hieraus ist}$$

21 *

$$6 r_1 r_2 = 3 r_2^2 + 3 r_1^2 \text{ und } r_2^2 - 2 r_2 r_1 + r_1^2 = 0, \text{ oder}$$

$$(r_2 - r_1)^2 = 0, \text{ also } r_2 - r_1 = 0 \text{ und } \underline{r_2 = r_1},$$

d. h.: Soll die Bruchstelle in der Mitte der Länge sein, so muss der Körper prismatisch sein, da die Rechnung zeigt, dass der Kegel in einen Cylinder übergeht; man muss daher auch, wenn man in der Gleichung für z, $r_2 = r_1$ setzt, erhalten: $z = \frac{l}{2}$, diese Substitution durchgeführt, erhält man: $z = l \cdot \frac{0}{0}$, um diese unbestimmte Form zu vermeiden, multipliciren wir Zähler und Nenner des rechten Theiles der Gleichung für z mit $r_2 + \sqrt{r_2^2 - r_2 r_1 + r_1^2}$; man erhält:

$$z = \frac{l\left(r_2 - \sqrt{r_2^2 - r_2 r_1 + r_1^2}\right)\left(r_2 + \sqrt{r_2^2 - r_2 r_1 + r_1^2}\right)}{(r_2 - r_1)\left(r_2 + \sqrt{r_2^2 - r_2 r_1 + r_1^2}\right)}, \text{ oder}$$

$$z = \frac{l(r_2^2 - r_2^2 + r_2 r_1 - r_1^2)}{(r_2 - r_1)\left(r_2 + \sqrt{r_2^2 - r_2 r_1 + r_1^2}\right)} = \frac{l r_1 (r_2 - r_1)}{(r_2 - r_1)\left(r_2 + \sqrt{r_2^2 - r_2 r_1 + r_1^2}\right)},$$

$$z = \frac{l r_1}{r_2 + \sqrt{r_2^2 - r_2 r_1 + r_1^2}},$$

setzt man hier $r_2 = r_1$, so erhält man $z = \frac{l}{2}$; setzt man den Werth von $z = \frac{l\left(r_2 - \sqrt{r_2^2 - r_2 r_1 + r_1^2}\right)}{r_2 - r_1}$ in die Gleichung für x ein, so hat man:

$$x = \frac{l\left(r_2 - \sqrt{r_2^2 - r_2 r_1 + r_1^2}\right) + r_1 l}{l}, \text{ oder}$$

$$x = r_2 + r_1 - \sqrt{r_2^2 - r_2 r_1 + r_1^2});$$

die Werthe von x und z in die Gleichung „$\frac{q z}{2}(l - z) = \frac{\mathfrak{S} x^3 \pi}{4}$“ eingesetzt, gibt:

$$\frac{q}{2} \cdot \frac{l r_1}{r_2 + \sqrt{r_2^2 - r_2 r_1 + r_1^2}}\left(l - \frac{l r_1}{r_2 + \sqrt{r_2^2 - r_2 r_1 + r_1^2}}\right) =$$

$$= \frac{\mathfrak{S}\pi}{4}\left(r_2 + r_1 - \sqrt{r_2^2 - r_2 r_1 + r_1^2}\right)^3,$$

oder der Abkürzung wegen die Wurzelgrösse $\sqrt{r_2^2 - r_2 r_1 + r_1^2} = w$ gesetzt:

$$\frac{q l r_1}{r_2 + w}\left(\frac{l r_2 + l w - l r_1}{r_2 + w}\right) = \frac{\mathfrak{S}\pi}{2}(r_2 + r_1 - w)^3, \text{ oder}$$

$$\frac{q l^2 r_1}{(r_2 + w)^2}(r_2 + w - r_1) = \frac{\mathfrak{S}\pi}{2}(r_2 + r_1 - w)^3, \text{ hieraus ist}$$

$$q l = P = \frac{\mathfrak{S}\pi (r_2 + r_1 - w)^3 (r_2 + w)^2}{2 l r_1 (r_2 + w - r_1)};$$

setzt man hierin $r_2 = r_1$, d. h. lässt man den Kegel in einen Cylinder übergehen, so erhält man:

$$P = \frac{\mathfrak{S}\pi (r)^3 (2r)^2}{2 l r^2} = \frac{2\mathfrak{S}\pi r^3}{l},$$

d. i. aber derselbe Ausdruck für P, der für den prismatischen Körper gilt, der an seinen beiden Enden unterstützt und auf seiner ganzen Länge gleichmässig belastet ist.

84. Es sind die Festigkeitsdimensionen eines gusseisernen gleicharmigen Balanciers für eine 60pferdekräftige Dampfmaschine nach folgenden Angaben zu berechnen: Die den Balancier auf Biegung beanspruchende Kraft in der Kolbenstange ist $P = 7234^{Kg}$, die ganze Länge des Balanciers ist $2A = 3{,}6^m$, der Querschnitt ist Doppel-**T**-förmig mit in der Mitte der Höhe horizontal angesetzten Rippen. (Siehe die folgende Figur.)

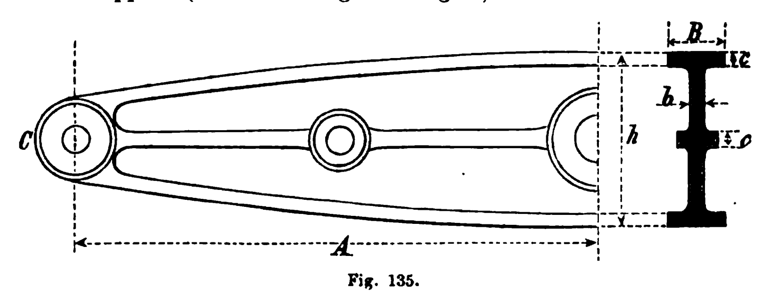


Fig. 135.

Auflösung. Die Arme eines Balanciers sind als zwei Balken anzusehen, von denen jeder an einem Ende eingemauert und am anderen Ende durch eine Kraft P auf Biegung beansprucht wird; die Einmauerungsstelle ist der Drehpunkt des Hebels (Balanciers). Da der Balancier als ein Körper von der Form der gleichen Festigkeit leicht hergestellt werden kann, so begrenzt man das Längenprofil jedes der beiden Arme bekanntlich durch Parabelbögen. Wir berechnen zuerst den Querschnitt des Balanciers in der Mitte seiner Länge und nehmen vorläufig an, als ob dieser Querschnitt ein massives Rechteck wäre, und setzen den Querschnittsmodul desselben gleich dem Querschnittsmodul des Doppel-**T**-förmigen Querschnittes mit Hinweglassung der in der Mitte der Höhe befindlichen horizontalen Rippen, da diese, weil in der Nähe der neutralen Faserschichte

gelegen, ohnehin nur sehr wenig zur Tragkraft des Balanciers beitragen. Die Dimensionen des Rechteckes seien b_0 und h, man hat somit die Gleichung:

$$\frac{b_0\,h^2}{6} = \frac{1}{6}\left[\frac{B\,h^3 - (B-b)\,(h-2\,c)^3}{h}\right],$$

im rechten Theile dieser Gleichung die angezeigten Operationen verrichtet und b_0 bestimmt:

$$b_0 = \frac{B\,h^3 - (B-b)\,(h^3 - 6\,h^2 c + 12\,h\,c^2 - 8\,c^3)}{h^3}, \text{ oder}$$

$$b_0 = \frac{Bh^3 - Bh^3 + bh^3 + 6Bh^2c - 6bh^2c - 12Bhc^2 + 12bhc^2 + 8Bc^3 - 8bc^3}{h^3},$$

im rechten Theile der Gleichung die Division mit h^3 ausgeführt:

$$b_0 = b + \frac{6\,B\,c}{h} - \frac{6\,b\,c}{h} - 12\,B\left(\frac{c}{h}\right)^2 + 12\,b\left(\frac{c}{h}\right)^2 +$$

$$+ 8\,B\left(\frac{c}{h}\right)^3 - 8\,b\left(\frac{c}{h}\right)^3,$$

beiderseits durch b dividirt:

$$\frac{b_0}{b} = 1 + 6\left(\frac{B}{b}\right)\left(\frac{c}{h}\right) - 6\left(\frac{c}{h}\right) - 12\left(\frac{B}{b}\right)\left(\frac{c}{h}\right)^2 +$$

$$+ 12\left(\frac{c}{h}\right)^2 + 8\left(\frac{B}{b}\right)\left(\frac{c}{h}\right)^3 - 8\left(\frac{c}{h}\right)^3;$$

die zwei letzten Glieder des rechten Theiles dieser Gleichung, nämlich $8\left(\frac{B}{b}\right)\left(\frac{c}{h}\right)^3 - 8\left(\frac{c}{h}\right)^3$ sind sehr klein, weil die Factoren $\left(\frac{c}{h}\right)^3$ sehr kleine Grössen sind, überdies heben sich diese beiden Glieder zum Theil auf, man kann sie daher wegen Vereinfachung der zu erzielenden Formel vernachlässigen und schreiben:

$$\frac{b_0}{b} = 1 + 6\left(\frac{c}{h}\right)\left(\frac{B}{b} - 1\right) - 12\left(\frac{c}{h}\right)^2\left(\frac{B}{b} - 1\right), \text{ oder}$$

$$\frac{b_0}{b} = 1 + \left(\frac{B}{b} - 1\right)\left[6\left(\frac{c}{h}\right) - 12\left(\frac{c}{h}\right)^2\right] =$$

$$= 1 + 6\left(\frac{c}{h}\right)\left[1 - 2\left(\frac{c}{h}\right)\right]\left(\frac{B}{b} - 1\right),$$

setzt man das zweite Glied des rechten Theiles der Abkürzung wegen $= a$, so ist

$$\frac{b_0}{b} = 1 + a, \text{ woraus } b = \frac{b_0}{1 + a}$$

folgt, wobei also

$$a = 6\left(\frac{c}{h}\right)\left[1 - 2\left(\frac{c}{h}\right)\right]\left(\frac{B}{b} - 1\right)$$

ist; in dieser Formel muss man allerdings für die Verhältnisse $\frac{c}{h}$ und $\frac{B}{b}$ passende, der praktischen Ausführung entsprechende Werthe annehmen. Wir berechnen zunächst die Dimensionen b_0 und h des Rechteckes, indem wir h nach der empirischen Formel „$h = \frac{2}{5} A$“ nehmen, wobei A die Armlänge des Balanciers bedeutet, somit ist $h = \frac{2}{5} . 180 = 72^{cm}$; aus der Festigkeitsgleichung

$$„PA = \frac{\mathfrak{S} b_0 h^2}{6}“ \text{ findet man: } b_0 = \frac{6 PA}{\mathfrak{S} h^2}, \text{ oder}$$

$$b_0 = \frac{6 . 7234 . 180}{200 . (72)^2} = 75^{cm};$$

setzen wir $\frac{c}{h} = \frac{1}{16}$, $\frac{B}{b} = 2{,}5$, so findet man: $\frac{1}{1 + a} = 0{,}67$ und $b = 0{,}67\, b_0 = 0{,}67 . 7{,}5 = 5^{cm}$, hiermit erhält man

$$c = \frac{h}{16} = \frac{72}{16} = 4{,}5^{cm},$$

$B = 2{,}5 . 5 = 12{,}5^{cm}$, die gefundenen Werthe sind also: $b = 50^{mm}$, $c = 45^{mm}$, $B = 125^{mm}$, $h = 720^{mm}$; die horizontale Mittelrippe erhält auch die Gesammtbreite $B = 125^{mm}$, oder etwas weniger, etwa 115^{mm} und die Dicke $c = 45^{mm}$; sie dient nur zur Vergrösserung der Steifheit (Starrheit) des Balanciers.

Die Höhe h_1 des Balanciers am Ende würde, weil in diesem Punkte das Biegungsmoment $= 0$ ist, auch $= 0$ werden, allein die in diesem Punkte auftretende lothrechte Schubkraft P ruft eine Schubspannung $\mathfrak{S} = \frac{3 P}{2 B h_2}$ hervor, wenn B und h_2 die Dimensionen des massiven Rechteckes im Punkte C sind; aus dieser Formel erhält man zwar

$$h_2 = \frac{3 P}{2 B \mathfrak{S}}, \text{ oder } h_2 = \frac{3 . 7234}{2 . 12{,}5 . 200} = 4{,}34^{cm};$$

da man aber durch das Balancier-Ende (Kopf des Balanciers) einen Doppelzapfen hindurchstecken muss, an dem andere Theile angreifen, so folgt daraus, dass die Höhe h_1 des Balanciers am Ende aus dem Durchmesser d_1 des durchgesteckten Zapfens bestimmt werden muss. Da sich die Kraft P beim Doppelzapfen auf beide Zapfen vertheilt, so ist die Dicke d_2 eines dieser Zapfen nach der in Beispiel 4 entwickelten Formel:

$$d_2 = 1{,}13 \sqrt{\frac{P}{2}} = 1{,}13 \sqrt{\frac{7234}{2}} = 68^{mm},$$

(die erlaubte Faserspannung pro Quadratmillimeter Querschnitt ist hier mit $\mathfrak{S} = 6^{Kg}$ angenommen), nehmen wir die Dicke d_3 des im Balancierkopf festsitzenden Zapfentheiles aus praktischen Gründen $d_3 = 76^{mm}$ an, so ergibt sich die Höhe h_1 nach der empirischen Formel „$h_1 = 2\,d_2 + d_3$" mit $h_1 = 2 \,.\, 68 + 76 = 212^{mm}$. Es erübrigt noch, die Schwingungsaxe des Balanciers zu berechnen; diese ist eine gleichschenkelige einfach tragende Axe, deren Länge aus constructiven Rücksichten oder nach einer empirischen Formel mit $l = 750^{mm}$ zwischen den Zapfenmitteln angenommen werde. Die von der Axe zu tragende Last besteht aus den an den Enden des Balanciers angreifenden Kräften P und P, also zusammen $2\,P$, und dem Gewichte G des Balanciers; dieses letztere bestimmt sich annähernd aus der empirischen Formel:

$$G^{Kg} = 0{,}076\,A^m \,.\, P^{Kg} = 0{,}076 \,.\, 1{,}8 \,.\, 7234 = 989{,}6^{Kg},$$

oder abgerundet $G = 990^{Kg}$, hiermit wird die ganze von der Axe zu tragende Last: $Q = 2\,P + G = 2 \,.\, 7234 + 900 = 15458^{Kg}$.

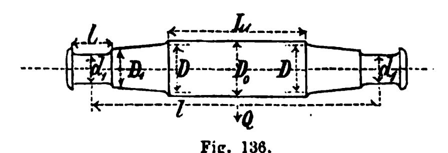


Fig. 136.

Die Dicke D_0 des Axkopfes (siehe Fig. 136) erhält man aus der Festigkeitsformel: $\frac{Q\,l}{4} = \frac{\mathfrak{S}\,\pi}{32} D_0^3$, mit

$$D_0 = \sqrt[3]{\frac{8\,Q\,l}{\mathfrak{S}\,\pi}} = \sqrt{\frac{8 \,.\, 15458 \,.\, 750}{12 \,.\, 3{,}14}} = 135^{mm},$$

hierbei ist vorausgesetzt, dass die Axe aus Gussstahl ist; der Durchmesser d_1 der beiden Endzapfen wird (siehe Beispiel 4):

$$d_1 = 2{,}26 \sqrt{\frac{P}{\mathfrak{S}} \left(\frac{l_1}{d_1}\right)},$$

wir setzen hier $\frac{l_1}{d_1} = 1{,}4$, $\mathfrak{S} = 12$ und erhalten:

$$d_1 = 2{,}26\sqrt{\frac{7729}{12} \cdot 1{,}4} = 68^{mm},$$

die Länge l_1 wird also: $l_1 = 1{,}4 \cdot 68 = 95^{mm}$; jeder der beiden Axschenkel erhält die Form eines abgestumpften Kegels, dessen grösserer Durchmesser D (Schenkeldicke an den Enden des Axkopfes) aus der in Beispiel 15 entwickelten Formel „$y = D_0\sqrt[3]{\frac{x}{a_1}}$“ sich wie folgt findet:

Es ist hier $y = D$, $x = \frac{l - L}{2}$, wobei L die Länge des Axkopfes bedeutet, die wir hier mit $L = 350^{mm}$ annehmen, die Nabenlänge des Balanciers sei mit $L_1 = 310^{mm}$ angenommen, ferner ist $a_1 = \frac{l}{2} = \frac{750}{2} = 375^{mm}$; hiermit erhält man:

$$D = D_0\sqrt[3]{\frac{\frac{l-L}{2}}{\frac{l}{2}}} = D_0\sqrt[3]{\frac{l-L}{l}} = 135\sqrt[3]{\frac{750 - 350}{750}},$$

$$D = 135\sqrt[3]{\frac{8}{15}} = 109{,}48^{mm} \text{ und abgerundet } D = 110^{mm};$$

der Durchmesser D_1 des dünneren Endes des Axschenkels (da wo sich der Zapfen an denselben anschliesst) ist um die doppelte Anlaufhöhe des Zapfens grösser, als der Zapfendurchmesser selbst. Die Anlaufhöhe des Zapfens wird nach der empirischen Formel

$$„e = 3^{mm} + 0{,}07\, d_1\text{“} = 3 + 0{,}07 \cdot 68 = 7\,{}^3\!/_4{}^{mm},$$

hiermit erhält man $D_1 = d_1 + 2e = 68 + 2 \cdot 7\,{}^3\!/_4 = 83\,{}^1\!/_2{}^{mm}$.

85. Dieselbe Aufgabe, wie in voriger Nummer, jedoch mit dem Unterschiede, dass der gusseiserne Balancier durch zwei Blechschilde ersetzt werden soll.

Auflösung. Wir nehmen wieder die Höhe h des Balanciers in der Mitte mit $h = 720^{mm}$ an und erhalten, den vollen Rechteck-Querschnitt vorausgesetzt, aus der Festigkeitsgleichung

$$„PA = \frac{\mathfrak{S}\, b h^2}{6}\text{“}: \qquad b = \frac{6PA}{\mathfrak{S}\, h^2}, \text{ oder } b = \frac{6 \cdot 7234 \cdot 180}{500 \cdot (72)^2} = 3^{cm},$$

wir nehmen also zwei Blechschilde, jedes aus Schmiedeisenplatten von 15^{mm} Dicke gebildet, und verbinden die Schilde mit einander

theils durch die dazwischengesteckten gusseisernen und vernieteten Nüsse, welche die Axe und die Endzapfen aufnehmen, und theils durch einige kurze Doppel-T-Stücke oder auf andere Weise zwischen den Endzapfen und der Axe des Balanciers; die übrigen Dimensionen bleiben dieselben, wie im vorigen Beispiele.

86. Für eine Wasserhaltungsmaschine von circa 300 Pferdekräften sind die Festigkeitsdimensionen eines schmiedeisernen, gleicharmigen Balanciers von kastenförmigem Querschnitte nach folgenden Angaben zu berechnen: Die Armlänge A des Balanciers ist $A = 5{,}1^{m}$, die den Balancier auf Biegung beanspruchende Kraft in der Kolbenstange ist rund $P = 32000^{Kg}$, Schwingungsaxe und Zapfen sind aus Gussstahl. (Siehe Fig. 137 und 138.)

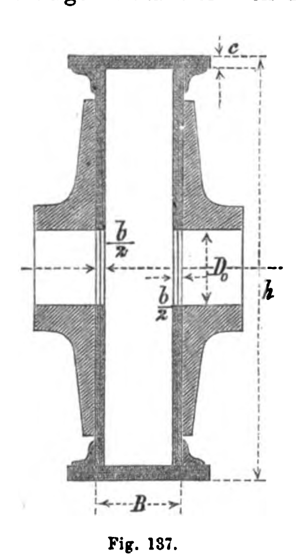


Fig. 137.

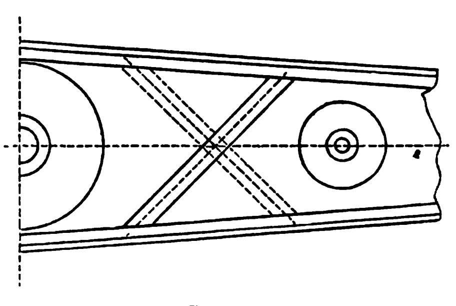


Fig. 138.

Auflösung. Mit Rücksicht auf die im Beispiel 84 gemachte mathematische Entwicklung machen wir folgende Annahmen: die Höhe h des Balanciers in der Mitte nehmen wir: $h = 1650^{mm}$, d. i. also etwas kleiner, als man nach der empirischen Formel „$h = \frac{A}{3}$“ erhalten würde, $\frac{B}{b} = 8$, $\frac{h}{c} = 50$; aus der Festigkeitsgleichung „$PA = \frac{\mathfrak{S}\, b_0\, h^2}{6}$“, (wobei ein voller Rechteck-Querschnitt vorausgesetzt ist) erhält man:

$$b_0 = \frac{6\,PA}{\mathfrak{S}\,h^2} = \frac{6 \,.\, 32000 \,.\, 510}{500 \,.\, (165)^2} = 7{,}2^{cm},$$

die Werthe für $\frac{B}{b}$, $\frac{h}{c}$ und b_0 in die in Beispiel 84 entwickelte Gleichung:

$$b = \frac{b_0}{1 + 6\left(\frac{c}{h}\right)\left[1 - 2\left(\frac{c}{h}\right)\right]\left(\frac{B}{b} - 1\right)}$$

eingesetzt, erhält man $b = 0{,}56\, b_0 = 0{,}56 \,.\, 7{,}2 = 4^{cm}$, die zwei verticalen Stege des Balanciers werden daher je aus zwei auf einander genieteten Plattenreihen von 10^{mm} Plattendicke gebildet u. zw. so, dass die Stossfugen der einen Schichte die Stossfugen der anderen Schichte rechtwinklig kreuzen, d. h. also die Stossfugen beider Schichten um 90^0 gegen einander versetzt sind, wodurch eine möglichst grosse Starrheit des Balanciers (eine nothwendige Eigenschaft neben der genügenden Festigkeit) erzielt wird. Die Dicke c der horizontalen Gurtungen wird: $c = \frac{h}{50} = \frac{1650}{50} = 33^{mm}$, es werden also diese Gurtungen aus je drei Platten von à 11^{mm} Dicke gebildet, welche nach den Regeln des Maschinenbaues mit einander vernietet und mit den verticalen Stegen durch Winkeleisen verbunden werden. Die Breite B der Gurtungen, exclusive jener Theile, welche wegen der Vernietung mit dem Winkeleisen zugegeben werden müssen, wird $B = 8\,b = 8 \,.\, 4 = 32^{cm}$; die Winkeleisen wurden hier bei Berechnung der Querschnittsdimensionen zu Gunsten der Festigkeit und Starrheit des Balanciers nicht berücksichtigt. Die Durchmesser d_1 der Doppelzapfen an den Enden ergeben sich mit:

$$d_1 = 2{,}26\sqrt{\frac{P}{\mathfrak{S}} \cdot \left(\frac{l_1}{d_1}\right)} = 2{,}26\sqrt{\frac{16000}{12} \,.\, 1{,}4} = 97^{mm};$$

die Höhe des Balanciers am Ende, dort wo der Zapfen durchgesteckt wird, ergibt sich nicht aus einer Festigkeitsgleichung, sondern aus constructiven Rücksichten nach einer empirischen Formel des Maschinenbaues, ähnlich wie in Beispiel 84 und unter gleichzeitiger Berücksichtigung des Umstandes, dass das Längenprofil des Balancierarmes eine ansprechende, geschmackvolle Form erhalte. Nimmt man den mittleren Theil des Endzapfens mit 107^{mm} Durchmesser an, so wird sich die Höhe h_1 des Balancier-Querschnittes, gemessen in der durch die Zapfenaxe gelegten Verticalebene, mit ungefähr 321^{mm} ergeben.

Der Durchmesser D_0 des Axkopfes der Schwingungsaxe wird erhalten aus der Gleichung:

$$\frac{Q\,l}{4} = \frac{\mathfrak{S}\,\pi\, D_0^3}{32} \quad \text{mit} \quad D_0 = \sqrt[3]{\frac{8\,Q\,l}{\mathfrak{S}\,\pi}}.$$

Die von der Axe zu tragende Last Q setzt sich zusammen aus den zwei Kräften P, P, an den Enden des Balanciers wirkend,

und dem Gewichte G des Balanciers: $G = 0{,}076\,PA$; es ist angenähert $G = 0{,}076 \,.\, 32000 \,.\, 5{,}1 = 12405^{Kg}$, die Länge l der Axe zwischen den Zapfenmitteln nehmen wir: $l = 1400^{mm}$, die Belastung der Axe ist: $Q = 2 \,.\, 32000 + 12403 = 76403^{Kg}$, hiermit ergibt sich:

$$D_0 = \sqrt[3]{\frac{8 \,.\, 76403 \,.\, 1400}{12 \,.\, 3{,}14}} = 280^{mm}.$$

Axe und Endzapfen werden aus Gussstahl vorausgesetzt. Der Durchmesser d der Zapfen der Axe wird:

$$d = 2{,}26 \sqrt{\frac{P}{\mathfrak{S}}\left(\frac{l}{d}\right)} = 2{,}26 \sqrt{\frac{\frac{76403}{2} \,.\, 1{,}4}{12}} = 150{,}7^{mm}.$$

Die Nabenlänge L_1 des Balanciers nehmen wir:

$$L_1 = 0{,}4\,h = 0{,}4 \,.\, 1650 = 660^{mm},$$

die Länge L des Axkopfes nehmen wir mit $L = 720^{mm}$, hiermit ergibt sich der Durchmesser D des dickeren Endes des Axschenkels mittelst der in Beispiel 84 gebrauchten Formel:

$$D = D_0 \sqrt[3]{\frac{l - L}{l}} = 280 \sqrt[3]{\frac{1400 - 720}{1400}} = 222^{mm}.$$

87. Bei einer horizontalen Dampfmaschine sei der in der Kolbenstange wirkende Druck $P = 7300^{Kg}$; es sind die Querschnittsdimensionen zweier schmiedeiserner Führungsschienen des Kreuzkopfes nach folgenden Angaben zu berechnen: Die Entfernung der Befestigungspunkte einer Führungsschiene von einander sei $l = 124^{cm}$, die Länge L_1 der Maschinenkurbel sei: $L_1 = 45^{cm}$, die Länge L_2 der Schubstange: $L_2 = 225^{cm}$, der Querschnitt einer Schiene sei ein Rechteck von den Dimensionen b und h.

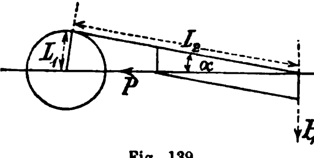


Fig. 139.

Auflösung. Die, eine Führungsschiene biegende Kraft ist der Normaldruck $P_1 = P \operatorname{tag} \alpha$, wenn α der grösste Ausschlagwinkel der Schubstange ist. (Siehe Fig. 139.)

Aus der Figur ist ersichtlich:

$$\operatorname{tag} \alpha = \frac{L_1}{L_2} = \frac{45}{225} = \frac{1}{5}, \text{ also } P_1 = 0{,}2\,P = 0{,}2 \,.\, 7300 = 1460^{Kg}.$$

Obzwar die grösste, die Schiene biegende Kraft beim grössten Ausschlagwinkel der Schubstange nicht in der Mitte der Länge der Schiene angreift, so nehmen wir doch der Einfachheit wegen an, als

ob die Schiene als ein an beiden Enden unterstützter, prismatischer Körper in der Mitte seiner Länge belastet würde und haben daher die Festigkeitsformel „$\frac{P_1 l}{4} = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{6}$“ zu gebrauchen; hieraus ist

$$h = \sqrt{\frac{6 P_1 l}{4 \mathfrak{S} b}} = \sqrt{\frac{6 P \frac{L_1}{L_2} . l}{4 \mathfrak{S} b}} = \sqrt{\frac{3 P L_1 l}{2 \mathfrak{S} L_2 b}}.$$

Die Breite b der Schiene, resp. der Gleitfläche ergibt sich aus der empirischen Formel für die Grösse der Gleitfläche: $b l_1 = \frac{P_1}{0{,}06}$, wobei angenommen wird, dass der Druck auf die Flächeneinheit (Quadrat-Millimeter) $0{,}06^{Kg}$ betrage, es ist also

$$b l_1 = \frac{1460}{0{,}06} = 24333,$$

wobei l_1 die Länge der Gleitfläche bedeutet; nehmen wir ferner das Verhältniss $\frac{l_1}{b} = 2$ an, so gibt dies: $b . 2b = 2b^2 = 24333$, hieraus ist $b = \sqrt{12166} = 110^{mm}$ (abgerundet), hiermit wird

$$l_1 = 2b = 2 . 110 = 220^{mm},$$

setzt man nun die Werthe: $P = 7300$, $L_1 = 45^{cm}$, $L_2 = 225^{cm}$, $l = 124^{cm}$, $b = 11^{cm}$, $\mathfrak{S} = 400$ in die Formel für h ein, so erhält man: $h = \sqrt{\frac{3 . 7300 . 45 . 124}{2 . 400 . 225 . 11}} = 4{,}69^{cm}$, und abgerundet $h = 47^{mm}$; würden statt zwei Führungsschienen vier angewendet, so wäre die Höhe h_1 einer Führungsschiene:

$$h = 47 \sqrt{\frac{1}{2}} = 47 . 0{,}7 = 32{,}9 \text{ und abgerundet } h_1 = 33^{mm}.$$

Stecken die Gleitbacken zu den Führungsschienen auf Zapfen vom Durchmesser d und der Länge l (Verlängerungen des Kreuzkopfbolzens), so ist dieser Durchmesser d ebenfalls aus dem Normaldruck $P_1 = 1460^{Kg}$ zu berechnen, von welcher Kraft auf jeden der beiden Zapfen die Hälfte kommt; man hat also zur Berechnung dieses Zapfens die Festigkeitsformel:

$$\frac{P_1}{2} . \frac{l}{2} = \frac{\mathfrak{S} \pi d^3}{32}, \text{ woraus } \frac{P_1}{4} \left(\frac{l}{d}\right) = \frac{\mathfrak{S} \pi d^2}{32} \text{ und}$$

$$d = \sqrt{\frac{8 P_1}{\mathfrak{S} \pi} . \left(\frac{l}{d}\right)}$$

folgt; nimmt man hier $\frac{l}{d} = 2{,}5$ und setzt die Zahlenwerthe $P_1 = 1460$, $\mathfrak{S} = 400$ ein, so ist:

$$d = \sqrt{\frac{8 \,.\, 1460}{400 \,.\, 3{,}14} \,.\, 2{,}5} = 4{,}8^{cm};$$

da aber im vorliegenden Falle die Länge l des Zapfens gleich der Breite der Gleitfläche $b = 110^{mm}$ zu nehmen ist, so berechnet sich der Durchmesser d direct aus der Formel „$\frac{P_1 l}{4} = \frac{\mathfrak{S} \pi d^3}{32}$" mit

$$d = \sqrt[3]{\frac{8 P_1 l}{\mathfrak{S} \pi}} = \sqrt[3]{\frac{8 \,.\, 1460 \,.\, 11}{400 \,.\, 3{,}14}} = 4{,}7^{cm},$$

also nahezu derselbe Werth wie oben.

Das Mittelstück des Kreuzkopfzapfens wird aber auch durch den Normaldruck P_1 auf Biegung beansprucht und berechnet sich der Durchmesser D dieses Mittelstückes aus der Gleichung:

$$\frac{P_1 e}{2} = \frac{\mathfrak{S} \pi D^3}{32},$$

wenn e die Entfernung von der Mitte des Kreuzkopfzapfens bis zur Mitte des Gleitbackenzapfens bedeutet. Die Werthe der Spannung $\mathfrak{S}$ aus dieser Gleichung und der für den Gleitbackenzapfen geltenden Gleichung: $\frac{P_1 l}{4} = \frac{\mathfrak{S} \pi d^3}{32}$, einander gleich gesetzt, gibt:

$$\mathfrak{S} = \frac{8 P_1 l}{\pi d^3} = \frac{16 P_1 e}{\pi D^3}, \text{ hieraus ist}$$

$$\frac{D^3}{d^3} = \frac{2e}{l} \text{ und } D = d \sqrt[3]{\frac{2e}{l}};$$

es werde $e = 160^{mm}$ angenommen, so ist

$$D = 48 \sqrt[3]{\frac{2 \,.\, 160}{160}} = 69{,}12^{mm}$$

und abgerundet $D = 70^{mm}$; die Länge dieses Zapfens wird

$$1\tfrac{1}{2}\, D = 1\tfrac{1}{2} \,.\, 70 = 105^{mm}$$

genommen.

88. Für eine hydraulische Presse, welche einen Druck von $P = 180000^{Kg}$ ausüben soll, sind die Querschnittsdimensionen der Presskopfplatte, die den ganzen Druck P aufzunehmen hat, nach

folgenden Angaben zu berechnen: Die Länge der Platte zwischen den Befestigungsschrauben sei $l = 80^{cm}$, der Querschnitt der Platte ist aus nachstehender Figur ersichtlich.

Auflösung. Wir denken uns die drei verticalen Rippen des Querschnittes zu einer einzigen Rippe in der Mitte der Breite vereinigt und erhalten dadurch den einfachen T-Querschnitt; die übrigen Rippen (Nebenrippen) zur Verbindung der drei Hauptrippen lassen wir in der Rechnung unberücksichtigt. Die Presskopfplatte kann als ein prismatischer Balken angesehen werden, der an seinen beiden Enden unterstützt und auf seiner ganzen Länge gleichmässig belastet ist. Man hat daher die Festigkeitsformel „$\frac{Pl}{8}$“ $= \mathfrak{S} Z$ anzuwenden. Das Trägheitsmoment des T-Querschnittes ist:

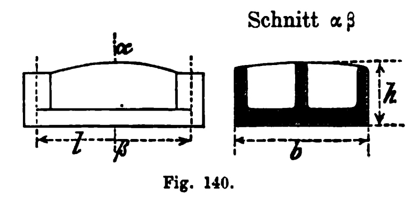


Fig. 140.

$$J = \frac{1}{3}\left[b\,(c_1^3 - f^3) + b_1\,(f^3 + c_2^3)\right]$$

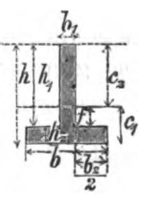


Fig. 141.

(siehe nebenstehende Figur), oder

$$J = \frac{1}{3}\,(b\,c_1^3 + b_1\,c_2^3 - b_2\,f^3);$$

die Entfernung c_1 der horizontalen Schweraxe von der Unterkante des T-Querschnittes ist:

$$c_1 = \frac{b\,h_2^2 + b_1\,h_1\,(h + h_2)}{2\left[b\,h - (b - b_1)\,h_1\right]};$$

da man hier zwei verschiedene Querschnittsmoduli, nämlich $Z_1 = \frac{J}{c_1}$ und $Z_2 = \frac{J}{c_2}$ erhält, so ist es am zweckmässigsten, um das Material gut auszunützen, den Querschnitt als einen Querschnitt von gleicher Festigkeit zu berechnen. Nach der in Beispiel 38 angegebenen Methode der Berechnung der Querschnitte gleicher Festigkeit nehmen wir die ganze Höhe h gleich einem Vielfachen der Dicke des verticalen Steges, da aber im vorliegenden Falle die Dicke des letzteren voraussichtlich bedeutend stärker ausfallen wird, als die Dicke der horizontalen Platte, so nehmen wir an, die Dicke der letzteren sei b_1, die Dicke des verticalen Steges sei $2\,b_1$ und $h = 2\,n\,b_1$, die Breite b der horizontalen Flantsche sei unbekannt. Nach der Schwerpunktslehre ist bekanntlich das Product aus der Querschnittsfläche F und der Entfernung c_1 ihres Schwerpunktes von einer Ge-

raden (hier die untere Kante der horizontalen Flantsche) gleich der Summe der Producte aus den einzelnen Flächentheilen $f_1, f_2 \ldots$ des Querschnittes, in die Entfernungen $d_1, d_2 \ldots$ der Schwerpunkte jener Flächentheile von derselben Geraden; nach diesem Satze hat man die Gleichung:

$$F c_1 = f_1 d_1 + f_2 d_2, \text{ hierbei ist:}$$

$$f_1 = b b_1, \; f_2 = 2 b_1 (2 n b_1 - b_1) = 2 b_1^2 (2 n - 1),$$

$$d_1 = \frac{b_1}{2}, \; d_2 = \frac{2 n b_1 - b_1}{2} + b_1 = \frac{2 n b_1 - b_1 + 2 b_1}{2} =$$

$$= \frac{b_1}{2} (2 n + 1), \; c_1 = \frac{2 n b_1}{3},$$

diese Werthe in die obige Schwerpunktsgleichung eingesetzt:

$$\left[b b_1 + 2 b_1^2 (2 n - 1)\right] \frac{2 n b_1}{3} = \frac{b b_1^2}{2} + b_1^3 (4 n^2 - 1),$$

diese Gleichung ist nach b aufzulösen. Von den Nennern befreit und geordnet:

$$4 n b_1^2 b + 8 b_1^3 n (2 n - 1) = 3 b b_1^2 + 6 b_1^3 (4 n^2 - 1), \text{ oder}$$

$$b (4 n b_1^2 - 3 b_1^2) = 6 b_1^3 (4 n^2 - 1) - 8 b_1^3 n (2 n - 1), \text{ hieraus ist}$$

$$b = \frac{2 b_1^3 (2 n - 1) \left[3 (2 n + 1) - 4 n\right]}{b_1^2 (4 n - 3)} = \frac{2 b_1 (2 n - 1)(2 n + 3)}{4 n - 3}, \text{ oder}$$

$$b = \frac{2 b_1 (4 n^2 + 4 n - 3)}{4 n - 3} = 2 b_1 \left(\frac{4 n^2}{4 n - 3} + 1\right).$$

Setzt man diesen Werth von b in die Formel für das Trägheitsmoment

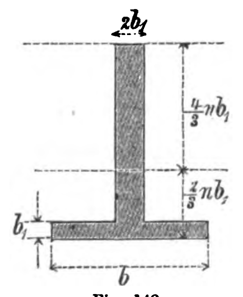


Fig. 142.

$$„J = \frac{1}{3} (b c_1^3 + b_1 c_2^3 - b_2 f^3)“$$

ein, wobei im vorliegenden Falle

$$c_1 = \frac{2 n b_1}{3}, \; c_2 = \frac{4 n b_1}{3},$$

ferner statt b_1 der Werth $2 b_1$ (Dicke des verticalen Steges), $f = \frac{2}{3} n b_1 - b_1$, und $b_2 = b - 2 b_1$ zu setzen ist (siehe nebenstehende Figur), und bedient man sich ferner der Vereinfachung der Rechnungswegen der abgekürzten Bezeichnung:

$$\frac{4 n^2}{4 n - 3} = \alpha, \; \frac{2 n}{3} = \beta, \text{ also } b = 2 b_1 (\alpha + 1),$$

so erhält man:

$$J = \frac{1}{3}\left\{2 b_1^4 (\alpha + 1) \beta^3 + 16 \beta^3 b_1^4 - \left[2 b_1 (\alpha + 1) - 2 b_1\right] (\beta - 1)^3 b_1^3\right\},$$

b_1^4 herausgehoben und innerhalb der Klammer reducirt:

$$J = \frac{b_1^4}{3}\left[2 \beta^3 (\alpha + 1) + 16 \beta^3 - 2 \alpha (\beta - 1)^3\right], \text{ oder}$$

$$J = \frac{2 b_1^4}{3}\left[\beta^3 (\alpha + 9) - \alpha (\beta - 1)^3\right],$$

die Werthe von α und β wieder eingesetzt:

$$J = \frac{2 b_1^4}{3}\left[\frac{8 n^3}{27}\left(\frac{4 n^2}{4 n - 3} + 9\right) - \frac{4 n^2}{4 n - 3}\left(\frac{2 n}{3} - 1\right)^3\right],$$

die innerhalb der äusseren Klammer angezeigten Operationen ausgeführt und sodann reducirt:

$$J = \frac{2 b_1^4}{3}\left[\frac{432 n^4 - 432 n^3 + 108 n^2}{27 (4 n - 3)}\right] =$$

$$= \frac{8 b_1^4 n^2}{3 (4 n - 3)} (4 n^2 - 4 n + 1), \text{ oder}$$

$$\underline{J = \frac{8 b_1^4 n^2}{3 (4 n - 3)} (2 n - 1)^2,}$$

hiermit ergibt sich:

$$Z_1 = \frac{8 b_1^4 n^2 (2 n - 1)^2}{3 (4 n - 3)} : \frac{2 n b_1}{3} = \frac{4 n b_1^3 (2 n - 1)^2}{4 n - 3} \text{ und}$$

$$Z_2 = \frac{8 b_1^4 n^2 (2 n - 1)^2}{3 (4 n - 3)} : \frac{4 n b_1}{3} = \frac{2 b_1^3 n (2 n - 1)^2}{4 n - 3};$$

nun ist es gleichgiltig, ob man $M = \mathfrak{S}_1 Z_1$ oder $M = \mathfrak{S}_2 Z_2$ setzt, weil $\mathfrak{S}_1 Z_1 = \mathfrak{S}_2 Z_2$ ist (siehe Beispiel 37); setzen wir

$$M = \mathfrak{S}_1 Z_1 = \frac{\mathfrak{S}_1 . 4 n b_1^3 (2 n - 1)^2}{4 n - 3},$$

so ist hieraus

$$b_1 = \sqrt[3]{\frac{(4 n - 3) M}{4 n (2 n - 1)^2 \mathfrak{S}_1}},$$

wir nehmen hier $n = 2$ an und setzen die Zahlenwerthe:

$$M = \frac{P l}{8} = \frac{180000 . 80}{8} = 1800000,$$

$\mathfrak{S}_1 = 250^{Kg}$ per Quadratcentimeter ein, man erhält:

$$b_1 = \sqrt[3]{\frac{5 \,.\, 1800000}{8 \,.\, 9 \,.\, 250}} = 7{,}937^{cm}$$

und abgerundet $b_1 = 8^{cm}$, hiermit wird die Dicke des verticalen Steges $2\,b_1 = 16^{cm}$, die Höhe $h = 2\,n\,b_1 = 2 \,.\, 2 \,.\, 8 = 32^{cm}$, die Breite der Platte wird:

$$b = 2\,b_1\left(\frac{4\,n^2}{4\,n - 3} + 1\right) = 2 \,.\, 8\left(\frac{4 \,.\, 2^2}{4 \,.\, 2 - 3} + 1\right) = 67{,}2^{cm}.$$

Die Dicke des verticalen Steges, $2\,b_1 = 16^{cm}$, zertheilen wir in die drei einander gleichen Dicken der drei verticalen Stege der Presskopfplatte und erhalten daher die Dicke einer der drei verticalen Stege $\frac{160}{3} = 53^{1/3\,mm}$, da es bekanntlich erlaubt ist, Querschnittstheile in horizontalem Sinne zu verschieben, ohne den Werth des ganzen Querschnittsmoduls zu ändern.

Eine andere Methode, die Querschnittsdimensionen des **T**-Querschnittes auszurechnen, ohne Rücksicht darauf, ob der Querschnitt die Form der gleichen Festigkeit hat, oder nicht, ist die, dass man die Dimensionen probeweise annimmt, sie in die Formel für Z einsetzt und zusieht, ob die Gleichung „$M = \mathfrak{S}\,Z$“ erfüllt wird, wobei es, abgesehen vom Materialverbrauch, selbstverständlich nichts schadet, wenn $\mathfrak{S}\,Z$ grösser als M ausfällt.

89. Eine dreieckförmige Blattfeder aus gehärtetem feinen Federstahl wird zur Ausübung einer Zugkraft von $P = 12^{Kg}$ benutzt, zur Rückbewegung eines Schiebers oder einer Klappe oder dergl. zum Behufe des Verschlusses einer Oeffnung; es sind die Querschnittsdimensionen dieser Feder zu berechnen, wenn die Länge derselben von der Befestigungsstelle bis zum Angriffspunkte der sie biegenden Kraft (Angriffspunkt der Zugstange) $l = 400^{mm}$ und der Hub der Zugstange (Hub des Federendes) $f_1 = 54^{mm}$ ist.

Auflösung. Die dreieckförmige Blattfeder ist hier offenbar ein an einem Ende eingespannter und am anderen Ende belasteter Körper von der Form der gleichen Festigkeit, der sich in Folge der Belastung bekanntlich nach einer Kreislinie biegt. Nach der Lehre von der Biegungsfestigkeit ist die Senkung des Endpunktes $f = \frac{6\,P\,l^3}{E\,b\,h^3}$, wenn E der Elasticitätsmodul des Materials, $E = 20000$, b die Breite und h die Höhe oder Dicke der Feder ist; setzt man in diese Gleichung anstatt P den Werth desselben aus der Festigkeitsformel „$P\,l = \frac{\mathfrak{S}\,b\,h^2}{6}$“, nämlich $P = \frac{\mathfrak{S}\,b\,h^2}{6\,l}$ ein, so hat man:

$$f = \frac{6\,\mathfrak{S}\,b\,h^2\,l^3}{6\,l\,b\,h^3\,E} = \frac{\mathfrak{S}\,l^2}{h\,E}, \text{ oder } \frac{f}{l} = \frac{\mathfrak{S}\,l}{E\,h},$$

welcher Ausdruck die Grösse der Biegsamkeit der Feder angibt; aus der letzten Gleichung folgt: $h = \frac{\mathfrak{S}\, l^2}{E f}$. Die ganze Senkung f des Federendes setzt sich zusammen aus der Theilsenkung f_1, um welche die Feder aus ihrer ursprünglichen Ruhelage schon herabgebogen werden musste, um bei der Ruhelage der Zugstange noch einen Zug P_1 auf die Stange auszuüben, und der Senkung f_2, gleich dem Hub der Zugstange; nehmen wir diese Kraft P_1, mit der die Feder an der Zugstange noch ziehen muss, wenn letztere in der Ruhelage ist, mit $P_1 = 3^{Kg}$ an, und bedenken, dass vermöge der Gleichung „$f = \frac{6 P l^3}{E b h^3}$" die Senkungen den Kräften proportional sind, so kann man schreiben:

$$f_1 : (f_1 + f_2) = 3 : 12, \text{ oder:}$$

$$f_1 : \left[(f_1 + f_2) - f_1\right] = 3 : (12 - 3), \text{ oder:}$$

$$f_1 : f_2 = 1 : 3, \text{ woraus } f_1 = \frac{f_2}{3} = \frac{54}{3} = 18^{mm}$$

ist; hiermit wird $f = f_1 + f_2 = 18 + 54 = 72^{mm}$, die Biegsamkeit der Feder wird: $\frac{f}{l} = \frac{72}{400} = \frac{9}{50}$; setzt man in die letzte Gleichung für h die Zahlenwerthe: $\mathfrak{S} = 40$, $\frac{l}{f} = \frac{50}{9}$, $E = 20000$, $l = 400$ ein, so erhält man: $h = 40 \cdot \frac{50}{9} \cdot \frac{400}{20000} = 4^{4}/_{9}{}^{mm}$.

Aus der Gleichung „$P = \frac{\mathfrak{S}\, b h^2}{6 l}$" ist

$$b = \frac{6 P l}{\mathfrak{S}\, h^2}, \text{ oder } b = \frac{6 \cdot 12 \cdot 400}{40 \cdot (4^4/_9)^2} = 36{,}45^{mm}$$

und abgerundet $b = 37^{mm}$. Selbstverständlich erhält die Feder an ihrem spitzen Ende eine kleine kreisförmige Erweiterung für ein Oehr zur Aufnahme der Zugstange.

Anmerkung. Der im vorliegenden Beispiel eingesetzte Werth von $\mathfrak{S} = 40$ ist gleich dem halben Zugtragmodul, man hat daher eine zweifache Tragsicherheit, die hier hinreichend ist; man kann hier nicht so hohe Sicherheitsgrade anwenden, wie in den Festigkeitsberechnungen des Maschinenbaues im Allgemeinen, weil sonst die Querschnittsdimensionen der Federn zu gross ausfallen würden und hiermit die Biegsamkeit derselben (Elasticität) zu gering würde, was auch aus der Formel für die Biegsamkeit $\frac{f}{l} = \frac{\mathfrak{S}\, l}{E h}$ hervorgeht; wird h vergrössert, so wird der Werth des Bruches $\frac{f}{l}$ kleiner. Man hat bei der Wahl des Werthes von $\mathfrak{S}$ nur darauf

zu sehen, dass die Beanspruchung weit genug unter dem Tragmodul, also unter der Elasticitätsgrenze bleibt, wenn auch die Bruchsicherheit nicht grösser als 3 bis 4 ist, dafür hat man aber in dem Federstahl ein in Bezug auf seine Festigkeit verlässliches Material.

90. Es sind die Querschnittsdimensionen einer Eisenbahnwagenfeder, die als ein Trapez- (Stufen-) Federwerk ausgeführt werden soll, zu berechnen, wenn die Belastung der Feder $2P = 3000^{Kg}$, die Länge derselben zwischen den Aufhängepunkten $1{,}1^m$ und die Durchbiegung bei der angegebenen Belastung $f = 50^{mm}$ betragen soll. (Siehe die folgende Figur.)

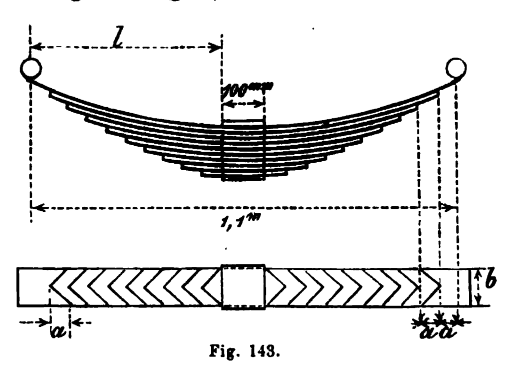


Fig. 143.

Auflösung. Die Grösse der Biegsamkeit dieser Feder ist dieselbe, wie im vorigen Beispiele, ausgedrückt durch den Quotienten $\frac{f}{l} = \frac{\mathfrak{S}\, l}{E h}$, wenn h die Dicke eines Blattes der Feder bezeichnet; man hat also $\frac{f}{l} = \frac{50}{500} = \frac{1}{10}$. Bezeichnet a die Grösse der Abstufung, so ist die Tragkraft der Feder (an jedem Ende derselben): $P = \frac{\mathfrak{S}\, b h^2}{6 a}$, da aber $a = \frac{l}{n}$ ist, wenn n die Anzahl der Blätter bezeichnet, so hat man auch: $P = \frac{\mathfrak{S}\,(n b) h^2}{6 l}$; aus der Gleichung „$\frac{f}{l} = \frac{\mathfrak{S}\, l}{E h}$“ ist $h = \frac{\mathfrak{S}\, l}{E} \cdot \frac{l}{f} = \frac{40 \,.\, 500}{20000} \,.\, 10 = 10^{mm}$, aus der Gleichung für P folgt: $n b = \frac{6 P l}{\mathfrak{S}\, h^2} = \frac{6 \,.\, 1500 \,.\, 500}{40 \,.\, 100} = 1125^{mm}$.

Nimmt man ein Blatt 100^{mm} breit an, so ist die Anzahl der Blätter $n = \frac{1125}{100} = 11{,}25$, oder $n = 11$ angenommen, so wird die Breite eines Blattes $b = \frac{1125}{11} = 102{,}3^{mm}$.

Formt man jedoch die einzelnen Federn des Blattfederwerkes so, dass die Breite jeder Feder constant $= b$, also nicht dreieckig ist, und die Enden jeder Feder nach einer kubischen Parabel zugeschärft werden, also die Höhe h jeder Feder variabel ist, so folgt aus der diesem Falle entsprechenden Gleichung der elastischen Durchbiegung: $f = \frac{8 P l^3}{E b h^3}$ die Biegsamkeit $\frac{f}{l} = \frac{8 P l^2}{E b h^3}$, oder für P den Werth: $P = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{6 l}$ gesetzt, gibt: $\frac{f}{l} = \frac{4 l \mathfrak{S}}{3 E h}$, hieraus ist

$$h = \frac{4}{3} \cdot \frac{\mathfrak{S} l}{E} \cdot \frac{l}{f}, \text{ oder } h = \frac{4}{3} \cdot \frac{40 . 500}{20000} . 10 = 13^1/_3{}^{mm},$$

diesen Werth von h in die Gleichung „$n b = \frac{6 P l}{\mathfrak{S} h^2}$“, sowie die übrigen Zahlenwerthe eingesetzt, erhält man:

$$n b = \frac{6 . 1500 . 500}{40 . (13^1/_3)^2} = 632{,}8$$

und abgerundet $n b = 633^{mm}$, nimmt man $n = 9$ an, so wird die Breite der Feder $b = \frac{633}{9} = 70^1/_3{}^{mm}$.

91. Eine Spiralfeder von rechteckigem Querschnitte sei mit ihrem inneren Ende mit einer Welle, die sich nur drehen, aber in ihrer Längenrichtung nicht verschieben kann, durch einen radial auf der Welle sitzenden Arm von der Länge $R_1 = 50^{mm}$ (Entfernung vom inneren Federende bis zum Wellenmittel) fest verbunden; die Welle soll in einem radialen Abstande von $R_0 = 150^{mm}$ mittelst der Spiralfeder einen Druck von $P = 80^{Kg}$ übertragen, der von einem radial auf der Welle sitzenden Arme von der Länge R_0 ausgeübt werden soll; die Feder soll bei diesem Drucke $^1/_8$ Drehung der Welle bewirken, sich also um einen Winkel von $\frac{360}{8} = 45^0 = \frac{\pi}{4}$ verwinden; das äussere Ende der Feder sei um $R = 100^{mm}$ vom Wellenmittel entfernt, es sind die Querschnittsdimensionen der Feder, die Anzahl n der Windungen und die Länge L der gestreckt gedachten Feder zu berechnen. (Siehe nebenstehende Figur.)

Fig. 144.

Auflösung. Wir setzen als Material feinsten, gehärteten und angelassenen Gussstahl voraus, dessen Elasticitätsmodul $E = 30000$, und dessen Zugtragmodul (Zugbeanspruchung pro Quadratmillimeter Querschnitt

bis zur Elasticitätsgrenze) $Z = 150$ ist. Die Dicke der Feder sei h, ihre Breite b, der Verdrehungswinkel $\alpha = \frac{\pi}{4} = 0{,}785$. Die Kraft P hat nicht nur das Bestreben, die Welle mit dem statischen Momente PR_0 zu verdrehen, sondern auch die Feder zu biegen. Die Theorie der Spiralfeder weist nach, dass das statische Moment der jeden einzelnen Querschnitt biegenden Kraft constant und gleich dem Momente der die Feder verdrehenden Kraft ist, d. h. also, die Feder ist ein Körper von der Form der gleichen Biegungsfestigkeit, und es gilt somit die Gleichung: $PR_0 = \frac{\mathfrak{S} J}{c}$, woraus die Tragkraft für eine Feder von rechteckigem Querschnitte $P = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{6 R_0}$ folgt. Da in dieser Gleichung die zwei Unbekannten b und h vorkommen, so nehmen wir die eine Unbekannte, z. B. $h = 5^{mm}$ an, aus der Gleichung für P folgt: $b = \frac{6 P R_0}{\mathfrak{S} h^2}$, die Zahlenwerthe $\mathfrak{S} = 60$, $P = 80$, $R_0 = 150$, $h = 5$ eingesetzt, gibt:

$$b = \frac{6 \,.\, 80 \,.\, 150}{60 \,.\, 25} = 48^{mm}.$$

Unter der Annahme, dass die Spiralfeder nach einer Kreis-Evolvente gerollt sei, findet man aus der Theorie der Spiralfeder den Verdrehungswinkel:

$$\alpha = \frac{12 \pi n R_0 P}{b h^3 E} (R + R_1 + h),$$

hierin anstatt P den Werth: $P = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{6 R_0}$ eingesetzt:

$$\alpha = \frac{2 \pi n \mathfrak{S}}{E} \,.\, \frac{(R + R_1 + h)}{h},$$

hieraus ist die Anzahl n der Windungen:

$$n = \frac{\alpha E h}{2 \pi \mathfrak{S} (R + R_1 + h)},$$

die Zahlenwerthe: $\alpha = \frac{\pi}{4} = 0{,}785$, $E = 30000$, $h = 5$, $\mathfrak{S} = 60$, $R = 100$, $R_1 = 50$ eingesetzt:

$$n = \frac{\frac{\pi}{4} \,.\, 30000 \,.\, 5}{2 \pi \,.\, 60 (100 + 50 + 5)} = 2{,}016;$$

hiermit wird die Länge der Feder:

$$l = \pi n (R + R_1 + h) = 3{,}14 \,.\, 2{,}016\,(100 + 50 + 5) = 981{,}2^{mm};$$

denselben Werth von l erhält man auch aus der Formel:

$$l = \frac{\alpha E h}{2 \mathfrak{S}} = \frac{\frac{\pi}{4} \,.\, 30000 \,.\, 5}{2 \,.\, 60} = 981{,}2^{mm}.$$

92. Die in vorigem Beispiele berechnete Spiralfeder soll durch eine Drehschraubenfeder von rechteckigem Querschnitte und einem mittleren Halbmesser von $R = 70^{mm}$ ersetzt werden, wenn der Verdrehungswinkel wieder $\alpha = 45^0$ betragen soll; man fragt nach den Querschnittsdimensionen der Feder, der Anzahl n der Windungen und der Länge l der gestreckt gedachten Feder.

Auflösung. Die Kraft P wirkt auch hier an einem mit der Welle fest verbundenen Arme oder an dem Umfange einer mit der Welle fest verbundenen Scheibe, die mit dem oberen Federende so verbunden ist, dass sich die Feder um ihre Axe drehen, aber nicht in ihrer Längenrichtung verschieben kann, während das andere Federende festgehalten wird, so, dass also die Wirkung dieser Feder dieselbe, wie die der Spiralfeder in Beispiel 91 ist, nämlich die Hervorbringung einer Axendrehung (Drehung der Welle). Die Kraft P biegt auch hier alle einzelnen Federelemente, wie bei der Spiralfeder, u. zw. hat man es auch hier mit einem Körper von der Form der gleichen Biegungsfestigkeit zu thun, wenn der Drahtquerschnitt constant ist, was hier auch vorausgesetzt wird. Man hat also für die Tragkraft P der flachdrähtigen Drehschraubenfeder: $P = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{6 R_0}$, wenn R_0 der Halbmesser jener Scheibe ist, an deren Umfange die Kraft P angreift. Setzen wir dasselbe Material wie in Beispiel 91 voraus, nehmen die Dicke h der Feder, $h = 5^{mm}$ an, so erhält man aus der Formel für P die Breite:

$$b = \frac{6 P R_0}{\mathfrak{S} h^2} = \frac{6 \,.\, 80 \,.\, 150}{60 \,.\, 25} = 48^{mm}.$$

Für den Verdrehungswinkel α liefert die Theorie dieser Feder die Formel:

$$\alpha = \frac{24 \pi n P R_0}{E b h^3} \left(R + \frac{h}{2}\right),$$

hierin den Werth von P eingesetzt:

$$\alpha = \frac{4 \pi n \mathfrak{S}}{E} \frac{\left(R + \frac{h}{2}\right)}{h},$$

wenn n die Anzahl der Windungen der Feder bedeutet. Führt man in die zwei letzten Formeln für α die Länge l der gestreckt gedachten Feder ein: $l = 2\pi n\left(R + \frac{h}{2}\right)$, so erhält man:

$$\alpha = \frac{12 P R_0 l}{E b h^3} = \frac{2 \mathfrak{S} l}{E h}.$$

Aus der Gleichung

$$„\alpha = \frac{4\pi n \mathfrak{S}}{E} \frac{\left(R + \frac{h}{2}\right)}{h}“$$

findet man die Anzahl n der Windungen:

$$n = \frac{\alpha E h}{4\pi \mathfrak{S}\left(R + \frac{h}{2}\right)}, \text{ oder}$$

$$n = \frac{\frac{\pi}{4} . 30000 . 5}{4 . \pi . 60 . (70 + 2{,}5)} = 2{,}1552,$$

hiermit wird die Länge $l = 2\pi n\left(R + \frac{h}{2}\right)$, wenn man die Zahlenwerthe einsetzt:

$$l = 2 . 3{,}14 . 2{,}1552 (70 + 2{,}5) = 981{,}2^{mm},$$

also dieselbe Länge, wie im vorigen Beispiele. Wollte man den rechteckigen Querschnitt durch den Kreisquerschnitt vom Durchmesser d ersetzen, so hätte man aus der Gleichung

$$„P = \frac{\mathfrak{S}\pi d^3}{32 R_0}“ \text{ den Durchmesser } d = \sqrt[3]{\frac{32 P R_0}{\mathfrak{S}\pi}};$$

der Verdrehungswinkel α ist:

$$\alpha = 128 \frac{n P R_0}{E d^4}\left(R + \frac{d}{2}\right),$$

und für P den Werth gesetzt:

$$\alpha = 4\pi n \frac{\mathfrak{S}}{E} \frac{\left(R + \frac{d}{2}\right)}{d},$$

oder die Länge l der Feder

$$„l = 2\pi n\left(R + \frac{d}{2}\right)\text{“ eingeführt:}$$

$$\alpha = \frac{64\,P l R_0}{\pi E d^4} = \frac{2\,\mathfrak{S}\,l}{E d},$$

aus welchen Gleichungen die Grössen n und l bestimmt werden können. Vergleicht man die Volumina der zwei Drehschraubenfedern von rechteckigem und rundem Querschnitte, so findet man aus einer theoretischen Untersuchung, dass die Feder mit rundem Drahtquerschnitte $^1/_8$ an Material mehr braucht, als die Feder von rechteckigem Querschnitte.

I-Eisen-Tabelle

der Burbacher Hütte bei Saarbrücken.

Es bezeichnet h die Trägerhöhe, b die Flantschenbreite, d die Stegdicke, t die mittlere Flantschenstärke in Centimetern, G das Gewicht pro laufenden Meter in Kilogrammen, $Z = \frac{J}{c}$ den Querschnittsmodul, Centimeter als Einheit.

Nro.	h	b	d	t	G	Z
1	10	5	0,7	0,5	9	35,6
2	9,7	5,3	1	0,7	12,5	47
3	9,5	5,9	1,3	1	17,5	60,5
4	12,5	7,5	0,8	0,6	14,5	76,2
5	12,15	8,2	1,2	0,85	21,75	108,3
6	11,95	9	1,4	1,1	27,5	129,8
7	15	8	0,95	0,7	18,5	117,7
8	14,6	8,4	1,1	0,9	23	135,2
9	14,4	9	1,5	1,1	30,75	175,6
10	17,4	9,1	1,1	0,9	26,25	183,4
11	17,2	9,6	1,3	1,05	31,25	210,2
12	17	10,3	1,6	1,2	38,5	261,7
13	19,8	9,9	1,25	0,95	32	256,8
14	19,6	10,4	1,45	1,1	37,75	297,6
15	19,4	11,2	1,75	1,4	47,5	364,1
16	23,35	9,5	1,3	1,1	37,25	327,6
17	23,2	10,2	1,475	1,25	43	381,1
18	23	10,8	1,725	1,5	51,5	448,6
19	23,5	9,3	0,925	1	30	258,6
20	23,5	9,15	1,4	1,3	40,5	348,4
21	23,5	10,5	2	2	62,75	519,4
22	24,8	11,4	1,475	1,2	46,5	453,5
23	24,6	11,9	1,675	1,3	52,5	511,1
24	24,4	12,5	1,9	1,5	61	583,5
25	24,85	13,9	1,575	1,1	52,5	553,4
26	24,7	14,6	1,85	1,2	61,25	647,2
27	24,5	15	2,15	1,3	70,25	732,5
28	26	9,775	1,5	1,25	45	436,4
29	25,8	10,5	1,69	1,45	52,75	505,6
30	25,6	11,4	1,95	1,7	63,5	599,9
31	30	12,5	1,55	1,3	57,75	663,8
32	29,6	13	1,9	1,5	68,75	786,3
33	29,3	13,9	2,3	1,7	82,5	943,1
34	32	13,6	1,9	1,6	75,5	919,5
35	31,75	13,5	2,075	1,7	80,25	965,8
36	31,5	14,2	2,35	2	93,75	1105,8
37	40	14	1,7	1,6	82,75	1200,2
38	39,8	13,9	1,85	1,7	87,75	1266,2
39	39,6	15	2,125	1,8	99	1366,3

Anwendungsbeispiele aus der Lehre von der Torsionsfestigkeit.

1. Ein cylindrischer, schmiedeiserner Stab von der Länge $l = 1500^{mm}$ ist an dem einen Ende in horizontaler Lage fest eingeklemmt (eingemauert) und am anderen Ende durch eine Kraft $P = 500^{Kg}$, die an dem Umfange einer auf dem Stabe festsitzenden Scheibe vom Halbmesser $R = 500^{mm}$ angreift, auf Torsion beansprucht; es ist der Durchmesser d dieses cylindrischen Stabes und der Verdrehungswinkel α desselben zu berechnen.

Auflösung. Das Torsionsmoment ist hier für alle Stabquerschnitte gleich gross, daher ist jeder Querschnitt ein gefährlicher; man hat hier nach der Lehre von der Torsionsfestigkeit das Torsionsmoment PR dem Widerstandsmomente gleichzusetzen, also $PR = \frac{\mathfrak{S} \pi d^3}{16}$, aus dieser Formel ist $d = \sqrt[3]{\frac{16 PR}{\mathfrak{S} \pi}}$, die hier einzusetzende Schubspannung $\mathfrak{S}$ nehmen wir nur $\frac{4}{5}$ von der bei der Biegungsfestigkeit gebrauchten zulässigen Biegungsspannung, weil bei den auf Torsion beanspruchten Körpern die Elasticitätsgrenze schon durch eine Belastung erreicht wird, die $\frac{4}{5}$ jener Belastung beträgt, welche die auf Biegung beanspruchten Körper bis zur Elasticitätsgrenze aushalten können; wir nehmen also

$$\mathfrak{S} = \frac{4}{5} \mathfrak{S}_1 = \frac{4}{5} . 5 = 4 \text{ bis } \mathfrak{S} = \frac{4}{5} . 6 = \frac{24}{5}$$

und abgerundet $\mathfrak{S} = 5$; wobei vorausgesetzt wird, dass der Körper keine Stösse auszuhalten hat. Setzen wir hier z. B. $\mathfrak{S} = 4$, $P = 500$, $R = 500$ ein, so erhält man:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 . 500 . 500}{4 . 3{,}14}} = \sqrt[3]{318471{,}337} = 68^{mm}.$$

Der Verdrehungswinkel α im Bogenmass ist nach der Lehre von der Torsionsfestigkeit:

$$\widehat{\alpha} = \frac{PRl}{J_p G} = \frac{\mathfrak{S} l}{G a},$$

und im Gradmass ist

$$\alpha^0 = \widehat{\alpha} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{PRl}{J_p G} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{\mathfrak{S} l}{G a} \cdot \frac{180}{\pi},$$

wobei J_p das polare Trägheitsmoment, hier für den Kreisquerschnitt $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$, G den Torsions-Elasticitätsmodul, hier für Schmiedeisen $G = \frac{2}{5} E = \frac{2}{5} \cdot 20000 = 8000$, und a den Abstand der am weitesten vom Schwerpunkte des Querschnittes entfernten Materialfaser des Querschnittes bedeutet. Man hat im vorliegenden Falle $a = \frac{d}{2}$, somit den Verdrehungswinkel im Gradmass:

$$\alpha^0 = \frac{PRl}{J_p G} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{500 \cdot 500 \cdot 1500}{\frac{\pi}{32} d^4 \cdot 8000} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{500 \cdot 500 \cdot 1500 \cdot 32 \cdot 180}{(3,1416)^2 (68)^4 \cdot 8000},$$

$\alpha^0 = 1,2795$; setzt man in die andere Formel für α, nämlich: $\alpha^0 = \frac{\mathfrak{S} l}{G a} \cdot \frac{180}{\pi}$ die Zahlenwerthe ein, so erhält man ebenfalls:

$$\alpha^0 = \frac{4 \cdot 1500}{8000 \cdot 34} \cdot \frac{180}{3,1416} = 1,2795.$$

Nimmt man, was gewöhnlich geschieht, als praktische Regel an, dass die Verdrehung im Maximum nicht mehr als $\frac{1}{4}^0$ auf 1^m Länge betragen solle, so hätte man hier als zulässige Verdrehung für die ganze Stablänge von $l = 1\frac{1}{2}^m$, $\alpha = 1,5 \cdot 0,25 = 0,375^0$. Würde man wünschen, dass im vorliegenden Falle diese Regel eingehalten werde, so hätte man den Durchmesser d des Stabes aus der Formel für α, nämlich $\alpha^0 = \frac{PRl}{J_p G} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{PRl \cdot 32 \cdot 180}{\pi^2 G d^4}$ zu berechnen; man erhält aus dieser Gleichung:

$$d = \sqrt[4]{\frac{180 \cdot 32 \cdot PRl}{\pi^2 G \alpha^0}},$$

oder die Zahlenwerthe eingesetzt:

$$d = \sqrt[4]{\frac{180 \cdot 32 \cdot 500 \cdot 500 \cdot 1500}{(3,14)^2 \cdot 8000 \cdot 0,375}} = 92,4^{mm};$$

will man nun wissen, wie gross in diesem Stabe von $92{,}4^{mm}$ Durchmesser die Spannung ist, wenn er durch das Torsionsmoment PR beansprucht wird, so findet man diese aus der Formel:

$$PR = \mathfrak{S} Z \text{ mit } \mathfrak{S} = \frac{PR}{Z} = \frac{PR}{\frac{\pi}{16} d^3}, \text{ oder}$$

$$\mathfrak{S} = \frac{500 \,.\, 500 \,.\, 16}{3{,}14 \,.\, (92{,}4)^3} = 1{,}61^{Kg},$$

setzt man diesen Werth von $\mathfrak{S}$ in die Formel

$$„\alpha^0 = \frac{180 \mathfrak{S} l}{\pi G a} = \frac{180 \,.\, 2 \,.\, \mathfrak{S} l}{\pi G d}“$$

ein und rechnet d aus, so erhält man wieder:

$$d = \frac{2 \,.\, 180 \,.\, \mathfrak{S} l}{\pi G \alpha^0} = \frac{2 \,.\, 180 \,.\, 1{,}61 \,.\, 1500}{3{,}14 \,.\, 8000 \,.\, 0{,}375} = 92{,}4^{mm},$$

wie oben.

2. Ein hohler gusseiserner Cylinder von der Länge $l = 5^m$, dem äusseren Durchmesser $d_1 = 50^{mm}$, dem inneren Durchmesser $d_2 = 40^{mm}$, ist an dem einen Ende festgehalten, und wird am anderen Ende durch eine Kraft P, die an einem auf dem Cylinder befestigten, radialen Arme von der Länge $R = 500^{mm}$ angreift, auf Torsion in Anspruch genommen; wie gross ist die Kraft P zu nehmen, wenn sie das Cylindermaterial bis zur Elasticitätsgrenze beanspruchen soll, und wie gross ist dann der Verdrehungswinkel?

Auflösung. Die hier anzuwendende Formel aus der Lehre von der Torsionsfestigkeit ist: $M = \mathfrak{S} Z$, in welcher Gleichung M das Torsionsmoment, $\mathfrak{S}$ die Spannung an der Elasticitätsgrenze und Z den polaren Querschnittsmodul bedeutet. In der Gleichung „$M = \mathfrak{S} Z$“ für M und Z die Werthe: $M = PR$, $Z = \frac{\pi}{16} \frac{(d_1^4 - d_2^4)}{d_1}$ gesetzt, gibt:

$$PR = \frac{\mathfrak{S} \pi}{16} \,.\, \frac{(d_1^4 - d_2^4)}{d_1},$$

die Spannung $\mathfrak{S}$ bei Gusseisen an der Elasticitätsgrenze ist für Zug 7,5, für Torsion aber nur $\mathfrak{S} = \frac{4}{5} \,.\, 7{,}5 = 6$, man hat daher, wenn man aus der letzten Momentengleichung P bestimmt und die Zahlenwerthe einsetzt:

$$P = \frac{\mathfrak{S} \pi (d_1^4 - d_2^4)}{16 d_1 R} = \frac{6 \,.\, 3{,}14 (50^4 - 40^4)}{16 \,.\, 50 \,.\, 500} = 174^{Kg};$$

der Verdrehungswinkel α wird nach der in der vorigen Aufgabe gegebenen Formel:

$$\alpha = \frac{\mathfrak{S}\, l}{G \cdot \frac{d_1}{2}} \cdot \frac{180}{3,14} = \frac{6 \cdot 5000}{4000 \cdot 25} \cdot \frac{180}{3,14} = 17,2^{\circ}.$$

3. Eine schmiedeiserne Welle von kreisförmigem Querschnitte und der Länge $l = 1900^{mm}$ wird durch eine Kraft von $P = 200^{Kg}$, welche an einem Hebelarme von der Länge $R = 500^{mm}$ angreift, auf Torsion in Anspruch genommen; welchen Durchmesser d muss diese Welle bei blosser Berücksichtigung der Festigkeit erhalten, wenn die zulässige Maximal-Faserspannung $\mathfrak{S} = 5^{Kg}$ beträgt? Wie gross ist ferner der Verdrehungswinkel?

Auflösung. Aus der Gleichung „$PR = \mathfrak{S}\, Z$“, oder

$$PR = \frac{\mathfrak{S}\, \pi\, d^3}{16} \text{ folgt: } d = \sqrt[3]{\frac{16\, P R}{\mathfrak{S}\, \pi}},$$

oder die Zahlenwerthe eingesetzt:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 200 \cdot 500}{5 \cdot 3,14}} = 46,7^{mm},$$

oder abgerundet $d = 47^{mm}$; der Verdrehungswinkel wird:

$$\alpha^{0} = \frac{\mathfrak{S}\, l}{G \cdot \frac{d}{2}} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{5 \cdot 1900 \cdot 180}{8000 \cdot 23,5 \cdot 3,14} = 2,8997,$$

oder abgerundet $\alpha = 2,9^{\circ}$.

4. An den Enden einer in zwei Punkten gestützten schmiedeisernen Welle von kreisförmigem Querschnitte sitzen zwei Riemscheiben von den Halbmessern $R = 500^{mm}$ und $r = 100^{mm}$; an dem Umfange der letzteren Scheibe wirkt eine Kraft von $P = 100^{Kg}$, die von der ersteren Scheibe aufgenommen und an irgend eine Arbeitsmaschine zur Verrichtung einer Arbeit abgegeben wird; wie gross ist der Durchmesser der Welle zu machen, wenn man auf die Grösse der Verdrehung keine Rücksicht nimmt?

Auflösung. Da die Welle nur mit Rücksicht auf ihre Festigkeit zu berechnen ist, so ist es gleichgiltig, welches der beiden Torsionsmomente Pr oder QR (an den beiden Scheiben) wir zur Berechnung benutzen, da bekanntlich für's Gleichgewicht das Moment der Kraft (abgesehen von Reibungswiderständen) gleich sein muss dem Momente der Last; es ist also das Torsionsmoment

$$M = Pr = QR = 100 \cdot 100 = 10000,$$

und da aus der Festigkeitsgleichung „$M = \frac{\pi d^3 \mathfrak{S}}{16}$“ der Durchmesser

$d = \sqrt[3]{\frac{16\,M}{\alpha \mathfrak{S}}}$ ist, so erhält man, wenn man die zulässige Spannung $\mathfrak{S} = 4$ und die übrigen Zahlenwerthe einsetzt:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16\,.\,10000}{3{,}14\,.\,4}} = 23{,}4$$

und abgerundet $d = 24^{mm}$.

5. Ein Balken aus Eichenholz von quadratischem Querschnitte ist mit seinen beiden Enden fest eingespannt und trägt in der Mitte seiner Länge an einem Arme, der senkrecht zur Balkenlänge steht und eine Länge von $R = 729^{mm}$ hat, eine Last von $P = 1000^{Kg}$; wie gross muss der Querschnitt des Balkens, resp. eine Seite des Quadrats gemacht werden, wenn eine merkliche Verdrehung des Balkens nicht eintreten soll? Die Länge des letzteren zwischen den Befestigungspunkten ist $l = 4^m$.

Auflösung. Offenbar wird hier jede Balkenhälfte von der Länge $\frac{l}{2}$ durch das Torsionsmoment $\frac{PR}{2}$ beansprucht, man hat daher:

$$M = \frac{PR}{2} = \mathfrak{S} Z,$$

es ist aber:

$$Z = \frac{J_p}{c} = \frac{b^4}{6} : \frac{b\sqrt{2}}{2} = \frac{2\,b^4}{6\,b\sqrt{2}} = \frac{b^3}{3\sqrt{2}}, \text{ somit}$$

$$PR = \frac{2\,\mathfrak{S}\,b^3}{3\sqrt{2}} = \frac{\mathfrak{S}\,b^3\sqrt{2}}{3}, \text{ woraus}$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3\,PR}{\mathfrak{S}\sqrt{2}}}$$

folgt; der Bruchmodul für Verdrehung oder Schub bei Eichenholz, parallel zur Faserrichtung, ist $K = 0{,}8$ pro Quadratmillimeter Querschnitt, nehmen wir die Faserspannung

$$\mathfrak{S} = \frac{K}{10} = \frac{0{,}8}{10} = 0{,}08,$$

so ist die Quadratseite

$$b = \sqrt[3]{\frac{3\,.\,1000\,.\,729}{0{,}08\,.\,1{,}4142}} = 264{,}5$$

oder abgerundet

$$\underline{b = 265^{mm}.}$$

Der Verdrehungswinkel α wird:

$$\alpha^0 = \frac{\mathfrak{S}\, l}{G c} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{0{,}08 \,.\, 4000 \,.\, 180}{80 \,.\, \frac{265}{\sqrt{2}} \,.\, 3{,}14} = 1{,}22^0.$$

6. Eine schmiedeiserne Welle von kreisförmigem Querschnitte und einer Länge von $l = 4^m$, hat 1600 Pferdekräfte bei 40 Umdrehungen pro Minute zu übertragen; wie gross ist der Durchmesser d dieser Welle zu machen, *a)* wenn sie mit Rücksicht auf ihre Verdrehung, *b)* mit Rücksicht auf ihre Torsionsfestigkeit allein berechnet wird; *c)* wie gross würde der Durchmesser der Welle nach diesen beiden Berechnungsarten, wenn die Welle aus Gussstahl gemacht würde? *d)* Wie gross wird in den Fällen *a*, *b*, *c* der Verdrehungswinkel α?

Auflösung. *ad a)* Aus der bereits in Aufgabe 1 dieses Abschnittes gebrauchten Formel für den Verdrehungswinkel in Gradmass:

$$\alpha^0 = \frac{P R l}{J_p\, G} \cdot \frac{180}{\pi}$$

folgt, wenn man für J_p den Werth setzt, $J_p = \frac{\pi}{32} d^4$,

$$\alpha^0 = \frac{P R l}{\frac{\pi}{32} d^4 G} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{32 P R l \,.\, 180}{\pi^2 G d^4}, \text{ oder}$$

$$\alpha^0 = \frac{5760 P R l}{\pi^2 G d^4}, \text{ hieraus ist:}$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{5760 P R l}{\pi^2 G \alpha^0}},$$

in dieser Formel sind d, R, l in Millimetern, G in Kilogrammen zu nehmen; führen wir die Länge l der Welle anstatt in Millimetern in Metern ein, so haben wir zu setzen: $l^{mm} = 1000 L^m$, man erhält:

$$d = \sqrt[4]{\frac{5760 P R \,.\, 1000 L}{\pi^2 G \alpha^0}}.$$

Aus der Formel für den Verdrehungswinkel ist ersichtlich, dass derselbe von der Länge l der Welle abhängig ist, und zwar ist er, so lange $l < 20^m$ (was die Erfahrung festgestellt) der Länge l direct proportional.

Bezeichnen wir den Coëfficienten, der die Abhängigkeit des Winkels α von der Länge darstellt, mit δ, so kann man setzen: $\alpha^0 = \delta L$, diesen Werth für α in die Formel für d eingesetzt:

$$d = \sqrt[4]{\frac{5760 \,.\, PR \,.\, 1000\, L}{\pi^2 \,.\, G \,.\, \delta L}} = 27{,}6465 \sqrt[4]{\frac{PR}{G\delta}};$$

der Maschinenbau gibt die Regel an, dass für Wellen, die länger als 3^m sind, der zulässige Verdrehungswinkel $^1/_4{}^0$ pro laufenden Meter Wellenlänge genommen werden könne, d. h. also, es ist $\delta = {}^1/_4$ zu setzen, hiermit erhält man:

$$d = 27{,}6465 \sqrt[4]{\frac{PR}{G \,.\, {}^1/_4}} = 27{,}6465 \sqrt[4]{\frac{4\,PR}{G}};$$

der Torsions-Elasticitätsmodul G ist bekanntlich: $G = \frac{2}{5} E$ und da für Schmiedeisen $E = 20000$ ist, so hat man

$$G = \frac{2}{5} \,.\, 20000 = 8000;$$

das Torsionsmoment PR berechnet sich aus der bekannten Beziehung „$PR = \frac{716200\, N}{u}$“, daher erhält man:

$$d = 27{,}6465 \sqrt[4]{\frac{4}{8000}} \,.\, \sqrt[4]{PR} = 4{,}13 \sqrt[4]{PR}, \text{ oder}$$

$$d = 4{,}13 \sqrt[4]{\frac{716200\, N}{u}} = 4{,}13 \,.\, 29{,}0909 \sqrt[4]{\frac{N}{u}}, \text{ oder}$$

$$d = 120 \sqrt[4]{\frac{N}{u}},$$

die Zahlenwerthe für N und u eingesetzt:

$$d = 120 \sqrt[4]{\frac{1600}{40}} = 300^{mm}.$$

ad b) Berechnet man den Durchmesser d der Welle nur mit Rücksicht auf ihre Torsion, so erhält man aus der Gleichung

$$„PR = \frac{\mathfrak{S} \pi d^3}{16}“$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16\, PR}{\mathfrak{S} \pi}} = 1{,}7202 \sqrt[3]{\frac{PR}{\mathfrak{S}}},$$

für PR obigen Werth gesetzt:

$$d = 1{,}7202 \sqrt[3]{\frac{716200\, N}{\mathfrak{S}\, u}} = 154 \sqrt[3]{\frac{N}{u \mathfrak{S}}}.$$

Da die Schubspannung für Schmiedeisen an der Elasticitätsgrenze $T = 10{,}5$ ist, so nehmen wir als erlaubte Spannung

$$\mathfrak{S} = \frac{10,5}{3} = 3,5,$$

dieses gibt, weil der Bruchmodul des Schmiedeisens für Schub 35 ist, eine $\frac{35}{3,5} = 10$fache Bruchsicherheit. Ein so hoher Grad von Sicherheit ist hier deswegen geboten, weil, wie wir bei der ersten Berechnungsart gesehen haben, die Welle überhaupt (an sich) schon ziemlich dick ausfällt, d. h. in Anbetracht der gewöhnlichen Fabrikationsmethode so dicker Schmiedeisenstäbe in den Walzwerken nicht mit Sicherheit darauf gerechnet werden kann, dass ein jeder Querschnitt der Welle in allen seinen Theilen eine gleich grosse Festigkeit, ein durchaus gleichartiges Gefüge habe, dass nicht auch unganze Stellen (mit Schlacken gemengte Eisentheilchen) darin enthalten sind; wir setzen daher $\mathfrak{S} = 3,5$, ferner $N = 1600$ und $u = 40$ ein, und erhalten:

$$d = 154 \sqrt[3]{\frac{1600}{40 \, . \, 3,5}} = 346,84 \text{ und abgerundet:}$$

$$\underline{d = 347^{mm}.}$$

ad c) Wählt man als Material für die Welle Gussstahl und berechnet letztere auf ihre Torsionsfestigkeit, so hat man wieder obige Formel für den Durchmesser: $d = 154 \sqrt[3]{\frac{N}{u \mathfrak{S}}}$ anzuwenden; als einzusetzende Spannung $\mathfrak{S}$ nehmen wir wieder den zehnten Theil des Bruchmoduls für Gussstahl, für Schub, d. i. also $\mathfrak{S} = \frac{65}{10} = 6,5$; man erhält hiermit:

$$d = 154 \sqrt[3]{\frac{1600}{40 \, . \, 6,5}} = 281,82 \text{ und abgerundet}$$

$$\underline{d = 282^{mm}.}$$

Berechnet man jedoch die Welle mit Rücksicht auf ihre Verdrehung, d. h. also so, dass der Verdrehungswinkel nicht grösser als $^1/_4{}^0$ auf 1^m Länge sei, so erhält man, wie *ad a)* $d = 300^{mm}$; denn in der Formel für den Wellendurchmesser

$$„d = 27,6465 \sqrt[4]{\frac{4PR}{G}}“$$

ist nur die Grösse G von dem Material der Welle abhängig, nun ist aber der Drehungs-Elasticitätsmodul für Schmiedeisen derselbe. wie für Gussstahl, nämlich $G = 8000$, somit erhält man auch für die auf Verdrehung berechnete Gussstahlwelle denselben Durchmesser. wie für die schmiedeiserne, auf Verdrehung berechnete Welle.

ad d) Der Verdrehungswinkel α ist im ersten Falle:

$$\alpha_1 = \frac{l}{4} = \frac{4}{4} = 1^\circ,$$

weil die Regel, dass die Verdrehung $^1/_4{}^\circ$ auf 1^m Länge betragen solle, in die Formel für die Wellenberechnung eingeführt wurde. Der Verdrehungswinkel im Falle *b* ist nach der bereits bekannten Formel:

$$\alpha_2 = \frac{\mathfrak{S}\, l}{G \cdot \frac{d}{2}} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{3{,}5 \cdot 4000 \cdot 180}{8000 \cdot \frac{347}{2} \cdot 3{,}14} = 0{,}578^\circ;$$

der Verdrehungswinkel im Falle *c* ist nach derselben Formel:

$$\alpha_3 = \frac{6{,}5 \cdot 4000}{8000 \cdot \frac{282}{2}} \cdot \frac{180}{3{,}14} = 1{,}321^\circ.$$

Berechnet man endlich noch die in der auf Verdrehung berechneten, schmiedeisernen Welle (Fall *a*) eintretende Faserspannung aus der Formel für den Verdrehungswinkel „$\alpha^\circ = \frac{\mathfrak{S}\, l}{G \frac{d}{2}} \cdot \frac{180}{\pi}$“, so hat man:

$$\mathfrak{S} = G \frac{d}{2} \cdot \frac{\alpha \pi}{180\, l} = \frac{8000 \cdot 300 \cdot 1 \cdot 3{,}14}{2 \cdot 180 \cdot 4000} = 5{,}23^{Kg};$$

da die auf Verdrehung berechnete Gussstahlwelle auch den Durchmesser von 300^{mm} erhält, so ist die in derselben herrschende Faserspannung ebenfalls $\mathfrak{S} = 5{,}23^{Kg}$. In der folgenden kleinen Tabelle sind die erhaltenen Resultate für die schmiedeiserne und Gussstahlwelle übersichtlich zusammengestellt:

Schmiedeiserne Welle		Gussstahlwelle	
Auf Festigkeit berechnet *I*	Auf Verdrehung berechnet *II*	Auf Festigkeit berechnet *III*	Auf Verdrehung berechnet *IV*
Durchmesser $d = 347^{mm}$	$d = 300^{mm}$	$d = 282^{mm}$	$d = 300^{mm}$
Spannung $\mathfrak{S} = 3{,}5^{Kg}$	$\mathfrak{S} = 5{,}23^{Kg}$	$\mathfrak{S} = 6{,}5$	$\mathfrak{S} = 5{,}23$
Sicherheit $s = 10$	$s = \frac{35}{5{,}23} = 6{,}69$	$s = 10$	$s = \frac{65}{5{,}23} = 12{,}4$
Verdrehungswinkel $\alpha = 0{,}578^\circ$	$\alpha = 1^\circ$	$\alpha = 1{,}321^\circ$	$\alpha = 1^\circ$

Aus dieser Tabelle geht Folgendes hervor: Hält man daran fest, dass die Sicherheit gegen Bruch nicht weniger als $s = 10$ betragen solle, so hat man, wie aus der Tabelle ersichtlich ist, die Wahl zwischen den Fällen *I*, *III* und *IV*, von welchen aber auch *I* und *III* genügen; dass im Falle *III* die Verwindung etwas mehr als 1^{0} beträgt, fällt nicht in's Gewicht; bei der Wahl zwischen *I* und *III* werden aber auch die Anschaffungskosten der Welle (da Gussstahl viel theurer als Schmiedeisen ist), ferner etwaige Constructionsverhältnisse der mit der Welle zusammenhängenden Maschinentheile und noch andere Umstände in praktischer Beziehung massgebend sein; sieht man von dem höheren Preise des Gussstahls ab, so wird im Allgemeinen der Fall *III* dem Falle *I* und der Fall *IV* allen übrigen drei Fällen *I*, *II* und *III* vorzuziehen sein.

7. Aus Beispiel 1 dieses Abschnittes ist ersichtlich, dass eine Welle, auf ihre Verdrehung berechnet, stärker ausfällt, als wenn sie auf ihre Festigkeit allein berechnet wird; in Beispiel 6 fanden wir das Umgekehrte, nämlich, dass die Welle, auf Festigkeit berechnet, stärker ausfällt, als auf Verdrehung berechnet ($^{1}/_{4}{}^{0}$ auf 1^{m} Wellenlänge); man kann daher folgende Fragen stellen: *a)* In welchem Falle werden beide Berechnungsarten dieselbe Wellenstärke liefern? *b)* Wann wird man eine Welle auf ihre Festigkeit allein, und wann auf ihre Verdrehung berechnen?

Auflösung. ad *a)* Zur Berechnung der Welle auf ihre Festigkeit gebrauchten wir die Formel:

$$d = 1{,}7202\sqrt[3]{\frac{PR}{\mathfrak{S}}},$$

zur Berechnung der Welle auf Verdrehung hatten wir die Formel:

$$d = 27{,}6465\sqrt[4]{\frac{PR}{G\delta}};$$

sollen diese beiden Formeln dieselben Werthe liefern, so müssen die rechten Theile der zwei letzten Gleichungen einander gleich gesetzt werden; man erhält durch diese Gleichsetzung:

$$1{,}7202\sqrt[3]{\frac{PR}{\mathfrak{S}}} = 27{,}6465\sqrt[4]{\frac{PR}{G\delta}} = d_0,$$

wenn wir unter d_0 den Grenzwerth verstehen, welchen die beiden Formeln gleichzeitig liefern sollen. Die beiden ersten Theile der dreitheiligen Gleichung auf die vierte Potenz erhoben:

$$(1{,}7202)^4\left(\sqrt[3]{\frac{PR}{\mathfrak{S}}}\right)^4 = (27{,}6465)^4\,\frac{PR}{G\delta},$$

oder, der kürzeren Schreibweise wegen, $1{,}7202 = a$ und $27{,}6465 = b$ gesetzt:

$$a^4 \left(\sqrt[3]{\frac{PR}{\mathfrak{S}}}\right)^4 = b^4 \cdot \frac{PR}{G\delta},$$

diese Gleichung kann man auch schreiben:

$$a^4 \left(\sqrt[3]{\frac{PR}{\mathfrak{S}}}\right)^3 \sqrt[3]{\frac{PR}{\mathfrak{S}}} = b^4 \frac{PR}{G\delta}, \text{ oder}$$

$$\frac{a^4 PR}{\mathfrak{S}} \sqrt[3]{\frac{PR}{\mathfrak{S}}} = b^4 \frac{PR}{G\delta}, \text{ reducirt:}$$

$$\frac{a^4}{\mathfrak{S}} \cdot \sqrt[3]{\frac{PR}{\mathfrak{S}}} = \frac{b^4}{G\delta}, \text{ oder } \frac{a^3}{\mathfrak{S}} \cdot a \sqrt[3]{\frac{PR}{\mathfrak{S}}} = \frac{b^4}{G\delta};$$

es ist aber im linken Theile der letzten Gleichung der Factor

$$a \sqrt[3]{\frac{PR}{\mathfrak{S}}} = 1{,}7202 \sqrt[3]{\frac{PR}{\mathfrak{S}}} = d_0, \text{ daher}$$

$$\frac{a^3 d_0}{\mathfrak{S}} = \frac{b^4}{G\delta}, \text{ woraus}$$

$$d_0 = \frac{b^4 \mathfrak{S}}{a^3 G\delta} = \frac{(27{,}6465)^4 \mathfrak{S}}{(1{,}7202)^3 G\delta} = \frac{114769{,}4\ \mathfrak{S}}{G\delta}$$

folgt. Nimmt man für schmiedeiserne Wellen, die Stössen nicht ausgesetzt sind, $\mathfrak{S} = 4{,}8$, was einer $\frac{35}{4{,}8} = 7{,}3$fachen Bruchsicherheit entspricht, ferner $G = 8000$, $\delta = \frac{1}{4}$ an, so hat man den Grenzwerth:

$$d_0 = \frac{114769{,}4 \cdot 4{,}8}{8000 \cdot \frac{1}{4}} = 275{,}446,$$

und abgerundet $\underline{d_0 = 275^{mm}}$.

Nimmt man für Gusseisen $\mathfrak{S} = 2{,}4$, $G = 4000$, so ist

$$d_0 = \frac{114769{,}4 \cdot 2{,}4}{4000 \cdot \frac{1}{4}} = 275{,}446;$$

nimmt man für Gussstahl $\mathfrak{S} = 12$, so erhält man $d_0 = 687{,}5^{mm}$. Die für d_0 erhaltenen Werthe sind diejenigen Wellendurchmesser, welche dem Grenzfalle entsprechen, dass beide Berechnungsarten

(auf Festigkeit und Verdrehung) das gleiche Resultat liefern; d. h.: Schmiedeiserne und gusseiserne Wellen unter 275^{mm} Durchmesser sollen auf Verdrehung, über 275^{mm} auf Festigkeit berechnet werden; da man aber im Voraus nicht wissen kann, ob der Wellendurchmesser grösser oder kleiner als 275^{mm} ausfallen wird (von dem sogenannten praktischen Gefühl des Maschinenconstructeurs. der erfahrungsgemäss die Wellenstärke für einen geforderten Zweck ungefähr, ohne vorherige Rechnung angeben kann, werde hier abgesehen), so löse man die für den Grenzfall geltende Gleichung

$$1{,}7202\sqrt[3]{\frac{PR}{\mathfrak{S}}} = 27{,}6465\sqrt[4]{\frac{PR}{G\delta}}$$

nach der Unbekannten $M = PR$ auf; man erhält dann in der Grösse des Torsionsmomentes PR ein Kennzeichen dafür, ob man die Welle auf Verdrehung oder auf Festigkeit berechnen soll. Zur Vermeidung der unbequemen Rechnung mit den Coëfficienten vor den Wurzelzeichen, rechnen wir die beiden Werthe von d_0 aus den Gleichungen:

$$M = \frac{\mathfrak{S}\pi d_0^3}{16} \quad \text{und} \quad \alpha^0 = \frac{PRl}{J_p\, G} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{PRl}{\frac{\pi}{32} d_0^4\, G} \cdot \frac{180}{\pi}$$

aus und setzen die für d_0 erhaltenen Werthe einander gleich. Man erhält aus der ersten Gleichung:

$$d_0 = \sqrt[3]{\frac{16\, M}{\mathfrak{S}\pi}},$$

aus der zweiten Gleichung, wenn man in derselben $\alpha = L\delta$ und $l^{mm} = 1000\, L^m$ setzt (siehe vorige Aufgabe):

$$d_0 = \sqrt[4]{\frac{32 \,.\, 180 \,.\, 1000\, M}{\pi^2 G\delta}} = \sqrt[4]{\frac{5760000\, M}{\pi^2 G\delta}},$$

durch Gleichsetzung der Werthe von d_0 erhält man:

$$\sqrt[3]{\frac{16\, M}{\pi\mathfrak{S}}} = \sqrt[4]{\frac{5760000\, M}{\pi^2 G d}};$$

auf gleiche Wurzelexponenten gebracht und beiderseits auf die zwölfte Potenz erhoben:

$$\left(\frac{16}{\pi\mathfrak{S}}\right)^4 M^4 = \left(\frac{5760000}{\pi^2 G\delta}\right)^3 M^3, \quad \text{oder}$$

$$M\left(\frac{16}{\pi\mathfrak{S}}\right)^4 = \left(\frac{5760000}{\pi^2 G\delta}\right)^3, \quad \text{hieraus ist}$$

$$M = \left(\frac{5760000}{16}\right)^3 \frac{\mathfrak{S}^4}{16\,\pi^2 (G\delta)^3} = \frac{(360000)^3\, \mathfrak{S}^4}{16\,\pi^2 (G\delta)^3},$$

setzen wir für Schmiedeisen $\mathfrak{S} = 4,8$, $G = 8000$ und $\delta = \frac{1}{4}$ ein, so erhält man:

$$M = \left(\frac{360000}{8000 \cdot \frac{1}{4}}\right)^3 \frac{530,8416}{16 \cdot 9,8696} = 19604823,2,$$

für Gusseisen erhält man das Moment M_1 bei $\mathfrak{S} = 2,4$ und $G = 4000$:

$$M_1 = \frac{M}{2} = \frac{19604823,2}{2} = 9802411,6;$$

wenn also das Torsionsmoment $M = PR$ (P in Kilogrammen und R in Millimetern) bei Schmiedeisen den Werth von $M = 19604823$ und bei Gusseisen den Werth von $M_1 = 9802411,6$ überschreitet, so ist die Welle auf Festigkeit zu berechnen; ist das bei der Berechnung einer Torsionswelle gegebene oder berechnete Moment kleiner, als diese eben berechneten Werthe von M, resp. M_1, so ist die Welle auf Verdrehung zu berechnen; ist das Moment zufällig gleich dem hier für den Grenzfall berechneten Werthe von M oder M_1, so liefern beide Berechnungsarten denselben Werth, nämlich $d_0 = 275^{mm}$; da ferner

$$M = 716200 \frac{N}{u} = 19604823 \text{ und}$$

$$M_1 = 716200 \frac{N_1}{u_1} = 9802411,6$$

ist, so hat man aus diesen beiden Gleichungen die Quotienten $\frac{N}{u}$ und $\frac{N_1}{u_1}$:

$$\frac{N}{u} = \frac{19604823}{716200} = 27,37$$

für die schmiedeiserne Welle, und

$$\frac{N_1}{u_1} = \frac{9802411,6}{716200} = 13,685$$

für die gusseiserne Welle; d. h. also, wenn der Quotient, den man erhält, wenn man die Anzahl der von einer schmiedeisernen Torsionswelle aufzunehmenden Pferdekräfte durch die Tourenzahl der Welle dividirt, grösser als 27,37 und bei der gusseisernen Welle der gleiche Quotient grösser als 13,685 ist, so ist die Welle auf Festigkeit zu berechnen; ist dieser Quotient kleiner als 27,37, resp. kleiner als 13,685, so ist die Welle auf Verdrehung zu berechnen; würde zufällig der Grenzfall vorliegen, dass für die schmiedeiserne Welle $\frac{N}{u} = 27,37$, oder für die gusseiserne Welle $\frac{N_1}{u_1} = 13,685$

wäre, so liefern beide Berechnungsarten für Schmiedeisen und Gusseisen denselben Grenzwerth $d_0 = 275^{mm}$.

Anmerkung. Zwei Wellen von kreisförmigen Querschnitten, gleichen Längen und den Durchmessern d_1 und d_2 werden durch gleich grosse Torsionsmomente um die Winkel α_1^0 und α_2^0 verdreht; vergleicht man diese Verdrehungswinkel, so hat man aus den Gleichungen

$$„\alpha_1^0 = \frac{5760\,PRl}{\pi^2 G d_1^4} \text{ und } \alpha_2^0 = \frac{5760\,PRl}{\pi^2 G d_2^4}“ \text{ (siehe vorige Aufgabe):}$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{1}{d_1^4} : \frac{1}{d_2^4},$$

d. h. die Verdrehungswinkel verhalten sich umgekehrt, wie die vierten Potenzen der zugehörigen Wellendurchmesser. Hat man daher z. B. eine Welle auf ihre Festigkeit berechnet, hernach den Verdrehungswinkel bestimmt und gefunden, dass er etwa 2, 3 .... n-mal zu gross sei, so corrigirt man den berechneten Durchmesser d_1 aus der Proportion

$$d_1 : d_2 = \sqrt[4]{\alpha_2^0} : \sqrt[4]{\alpha_1^0},$$

indem man diese Proportion nach d_2 auflöst, man erhält:

$$d_2 = d_1 \sqrt[4]{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} = d_1 \sqrt[4]{n}.$$

Hätte man beispielsweise eine Welle auf ihre Festigkeit berechnet und gefunden: $d_1 = 120^{mm}$, hierbei ergibt sich aber ein Verdrehungswinkel von beispielsweise $\alpha_1 = 2^0$; man wünscht jedoch nur eine Verdrehung von $\alpha_2 = 1^0$, man hat dann, weil $n = \frac{2}{1} = 2$ ist, den corrigirten Werth:

$$d_2 = d_1 \sqrt[4]{2} = 120 \,.\, 1{,}189 = 142{,}68^{mm}.$$

Hätte man umgekehrt gefunden, dass der Verdrehungswinkel zweimal grösser sein darf, als er bei dem Durchmesser d_1 ausgefallen ist, so hat man aus der Proportion: $„\alpha_1 : \alpha_2 = 1 : 2 = \frac{1}{d_1^4} \cdot \frac{1}{d_2^4}“$

$$d_2 = d_1 \sqrt[4]{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} = d_1 \sqrt[4]{\frac{1}{2}} = \frac{d_1}{\sqrt[4]{2}},$$

für $d_1 = 120$, erhielte man:

$$d_2 = \frac{120}{\sqrt[4]{2}} = \frac{120}{1{,}189} = 100{,}92^{mm}.$$

8. **Es sind allgemeine Formeln zur Berechnung von Wellen von kreisförmigen, quadratischen und kreisringförmigen Querschnitten auf ihre Festigkeit und mit Rücksicht auf ihre Verdrehung zu entwickeln, wenn das Wellenmaterial Schmiedeisen, Gusseisen, Gussstahl und Eichenholz ist.**

Auflösung. *a)* **Schmiedeiserne Welle.**

1) *Kreisförmiger Querschnitt.*

α) Auf Festigkeit berechnet. Aus der Grundformel für die Torsionsfestigkeit „$PR = \mathfrak{S}\, Z$“ folgt, wenn man für Z den

dem Kreisquerschnitte entsprechenden Werth $Z = \frac{\pi}{16} d^3$ setzt:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 PR}{\pi \mathfrak{S}}},$$

die Spannung $\mathfrak{S} = 4{,}8$ angenommen, unter der Voraussetzung, dass die Welle keinen Stössen ausgesetzt ist, gibt:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 PR}{3{,}14 \,.\, 4{,}8}} = 1{,}019 \sqrt[3]{PR},$$

oder abgerundet: $\underline{d = \sqrt[3]{PR}}$, und da $PR = 716200 \frac{N}{u}$ ist (wo N die Anzahl der Pferdekräfte, welche die Welle in sich aufnimmt, u die Tourenzahl derselben pro Minute bedeutet), so hat man auch:

$$d = \sqrt[3]{716200 \frac{N}{u}} = 89{,}47 \sqrt[3]{\frac{N}{u}},$$

oder abgerundet $\underline{d = 90 \sqrt[3]{\frac{N}{u}}}$.

β) Auf Verdrehung berechnet. In Aufgabe 6 wurde diese Rechnung bereits durchgeführt und fanden wir dort:

$$\underline{d = 4{,}13 \sqrt[4]{PR}}, \text{ und}$$

$$\underline{d = 120 \sqrt[4]{\frac{N}{u}}}.$$

2) *Quadratischer Querschnitt.*

α) Auf Festigkeit berechnet. In der Formel „$PR = \mathfrak{S} Z$“ für Z den dem quadratischen Querschnitt entsprechenden Werth $Z = \frac{J_p}{c} = \frac{b^4}{6} : \frac{b\sqrt{2}}{2} = \frac{b^3}{3\sqrt{2}}$ gesetzt: $PR = \frac{\mathfrak{S} b^3}{3\sqrt{2}}$, hieraus ist die Quadratseite

$$b = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{2} \,.\, PR}{\mathfrak{S}}} = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{2} \,.\, PR}{4{,}8}} = \sqrt[3]{0{,}884\, PR} = 0{,}96 \sqrt[3]{PR},$$

$$\underline{b = 0{,}96 \sqrt[3]{PR}},$$

oder für PR obigen Werth gesetzt:

$$b = 0{,}96 \,.\, 89{,}47 \sqrt[3]{\frac{N}{u}} = 85{,}89 \sqrt[3]{\frac{N}{u}}$$

und abgerundet

$$\underline{b = 86 \sqrt[3]{\frac{N}{u}}}.$$

β) **Auf Verdrehung berechnet.** In der Formel für den Verdrehungswinkel „$\alpha^0 = \frac{PRl}{J_p G} \cdot \frac{180}{\pi}$“ für J_p den Werth $J_p = \frac{b^4}{6}$ gesetzt, hat man: $\alpha^0 = \frac{PRl}{\frac{b^4}{6} G} \cdot \frac{180}{\pi}$, hieraus ist $b = \sqrt[4]{\frac{1080 PRl}{G\pi\alpha}}$; führen wir die Länge l anstatt in Millimetern in Metern ein, setzen also $l^{mm} = 1000 L^m$, ferner $G = 8000$ und $\alpha^0 = \frac{L^m}{4}$, so hat man aus der letzten Gleichung für b:

$$b = \sqrt[4]{\frac{1080 \cdot PR \cdot 1000 L}{8000 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{L}{4}}} = \sqrt[4]{171{,}9745 PR} = 3{,}62 \sqrt[4]{PR},$$

$$\underline{b = 3{,}62 \sqrt[4]{PR},}$$

oder für PR den Werth gesetzt: $PR = 716200 \frac{N}{u}$, erhält man:

$$b = 3{,}62 \sqrt[4]{716200 \frac{N}{u}} = 3{,}62 \cdot 29{,}0909 \sqrt[4]{\frac{N}{u}},$$

oder $b = 105{,}34 \sqrt[4]{\frac{N}{u}}$ und abgerundet

$$\underline{b = 105{,}4 \sqrt[4]{\frac{N}{u}}.}$$

b) **Gusseiserne Welle.**

1) *Der Querschnitt ist kreisförmig.*

α) **Auf Festigkeit berechnet.** Aus der Gleichung

$$„M = PR = \mathfrak{S} Z = \frac{\mathfrak{S}\pi}{16} d^3“$$

folgt: $d = \sqrt[3]{\frac{16 PR}{\mathfrak{S}\pi}}$; die zulässige Beanspruchung des Gusseisens auf Torsion nehme man $\frac{5}{6}$ von der zulässigen Zugbeanspruchung, das ist also $\mathfrak{S} = \frac{5}{6} \cdot 2{,}5$, abgerundet $\mathfrak{S} = 2$, dieses gibt eine dreifache Tragsicherheit, da die Schubbelastung des Gusseisens an der Elasticitätsgrenze $T = 6$ ist; man hat also:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 PR}{2 \cdot 3{,}14}} = \underline{1{,}365 \sqrt[3]{PR},} \text{ oder}$$

$$d = 1{,}365 \sqrt[3]{716200 \frac{N}{u}} = 1{,}365 \,.\, 89{,}47 \sqrt[3]{\frac{N}{u}}$$

$$\underline{d = 122 \sqrt[3]{\frac{N}{u}}.}$$

β) Auf Verdrehung berechnet. In der Formel für den Verdrehungswinkel „$\alpha^0 = \frac{PRl}{J_p G} \,.\, \frac{180}{\pi}$“ für J_p den Werth gesetzt:

$$J_p = \frac{\pi}{32} d^4, \text{ ferner } l^{mm} = 1000\, L^m, \ \alpha^0 = \frac{L}{4}$$

eingesetzt und d bestimmt, gibt:

$$d = \sqrt[4]{\frac{5760\, PR \,.\, 1000}{\pi^2 \,.\, G \,.\, \frac{1}{4}}} = 27{,}6465 \sqrt[4]{\frac{4\, PR}{G}},$$

für Gusseisen ist $G = \frac{2}{5} \,.\, 10000 = 4000$, diesen Werth eingesetzt:

$$d = 27{,}6465 \sqrt[4]{\frac{4\, PR}{4000}} = 4{,}9166 \sqrt[4]{PR},$$

$$\underline{d = 4{,}9166 \sqrt[4]{PR},} \text{ oder}$$

$$d = 4{,}9166 \sqrt[4]{716200 \frac{N}{u}} = 4{,}9166 \,.\, 29{,}0909 \sqrt[4]{PR},$$

$$\underline{d = 143 \sqrt[4]{\frac{N}{u}}.}$$

2) *Der Querschnitt ist quadratisch.*

α) Auf Festigkeit berechnet. Aus der Gleichung

$$„PR = \mathfrak{S} Z = \frac{\mathfrak{S} b^3}{3 \sqrt{2}}“ \text{ folgt:}$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3 \sqrt{2} \,.\, PR}{\mathfrak{S}}} = \sqrt[3]{\frac{3 \sqrt{2} \,.\, PR}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3\, PR}{\sqrt{2}}}, \text{ oder}$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3\, PR}{1{,}4142}} = 1{,}29 \sqrt[3]{PR},$$

$$\underline{b = 1{,}29 \sqrt[3]{PR},} \text{ oder}$$

$$b = 1{,}29 \sqrt[3]{716200 \frac{N}{u}} = 115{,}4 \sqrt[3]{\frac{N}{u}},$$

$$\underline{b = 115{,}4 \sqrt[3]{\frac{N}{u}}.}$$

β) **Auf Verdrehung berechnet.** In der Formel für den Verdrehungswinkel „$\alpha^0 = \frac{PRl}{J_p G} \cdot \frac{180}{\pi}$“ $J_p = \frac{b^4}{6}$, $l^{mm} = 1000 L^m$, $\alpha^0 = \frac{L}{4}$ eingesetzt und b bestimmt, erhält man:

$$b = \sqrt[4]{\frac{4320000\,PR}{\pi G}}, \quad G = 4000 \text{ eingesetzt:}$$

$$b = \sqrt[4]{\frac{4320000\,PR}{3{,}14 \,.\, 4000}} = \sqrt[4]{343{,}949\,PR} = 4{,}31 \sqrt[4]{PR},$$

$$\underline{b = 4{,}31 \sqrt[4]{PR},}$$

oder für PR den bekannten Werth gesetzt:

$$b = 4{,}31 \sqrt[4]{716200 \frac{N}{u}} = 125{,}38 \sqrt[4]{\frac{N}{u}}$$

und abgerundet

$$\underline{b = 125{,}4 \sqrt[4]{\frac{N}{u}}.}$$

3) *Der Querschnitt ist kreisringförmig.*

Der äussere Durchmesser heisse d_1, der innere d_2, das Höhlungsverhältniss sei $\beta = \frac{d_2}{d_1}$ gegeben.

α) **Auf Festigkeit berechnet.** Aus der Formel

$$„PR = \frac{\mathfrak{S}\pi}{16} \left(\frac{d_1^4 - d_2^4}{d_1} \right)“$$

findet man, wenn man $d_2 = \beta d_1$, also $d_2^4 = \beta^4 d_1^4$ einsetzt:

$$PR = \frac{\mathfrak{S}\pi}{16} \cdot \frac{d_1^4 - \beta^4 d_1^4}{d_1} = \frac{\mathfrak{S}\pi d_1^4}{16} \cdot \frac{1 - \beta^4}{d_1}, \text{ oder}$$

$$PR = \frac{\mathfrak{S}\pi d_1^3}{16} (1 - \beta^4), \text{ hieraus ist}$$

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{16\,PR}{\mathfrak{S}\pi (1 - \beta^4)}},$$

$\mathfrak{S} = 2$ gesetzt, gibt:

$$d_1 = 1{,}365 \sqrt[3]{\frac{PR}{1-\beta^4}},$$

oder für PR den Werth gesetzt:

$$d_1 = 1{,}365 \sqrt[3]{\frac{716200\, N}{(1-\beta^4)\, u}} = 122{,}12 \sqrt[3]{\frac{N}{(1-\beta^4)\, u}}$$

und abgerundet:

$$d_1 = 122 \sqrt[3]{\frac{N}{(1-\beta^4)\, u}}.$$

β) Auf Verdrehung berechnet. In der Gleichung

$$„\alpha^0 = \frac{L^m}{4} = \frac{PR\,.\,1000\, L^m\,.\,180}{J_p\, G\, \pi}“,$$

für J_p den Werth $J_p = \frac{\pi}{32}(d_1^4 - d_2^4)$ gesetzt:

$$\frac{L}{4} = \frac{PR\,.\,1000\, L}{\frac{\pi}{32}(d_1^4 - d_2^4)\, G} \,.\, \frac{180}{\pi},$$

hierin $d_2 = \beta\, d_1$, also $d_2^4 = \beta^4 d_1^4$ gesetzt und d_1 bestimmt:

$$\frac{1}{4} = \frac{180000\, PR\,.\,32}{\pi^2\, G\,(d_1^4 - \beta^4 d_1^4)}, \text{ hieraus ist}$$

$$d_1 = \sqrt[4]{\frac{4\,.\,180000\, PR\,.\,32}{\pi^2\, G\,(1-\beta^4)}} = 4{,}916 \sqrt[4]{\frac{PR}{1-\beta^4}}, \text{ oder}$$

$$d_1 = 4{,}916 \sqrt[4]{\frac{716200\, N}{(1-\beta^4)\, u}} = 143 \sqrt[4]{\frac{N}{(1-\beta^4)\, u}}.$$

c) **Gussstahlwelle.**

1) *Der Querschnitt ist kreisförmig.*

α) Auf Festigkeit berechnet. Aus der Gleichung

$$„PR = \frac{\mathfrak{S}\, \pi\, d^3}{16}“ \text{ folgt: } d = \sqrt[3]{\frac{16\, PR}{\mathfrak{S}\, \pi}},$$

der Bruchmodul für Schub bei Gussstahl ist $K = 65$, wir nehmen daher $\mathfrak{S} = \frac{65}{5{,}5} = 12^{Kg}$ und erhalten:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16\, PR}{3{,}14\,.\,12}} = \sqrt[3]{0{,}424628\, PR}, \text{ oder}$$

$$\underline{d = 0{,}752 \sqrt[3]{PR}}, \text{ oder}$$

$$d = 0{,}752 \sqrt[3]{716200 \frac{N}{u}} = \underline{67{,}28 \sqrt[3]{\frac{N}{u}}}.$$

β) Auf Verdrehung berechnet. Da in der Formel zur Wellenberechnung auf Verdrehung nur der Torsions-Elasticitätsmodul G vom Materiale abhängt und für Schmiedeisen und Gusstahl G denselben Werth hat, so hat man hier dieselbe Formel, wie für die schmiedeiserne auf Verdrehung zu berechnende Welle, nämlich:

$$\underline{d = 4{,}13 \sqrt[4]{PR}}, \text{ oder}$$

$$\underline{d = 120 \sqrt[3]{\frac{N}{u}}}.$$

2) *Der Querschnitt ist quadratisch.*

α) Auf Festigkeit berechnet. Aus der Gleichung

$$\text{„}PR = \frac{\mathfrak{S}\, b^3}{3\sqrt{2}}\text{“ folgt: } b = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{2}\, PR}{\mathfrak{S}}},$$

$\mathfrak{S} = 12$ gesetzt:

$$b = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{2}\,.\,PR}{12}} = \sqrt[3]{0{,}35355\, PR}, \text{ oder}$$

$$\underline{b = 0{,}707 \sqrt[3]{PR}}, \text{ oder}$$

$$b = 0{,}707 \sqrt[3]{716200 \frac{N}{u}} = \underline{63{,}6 \sqrt[3]{\frac{N}{u}}}.$$

β) Auf Verdrehung berechnet. Man erhält dieselbe Formel wie für die schmiedeiserne Welle von quadratischem Querschnitte, nämlich:

$$\underline{d = 3{,}62 \sqrt[4]{PR}}, \text{ oder}$$

$$\underline{d = 105{,}4 \sqrt[4]{\frac{N}{u}}}.$$

3) *Der Querschnitt ist kreisförmig.*

α) Auf Festigkeit berechnet. Aus den Gleichungen

$$\text{„}PR = \frac{\mathfrak{S}\pi}{16} \cdot \frac{d_1^4 - d_2^4}{d_1} \text{ und } \frac{d_2}{d_1} = \beta\text{“ folgt:}$$

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{16\, PR}{\mathfrak{S}\pi(1 - \beta^4)}},$$

hierin $\mathfrak{S} = 12$ gesetzt, gibt:

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{16\,PR}{12\,.\,3{,}14\,(1-\beta^4)}} = \sqrt[3]{\frac{0{,}424628\,PR}{1-\beta^4}}, \text{ oder}$$

$$d_1 = 0{,}752\sqrt[3]{\frac{PR}{1-\beta^4}},$$

und für PR den Werth gesetzt:

$$d_1 = 67{,}28\sqrt[3]{\frac{N}{(1-\beta^4)\,u}}.$$

β) Auf Verdrehung berechnet. Da in der Formel für den Durchmesser der auf Verdrehung berechneten, gusseisernen Welle von kreisringförmigem Querschnitte der Torsions-Elasticitätsmodul G unter der vierten Wurzel im Nenner erscheint, für Gusseisen $G = 4000$, für Gussstahl $G = 8000$ ist, so hat man den dort gefundenen Werth von d_1 offenbar nur mit $\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ zu multipliciren, um für den vorliegenden Fall d_1 zu erhalten, man erhält also:

$$d_1 = \frac{4{,}916}{\sqrt[4]{2}}\sqrt[4]{\frac{PR}{1-\beta^4}} = \frac{4{,}916}{1{,}1892}\sqrt[4]{\frac{PR}{1-\beta^4}}, \text{ oder}$$

$$d_1 = 4{,}134\sqrt[4]{\frac{PR}{1-\beta^4}},$$

und für PR den Werth gesetzt:

$$d_1 = 120{,}262\sqrt[4]{\frac{N}{(1-\beta^4)\,u}}.$$

d) **Eichenholzwelle.**

1) *Der Querschnitt ist kreisförmig.*

α) Auf Festigkeit berechnet. Aus der Gleichung

$$„PR = \frac{\mathfrak{S}\,\pi\,d^3}{16}“ \text{ folgt: } d = \sqrt[3]{\frac{16\,PR}{\mathfrak{S}\,\pi}},$$

hierin $\mathfrak{S} = \frac{K}{s} = \frac{0{,}8}{10} = 0{,}08$ gesetzt, gibt:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16\,PR}{3{,}14\,.\,0{,}08}} = \frac{\sqrt[3]{PR}}{0{,}25}, \text{ oder}$$

$$d = 4\sqrt[3]{PR},$$

oder für PR den Werth gesetzt:

$$d = 357 \sqrt[3]{\frac{N}{u}};$$

selbstverständlich erhält man dieselben Formeln für d, wenn man den Durchmesser der auf Festigkeit berechneten schmiedeisernen oder gusseisernen Welle von kreisförmigem Querschnitte mit $\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{S}_s}{\mathfrak{S}_h}}$, resp. mit $\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{S}_g}{\mathfrak{S}_h}}$ multiplicirt, wenn $\mathfrak{S}_s$, $\mathfrak{S}_g$ und $\mathfrak{S}_h$ die einzusetzenden, zulässigen Faserspannungen für Schmiedeisen, Gusseisen und Holz bedeuten. Für die schmiedeiserne Welle fanden wir (a, 1, α) $d = 1{,}019 \sqrt[3]{PR}$, da

$$\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{S}_s}{\mathfrak{S}_h}} = \sqrt[3]{\frac{4{,}8}{0{,}08}} = 3{,}9149$$

ist, so hat man für die hölzerne Welle im vorliegenden Falle:

$$d = 1{,}019 \,.\, 3{,}9149 \sqrt[3]{PR} = 3{,}989 \sqrt[3]{PR},$$

oder abgerundet $d = 4 \sqrt[3]{PR}$, wie oben.

β) Auf Verdrehung berechnet. Da in der allgemeinen Formel für die Berechnung einer Welle auf ihre Verdrehung der vom Material abhängige Torsions-Elasticitätsmodul unter der vierten Wurzel im Nenner erscheint, so kann man den Durchmesser der Eichenholzwelle auch finden, wenn man den Durchmesser der schmiedeisernen oder gusseisernen auf Verdrehung berechneten Welle mit $\sqrt[4]{\frac{G_s}{G_h}}$, resp. mit $\sqrt[4]{\frac{G_g}{G_h}}$ multiplicirt, wenn G_s, G_g und G_h die Torsions-Elasticitätsmoduli für Schmiedeisen, Gusseisen und Eichenholz bedeuten. Wir fanden für die schmiedeiserne, auf Verdrehung berechnete Welle von kreisförmigem Querschnitte: $d = 4{,}13 \sqrt[4]{PR}$, da nun $G_h = 80$, $G_s = 8000$ ist, so hat man

$$d = 4{,}13 \sqrt[4]{PR} \,.\, \sqrt[4]{\frac{8000}{80}} = 4{,}13 \sqrt[4]{100\,PR}, \text{ oder } d = 13{,}06 \sqrt[4]{PR}$$

und abgerundet $d = 13 \sqrt[4]{PR}$, und für PR den Werth gesetzt:

$$d = 378 \sqrt[4]{\frac{N}{u}}.$$

2) *Der Querschnitt ist quadratisch.*

α) **Auf Festigkeit berechnet.** Für die schmiedeiserne Welle von quadratischem Querschnitte fanden wir aus der Formel „$PR = \frac{\mathfrak{S} b^3}{3\sqrt{2}}$“ die Quadratseite $b = 0{,}96 \sqrt[3]{PR}$; da nun die vom Material abhängige, in die Formel für die Quadratseite einzusetzende Spannung $\mathfrak{S}$ unter der dritten Wurzel im Nenner erscheint, so hat man nur den Werth von b für die schmiedeiserne Welle mit $\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{S}_s}{\mathfrak{S}_h}}$ zu multipliciren, um die Quadratseite für die hölzerne Welle zu finden, man erhält:

$$b = 0{,}96 \sqrt[3]{PR} \,.\, \sqrt[3]{\frac{4{,}8}{0{,}08}} = 0{,}96 \,.\, 3{,}9149 \sqrt[3]{PR}, \text{ oder}$$

$$\underline{b = 3{,}758 \sqrt[3]{PR},}$$

und für PR den Werth gesetzt:

$$\underline{b = 336{,}23 \sqrt[3]{\frac{N}{u}}.}$$

β) **Auf Verdrehung berechnet.** Die Quadratseite der auf Verdrehung berechneten schmiedeisernen Welle von quadratischem Querschnitte mit

$$\sqrt[4]{\frac{G_s}{G_h}} = \sqrt[4]{\frac{8000}{80}} = 3{,}1623$$

multiplicirt, gibt nach den früheren Erklärungen offenbar die Quadratseite der hölzernen Welle. Für die schmiedeiserne, auf Verdrehung berechnete Welle von quadratischem Querschnitte fanden wir die Quadratseite: $b_s = 3{,}62 \sqrt[4]{PR}$, daher für die hölzerne Welle:

$$b = 3{,}62 \sqrt[4]{PR} \,.\, \sqrt[4]{\frac{8000}{80}} = 3{,}62 \,.\, 3{,}1623 \sqrt[4]{PR}, \text{ oder}$$

$$b = 11{,}4475 \sqrt[4]{PR} \text{ und abgerundet:}$$

$$\underline{b = 11{,}5 \sqrt[4]{PR},}$$

oder für PR den Werth gesetzt:

$$b = 333{,}018 \sqrt[4]{\frac{N}{u}} \text{ und abgerundet } \underline{b = 333 \sqrt[4]{\frac{N}{u}}.}$$

In der nachfolgenden Tabelle sind alle erhaltenen Resultate dieser Aufgabe übersichtlich zusammengestellt.

Querschnittsform	Art der Berechnung	Durchmesser der schmiedeisernen Welle
Kreisquerschnitt	Auf Festigkeit berechnet	$d = \sqrt[3]{PR}$ $d = 90\sqrt[3]{\frac{N}{u}}$
	Auf Verdrehung berechnet	$d = 4{,}13\sqrt[4]{PR}$ $d = 120\sqrt[4]{\frac{N}{u}}$
Quadratischer Querschnitt	Auf Festigkeit berechnet	$b = 0{,}96\sqrt[3]{PR}$ $b = 86\sqrt[3]{\frac{N}{u}}$
	Auf Verdrehung berechnet	$b = 3{,}62\sqrt[4]{PR}$ $b = 105{,}4\sqrt[4]{\frac{N}{u}}$
Kreisring-Querschnitt $\frac{d_2}{d_1} = \beta$	Auf Festigkeit berechnet	
	Auf Verdrehung berechnet	

Durchmesser der		
gusseisernen Welle	Gussstahlwelle	Eichenholzwelle
$d = 1{,}365 \sqrt[3]{PR}$ $d = 122 \sqrt[3]{\frac{N}{u}}$	$d = 0{,}732 \sqrt[3]{PR}$ $d = 67{,}28 \sqrt[3]{\frac{N}{u}}$	$d = 4 \sqrt[3]{PR}$ $d = 357 \sqrt[3]{\frac{N}{u}}$
$d = 4{,}916 \sqrt[4]{PR}$ $d = 143 \sqrt[4]{\frac{N}{u}}$	$d = 4{,}13 \sqrt[4]{PR}$ $d = 120 \sqrt[4]{\frac{N}{u}}$	$d = 13 \sqrt[4]{PR}$ $d = 378 \sqrt[4]{\frac{N}{u}}$
$b = 1{,}29 \sqrt[3]{PR}$ $b = 115{,}4 \sqrt[3]{\frac{N}{u}}$	$b = 0{,}707 \sqrt[3]{PR}$ $b = 63{,}6 \sqrt[3]{\frac{N}{u}}$	$b = 3{,}758 \sqrt[3]{PR}$ $b = 336{,}23 \sqrt[3]{\frac{N}{u}}$
$b = 4{,}31 \sqrt[3]{PR}$ $b = 125{,}4 \sqrt[4]{\frac{N}{u}}$	$b = 3{,}62 \sqrt[4]{PR}$ $b = 105{,}4 \sqrt[4]{\frac{N}{u}}$	$b = 11{,}5 \sqrt[4]{PR}$ $b = 333 \sqrt[4]{\frac{N}{u}}$
$d_1 = 122 \sqrt[3]{\frac{N}{(1-\beta^4)\,u}}$ $\frac{d_2}{d_1} = \beta$ $d_1 = 1{,}365 \sqrt[3]{\frac{PR}{1-\beta^4}}$	$d_1 = 0{,}752 \sqrt[3]{\frac{PR}{1-\beta^4}}$ $\frac{d_2}{d_1} = \beta$ $d_1 = 67{,}28 \sqrt[3]{\frac{N}{(1-\beta^4)\,u}}$	
$d_1 = 4{,}916 \sqrt[4]{\frac{PR}{1-\beta^4}}$ $\frac{d_2}{d_1} = \beta$ $d_1 = 143 \sqrt[4]{\frac{N}{(1-\beta^4)\,u}}$	$d_1 = 4{,}134 \sqrt[4]{\frac{PR}{1-\beta^4}}$ $\frac{d_2}{d_1} = \beta$ $d_1 = 120{,}26 \sqrt[4]{\frac{N}{(1-\beta^4)\,u}}$	

9. Eine hohle gusseiserne Welle soll 20 Pferdekräfte bei 20 Umdrehungen pro Minute übertragen, wie gross ist der innere und äussere Durchmesser der Welle zu machen, wenn wir das Höhlungsverhältniss $\beta = \frac{d_2}{d_1} = 0,7$ annehmen?

Auflösung. In der Tabelle der vorigen Aufgabe finden wir für diesen Fall die Formel für den äusseren Durchmesser d_1 der auf Verdrehung berechneten gusseisernen Welle von kreisringförmigem Querschnitte: $d_1 = 143 \sqrt[4]{\frac{N}{(1-\beta^4)\, u}}$, die Zahlenwerthe eingesetzt:

$$d_1 = 143 \sqrt[4]{\frac{20}{\left[1-(0,7)^4\right] 20}} = 153,76$$

und abgerundet $d_1 = 154^{mm}$, somit $d_2 = 0,7 \,.\, 154 = 107,8$ und abgerundet $d_2 = 108^{mm}$, was eine Wandstärke von $w = 23^{mm}$ ergibt.

Da diese Welle, auf Festigkeit berechnet, einen viel geringeren Durchmesser erhalten würde, was aus dem Quotienten $\frac{N}{u} = 1$ hervorgeht (siehe Aufgabe 7), so sind die gefundenen Werthe beizubehalten, wenn man wünscht, dass die Verdrehung der Welle nicht grösser als $^1/_4{}^0$ pro Meter Wellenlänge betragen solle.

10. An den Enden einer in zwei Punkten unterstützten, kurzen schmiedeisernen Welle von kreisförmigem Querschnitte wirken zwei Arbeiter an zwei Kurbeln, jeder mit 20^{Kg} Kraft verdrehend auf die Welle ein; die Länge einer Kurbel ist $R = 420^{mm}$. Welchen Durchmesser muss die Welle erhalten, wenn auf die Grösse der Verwindung derselben keine Rücksicht genommen wird?

Auflösung. Laut Tabelle in Aufgabe 8 haben wir hier die Formel anzuwenden:

$$d = \sqrt[3]{PR} = \sqrt[3]{2 \,.\, 20 \,.\, 420} = 25,6$$

und abgerundet $d = 26^{mm}$.

11. Auf einer schmiedeisernen Welle von quadratischem Querschnitte und 3^m Länge sitzt ein Zahnrad von 512^{mm} Halbmesser, an dessen Umfange eine Kraft von $P = 1200^{Kg}$ verdrehend auf die Welle einwirkt, wie gross ist die Seite b des Querschnittes zu machen, und wie gross ist der Verdrehungswinkel?

Auflösung. Berechnet man diese Welle zuerst auf ihre Festigkeit nach der Formel: $b = 0,96 \sqrt[3]{PR}$ (siehe Tabelle in Aufgabe 8), so hat man:

$$b = 0,96 \sqrt[3]{1200 \,.\, 512} = 85^{mm}.$$

Auf Verdrehung berechnet, erhält man:

$$b = 3{,}62 \sqrt[4]{PR} = 3{,}62 \sqrt[4]{1200 \,.\, 512} = 101{,}36^{mm}.$$

Der Verdrehungswinkel der auf ihre Festigkeit berechneten Welle ist:

$$\alpha^0 = \frac{PR \,.\, 1000\, L^m}{J_p\, G} \,.\, \frac{180}{\pi} = \frac{PR \,.\, 1000\, L^m}{\frac{b^4}{6} \,.\, G} \,.\, \frac{180}{\pi}, \text{ oder}$$

$$\alpha^0 = \frac{1200 \,.\, 512 \,.\, 1000 \,.\, 3}{\frac{(85)^4}{6} \,.\, 8000} \,.\, \frac{180}{3{,}14} = 1{,}518^0;$$

der Verdrehungswinkel der auf die zweite Art berechneten Welle ist nur $^3/_4{}^0$ auf die ganze Länge, weil der Formel für den Wellendurchmesser die Annahme, dass die Verdrehung auf 1^m Wellenlänge $^1/_4{}^0$ betragen solle, zu Grunde gelegt wurde; da aber die Verwindung der Welle im ersten Falle im Ganzen nur $1{,}518^0$ beträgt, was in Ansehung ihrer geringen Länge im Allgemeinen als zulässig zu betrachten ist, so kann man bei dem zuerst gefundenen Werthe $d = 85^{mm}$ bleiben und denselben zur Ausführung benutzen.

12. Es sind die Wellendurchmesser der nachfolgend skizzirten und beschriebenen, einer Fabrik angehörigen Wellenleitung zu berechnen.

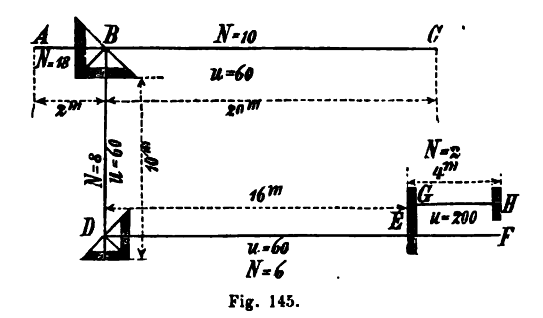


Fig. 145.

Die Welle AB nimmt an dem Ende A eine Leistung von $N = 18$ Pferdekräften auf, gibt davon an die Welle BC 10 Pferdekräfte ab, welche auf der ganzen Länge dieser Welle von $BC = 20^m$ gleichförmig abnehmend, bis auf Null an Arbeitsmaschinen abgegeben wird. In die Welle BD werden 8 Pferdekräfte bei B eingeleitet und am Ende D auf die Welle DF übertragen, und zwar auf dem Theile DE dieser letzteren Welle werden 6 Pferdekräfte, gleichförmig auf der ganzen Länge $DE = 16^m$, vertheilt und im Punkte E werden 2 Pferdekräfte auf die Welle GH übertragen, also werden in die Welle DF im Ganzen im Punkte D 8 Pferdekräfte eingeleitet.

Die Tourenzahlen der Wellen sind folgende:

Die	Welle	AB	macht	60	Touren	pro	Minute
»	»	BC	»	60	»	»	»
»	»	BD	»	60	»	»	»
»	»	DF	»	60	»	»	»
»	»	GH	»	200	»	»	»

Auflösung. Wir bedienen uns zur Berechnung der Wellendurchmesser der in der Tabelle der Aufgabe 8 enthaltenen Formel: $d = 120 \sqrt[4]{\frac{N}{u}}$ und setzen darin nach und nach die Werthe

$$\frac{N}{u} = \frac{18}{60} = 0{,}3, \quad \frac{N}{u} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}, \quad \frac{N}{u} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15},$$

$$\frac{N}{u} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}, \quad \frac{N}{u} = \frac{2}{200} = 0{,}01$$

ein, und erhalten für

die	Welle	AB	den	Durchmesser	$d_1 = 88{,}8^{mm}$,
»	»	BC	»	»	$d_2 = 76{,}8^{mm}$,
»	»	BD	»	»	$d_3 = 72^{mm}$,
»	»	DE	»	»	$d_4 = 72^{mm}$,
»	»	GH	»	»	$d_5 = 38^{mm}$.

Die Wellendurchmesser d_2, d_3, d_4 müssen jedoch corrigirt werden, da die Verdrehungswinkel dieser Wellen zu gross sind, denn: Bei langen Wellenleitungen, die eine Länge von 6 bis 8^m weit übersteigen, wird, wie aus der Ableitung der Formel „$d = 120 \sqrt[4]{\frac{N}{u}}$" leicht ersichtlich ist, der Verdrehungswinkel schon ziemlich gross, da dieser Formel, wie bekannt, bezüglich der Verdrehung die Annahme zu Grunde gelegt wurde, dass der Verdrehungswinkel $\frac{1}{4}^0$ pro laufenden Meter Wellenlänge betragen solle; die Welle wird zu sehr verwunden und dadurch der Gang der von einer solchen Welle betriebenen Arbeitsmaschine sehr ungünstig beeinflusst, im vorliegenden Falle würde z. B. die Welle BC einen Verdrehungswinkel von $20 \cdot \frac{1}{4} = 5^0$ erleiden, was offenbar eine zu grosse Verwindung ist. Eine zulässige Maximalverwindung für alle Wellenlängen festzustellen, geht nicht gut an, weil dann die langen Wellen mit Rücksicht auf ihre Verwindung verhältnissmässig zu dick, die kürzeren Wellen zu dünn ausfallen würden; wir müssen vielmehr annehmen, dass bei längeren Wellen eine grössere und bei kürzeren Wellen eine geringere Verwindung (auf die ganze Länge bezogen gedacht) zulässig sei; dieses wird dadurch erreicht, wenn man den

Wellendurchmesser so berechnet, dass dieser nur eine Verdrehung gestattet, die jener Wellenlänge entspricht, welche gleich der Quadratwurzel aus der zweifachen gegebenen Wellenlänge L, also $= \sqrt{2L}$ ist. Es sei α_1 der Verdrehungswinkel, welcher dem Durchmesser d_2 und der ganzen Wellenlänge L entspricht, wenn auf 1^m Länge $^1/_4{}^0$ Verdrehung, wie der Formel zu Grunde gelegt ist, gerechnet wird; α_2 der Verdrehungswinkel, welcher dem Durchmesser d_2' und einer Länge $= \sqrt{2L}$ entspricht, so hat man, da die Verdrehungswinkel den Wellenlängen direct proportional und die Durchmesser d_2' und d_2 der Wellen den vierten Wurzeln der Verdrehungswinkel umgekehrt proportional sind (siehe die Anmerkung zu Aufgabe 7) aus der Proportion $d_2 : d_2' = \sqrt[4]{\alpha_2^0} : \sqrt[4]{\alpha_1^0}$ den Durchmesser $d_2' = d_2 \sqrt[4]{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}$, da aber $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{L}{\sqrt{2L}} = \sqrt{\frac{L}{2}}$ ist, so hat man auch:

$$d_2' = d_2 \sqrt[4]{\sqrt{\frac{L}{2}}} = d_2 \sqrt[8]{\frac{L}{2}};$$

in diese Formel ist aber für L nur dann die ganze Wellenlänge einzusetzen, wenn die Kraft an dem einen Ende der Welle ein- und am anderen Ende abgeleitet wird; die halbe Wellenlänge ist einzusetzen, wenn die Kraftabgabe auf der ganzen Länge der Welle gleichförmig vertheilt ist; ein Drittel der Wellenlänge ist einzusetzen, wenn die Kraftabgabe auf der ganzen Wellenlänge gleichförmig abnehmend bis auf Null vertheilt ist. Bei der Welle BC ist dieses letztere der Fall, daher ist $L = \frac{20}{3} = 6^2{}_{,3}$ einzusetzen und somit der corrigirte Durchmesser dieser Welle

$$d_2' = d_2 \sqrt[8]{\frac{6^2{}_{,3}}{2}} = 76{,}8 \sqrt[8]{\frac{20}{6}} = 89^{mm};$$

für die Welle BD ist $L = 10$ einzusetzen, man hat daher:

$$d_3' = 72 \sqrt[8]{\frac{10}{2}} = 87{,}84,$$

und abgerundet $d_3' = 88^{mm}$.

Für die Welle DE ist $L = \frac{16}{2} = 8$ einzusetzen, man erhält:

$$d_4' = 72 \sqrt[8]{\frac{8}{2}} = 85{,}68$$

und abgerundet $d_4' = 86^{mm}$.

Für die Welle GH ist $L = 4^m$ einzusetzen, man erhält:

$$d_5' = 38\sqrt[3]{\frac{4}{2}} = 41{,}42$$

und abgerundet $d_5' = 42^{mm}$.

Die Verdrehungswinkel α_2, α_3, α_4, α_5, welche der Reihe nach die Wellen BC, BD, DE, GH, deren corrigirte Durchmesser d_2', d_3', d_4', d_5' sind, erleiden, erhält man aus der Proportion:

$$\alpha_1 : \alpha_2 = L : \sqrt{2L}; \text{ man findet:}$$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1\sqrt{2L}}{L} = \alpha_1\sqrt{\frac{2}{L}} \text{ und da } \alpha_1 = \frac{L}{4}$$

ist, so hat man auch:

$$\alpha_2 = \frac{L}{4}\sqrt{\frac{2}{L}} = \sqrt{\frac{L}{8}};$$

die Zahlenwerthe der Reihe nach für L eingesetzt, gibt:

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{6{,}8}{8}} = 0{,}913^\circ,$$

$$\alpha_3 = \sqrt{\frac{10}{8}} = 1{,}118^\circ,$$

$$\alpha_4 = \sqrt{\frac{8}{8}} = 1^\circ,$$

$$\alpha_5 = \sqrt{\frac{4}{8}} = 0{,}7^\circ.$$

Man sieht, dass die Verdrehungen sämmtlicher Wellen nur gering sind. Das Wellenstück EF, das einer Torsionsbeanspruchung nicht unterliegt, kann beliebig gemacht, oder auch, wenn es angeht, ganz weggelassen werden.

13. Eine schmiedeiserne Transmissionswelle soll $N = 30$ Pferdekräfte bei $u = 90$ Umdrehungen pro Minute übertragen; wie gross ist der Durchmesser der Welle zu machen, wenn die zulässige Torsionsspannung $\mathfrak{S} = 2{,}3^{Kg}$ pro Quadratmillimeter betragen soll, und wie gross wird der Verdrehungswinkel, wenn die Länge der Welle $l = 4^m$ ist?

Auflösung. Bezeichnet M das auf die Welle einwirkende Torsionsmoment, so ist nach der Lehre der Torsionsfestigkeit

$$M = \frac{\mathfrak{S}\,\pi\,d^3}{16}, \text{ woraus } d = \sqrt[3]{\frac{16\,M}{\mathfrak{S}\,\pi}}$$

ist, und da $M = \frac{716200\, N}{u}$ ist, so hat man auch:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \,.\, 716200\, N}{\mathfrak{S} \pi u}} = 154 \sqrt[3]{\frac{N}{u \mathfrak{S}}} = 154 \sqrt[3]{\frac{30}{90 \,.\, 2{,}3}},$$

oder $d = 80{,}8$ und abgerundet $d = 81^{mm}$.

Der Verdrehungswinkel α der Welle ist:

$$\alpha = \frac{\mathfrak{S}\, l}{G \,.\, \frac{d}{2}} \,.\, \frac{180}{\pi} = \frac{2{,}3 \,.\, 4000}{8000 \,.\, 40{,}5} \,.\, \frac{180}{3{,}14} = 1{,}62^{\circ}.$$

14. Zwei schmiedeiserne Transmissionswellen, beide 90^{mm} im Durchmesser haltend, sollen durch einen glatten cylindrischen Kupplungsmuff unter Anwendung eines Keiles fest mit einander verbunden werden; man fragt nach der Wandstärke w des Muffes.

Auflösung. Da die eine (treibende) Welle ihr Drehmoment durch den Kupplungsmuff auf die zweite, mit ihr fest verbundene (getriebene) Welle zu übertragen hat, so wird der Kupplungsmuff auf Torsion beansprucht, u. zw. durch dasselbe Moment, welches die Welle beansprucht. Aus der Tabelle in Aufgabe 8 findet man für die auf ihre Festigkeit berechnete, schmiedeiserne Welle von kreisförmigem Querschnitte: $d = \sqrt[3]{PR} =$ dem inneren Durchmesser des Muffes. Hieraus ist $PR = d^3$ und da

$$PR = \frac{\mathfrak{S} \pi}{16} \left(\frac{d_1^4 - d^4}{d_1} \right)$$

ist, wobei d_1 den äusseren Durchmesser des Muffes bedeutet, so hat man auch:

$$d^3 = \frac{\mathfrak{S} \pi}{16} \left(\frac{d_1^4 - d^4}{d_1} \right),$$

diese Gleichung nach der Unbekannten d_1 geordnet:

$$\frac{16\, d_1\, d^3}{\mathfrak{S} \pi} = d_1^4 - d^4, \text{ oder } d_1^4 - \frac{16\, d_1\, d^3}{\mathfrak{S} \pi} = d^4.$$

In diese Gleichung ist für $\mathfrak{S}$ nur ein verhältnissmässig geringer Werth einzusetzen, weil der Muff ausser der Torsionsbeanspruchung noch der besonderen Anstrengung des Eintreibens des Keiles zu widerstehen hat; wir nehmen $\mathfrak{S} = 1$ und erhalten mit diesem Werthe angenähert $d_1 = 1{,}8\, d$, genau genommen, entspricht das Verhältniss $\frac{d_1}{d} = 1{,}8$ dem Werthe $\mathfrak{S} = 0{,}9656$; da nun $d_1 = d - 2\, w$ ist, so hat man auch: $d - 2\, w = 1{,}8\, d$, woraus $w = 0{,}4\, d = 0{,}4 \,.\, 90 = 36^{mm}$ folgt; die Wandstärke des Muffes ergibt sich also zu 36^{mm}.

Geht man hingegen von der Formel aus, nach welcher die Welle auf ihre Verdrehung berechnet wird, so hat man laut Tabelle der Aufgabe 8 für die schmiedeiserne Welle von kreisförmigem Querschnitte, auf Verdrehung berechnet:

$$d = 4{,}13 \sqrt[4]{PR},$$

hieraus ist das Moment

$$PR = \left(\frac{d}{4{,}13}\right)^4, \text{ daher } \frac{d^4}{(4{,}13)^4} = \frac{\mathfrak{S}\pi}{16}\left(\frac{d_1^4 - d^4}{d_1}\right);$$

diese Gleichung nach d_1 geordnet:

$$\frac{d^4}{290{,}941249} = \frac{\mathfrak{S}\pi}{16}\left(\frac{d_1^4 - d^4}{d_1}\right), \text{ oder abgerundet}$$

$$\frac{d^4}{291} = \frac{\mathfrak{S}\pi}{16}\left(\frac{d_1^4 - d^4}{d_1}\right), \text{ oder } 16\, d_1\, d^4 = 291\, \mathfrak{S}\, \pi\, (d_1^4 - d^4),$$

$$\frac{16\, d_1\, d^4}{291\, \mathfrak{S}\pi} = d_1^4 - d^4 \text{ und } d_1^4 - \frac{16\, d_1\, d^4}{291\, \mathfrak{S}\pi} = d^4;$$

soll diese Gleichung denselben Werth für d_1 liefern, wie die erste nach d_1 geordnete Gleichung, so muss man $\mathfrak{S} = 0{,}31$ einsetzen, man erhält dann ebenfalls $d_1 = 1{,}8\, d$; dass diese Werthe für $\mathfrak{S}$ verschieden eingesetzt werden müssen, um dasselbe Resultat zu erhalten, rührt daher, dass im ersten Falle das Moment $M = d^3$ weit grösser als im zweiten Falle $M = \frac{d^4}{291}$ ist, weil im ersten Falle die Spannung $\mathfrak{S} = 4{,}8$ der Formel zu Grunde gelegt, im zweiten Fall aber nur die Berücksichtigung der Verdrehung der Formel zu Grunde gelegt wurde, wobei, wie bekannt, sich die Spannung $\mathfrak{S}$ als eine im Allgemeinen weit kleinere herausstellt; da nun in beiden Fällen derselbe Wellendurchmesser $d = 90^{mm}$ in die Rechnung eingeführt wurde, so musste im zweiten Falle in der geordneten Gleichung des vierten Grades das zweite Glied kleiner ausfallen. Da hier aber in Bezug der Kupplung nicht die Verwindung, sondern nur die Torsionsfestigkeit zu berücksichtigen ist, so ist für letztere nur das Torsionsmoment des ersten Falles, $M = d^3$ massgebend.

Geht man aber bei Welle und Muff von der Formel für die Verwindung aus, so hat man für den Verdrehungswinkel:

$$\alpha^0 = \frac{L^m}{\delta} = \frac{PR\,.\,1000\, L^m\,.\,180}{\frac{\pi}{32}(d_1^4 - d^4)\, G\, \pi},$$

oder, wenn man für PR den Werth $M = \frac{d^4}{291}$ setzt:

$$\frac{1}{\delta} = \frac{180000 \cdot \frac{d^4}{291} \cdot 32}{\pi^2 G (d_1^4 - d^4)}, \text{ hieraus ist}$$

$$\delta = \frac{\pi^2 G (d_1^4 - d^4) 291}{180000 \cdot 32 d^4},$$

die Werthe $G = 4000$ und $d_1 = 1{,}8\,d$ eingesetzt:

$$\delta = \frac{(3{,}14)^2 4000 \cdot 291 \left[(1{,}8\,d)^4 - d^4\right]}{180000 \cdot 32 d^4} = 18{,}942$$

und abgerundet $\delta = 19$, d. h. der Verdrehungswinkel für den Muff ist: $\alpha^0 = \frac{L^m}{19}$, oder $\frac{1}{19}$ Grad auf 1^m Länge. Löst man obige Gleichung für δ nach der Unbekannten d_1 auf, so erhält man, wenn $\delta = 18{,}942$, und $G = 4000$ (was dem Gusseisen entspricht) gesetzt wird, selbstverständlich $d_1 = 1{,}8\,d$.

15. Zwei schmiedeiserne Transmissionswellen von kreisförmigen Querschnitten sind an ihren Enden durch eine Ueberplattung und einen cylindrischen Kupplungsmuff unter Anwendung eines Keiles fest mit einander verbunden (siehe nebenstehende Figur); wenn der Durchmesser der Welle ausserhalb der Kupplung $d = 90^{mm}$ ist, so fragt man, wie gross ist der Durchmesser d_1 jeder der beiden halbkreisförmig geformten Wellenenden zu machen?

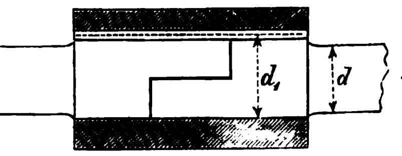


Fig. 146.

Auflösung. Das Torsionsmoment $M = PR$, welches die Welle vom Durchmesser d beansprucht, haben auch die Wellenenden, deren Querschnitte halbkreisförmig sind, aufzunehmen, daher muss das polare Trägheitsmoment des halbkreisförmigen Querschnittes, multiplicirt mit der zulässigen Torsionsspannung $\mathfrak{S}$ gleich gesetzt werden dem Torsionsmomente M; es ist also $M = \mathfrak{S} Z_1 = \mathfrak{S} Z$, wenn Z_1 dem halbkreisförmigen und Z dem kreisförmigen Querschnitte der Welle entspricht. Das Trägheitsmoment des Halbkreises, bezogen auf dessen horizontale Schweraxe ist:

$$J_1 = \frac{\pi r_1^4}{8} - \frac{\pi r_1^2}{2} \left(\frac{4 r_1}{3\pi}\right)^2 = \frac{r_1^4 (9\pi^2 - 64)}{72\pi}, \text{ wobei } \frac{4 r_1}{3\pi}$$

die Entfernung des Schwerpunktes vom horizontalen Durchmesser bedeutet.

Das Trägheitsmoment des Halbkreises, bezogen auf dessen verticale Schweraxe, ist $J_2 = \frac{\pi r_1^4}{8}$, daher das polare Trägheitsmoment

$$J_p = J_1 + J_2 = \frac{r_1^4 (9\pi^2 - 64)}{72\pi} + \frac{\pi r_1^4}{8}, \text{ oder}$$

$$J_p = \frac{r_1^4 (18\pi^2 - 64)}{72\pi} = 0{,}5025\, r_1^4.$$

Die Entfernung c des Schwerpunktes des Halbkreises von der äussersten Faser ist offenbar die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen eine Kathete die Entfernung des Schwerpunktes vom Mittelpunkte des Kreises und die andere Kathete der Halbmesser ist; daher

$$c = \sqrt{\left(\frac{4 r_1}{3\pi}\right)^2 + r^2} = \sqrt{\frac{16 r_1^2 + 9\pi^2 r^2}{9\pi^2}}, \text{ oder}$$

$$c = \frac{r_1}{3\pi}\sqrt{16 + 9\pi^2},$$

somit der polare Querschnittsmodul:

$$Z_p = \frac{J_p}{c} = \frac{0{,}5025\, r_1^4}{\frac{r_1}{3\pi}\sqrt{16 + 9\pi^2}}, \text{ oder}$$

$$Z_p = \frac{3\pi \,.\, 0{,}5025\, r_1^3}{\sqrt{16 + 9\pi^2}} = 0{,}147\, \pi r_1^3.$$

Durch Gleichsetzung der beiden polaren Trägheitsmomente, des vollen Kreisquerschnittes vom Halbmesser r und des Halbkreises vom Halbmesser r_1, erhält man: $\frac{\pi r^3}{2} = 0{,}147\, \pi r_1^3$, woraus

$$r_1 = \frac{r}{\sqrt[3]{0{,}147 \,.\, 2}} = \frac{r}{0{,}66494} = 1{,}503\, r$$

und abgerundet $r_1 = 1{,}5\, r$, oder $d_1 = 1{,}5\, d$ folgt; der Durchmesser des halbkreisförmigen Wellenendes wird demnach:

$$d_1 = 1{,}5 \,.\, 90 = 135^{mm}.$$

16. Mittelst einer Bauwinde mit doppelter Räderübersetzung ist eine Last von $Q = 2500^{Kg}$ in die Höhe zu heben; man fragt nach den Durchmessern der schmiedeisernen Wellen.

Auflösung. Wir machen folgende Annahmen: An den Enden der Kurbelwelle wirken zwei Mann, jeder mit 16^{Kg} Kraft an einer

Kurbel von $R = 400^{mm}$ Länge, der Halbmesser der Seiltrommel sei $r = 120^{mm}$; darnach erhält man die ganze Räderübersetzung

$$i = \frac{Q r}{P R} = \frac{2500 \, . \, 120}{32 \, . \, 400} = 23^7/_{16}$$

und abgerundet $i = 24$; wir zerlegen diese Uebersetzungszahl in die zwei Factoren $i_1 = \frac{R_1}{r_1} = \frac{Z_1}{z_1} = 4$, und $i_2 = \frac{R_2}{r_2} = \frac{Z_2}{z_2} = 6$, wobei R_1, r_1, Z_1, z_1 die Theilkreishalbmesser und Zähnezahlen des ersten Räderpaares (zwei ineinander greifende Zahnräder), R_2, r_2, Z_2, z_2 die Halbmesser und Zähnezahlen des zweiten Räderpaares bedeuten. Für die erste Welle (Kurbelwelle) ist das Torsionsmoment $M_1 = PR = 32 . 400 = 12800$, für die zweite Welle ist das Torsionsmoment $M_2 = D_1 R_1$, wobei D_1 den Zahndruck im ersten Räderpaare und R_1 den Halbmesser des grossen Rades im ersten Räderpaare bedeuten (siehe nebenstehende Figur).

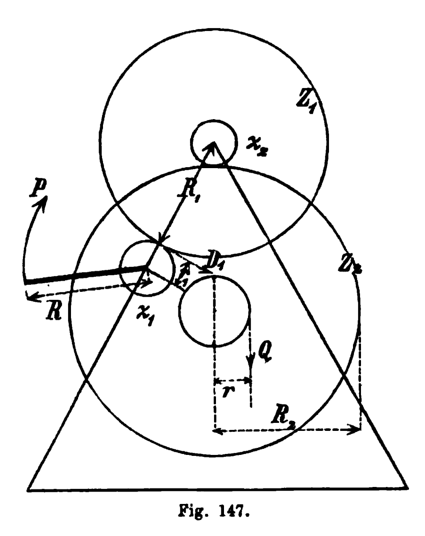


Fig. 147.


Die letzte Gleichung durch die Gleichung „$M_1 = PR = D_1 r_1$“ dividirt (wobei r_1 den Halbmesser des auf der Kurbelwelle sitzenden Getriebes bedeutet):

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{D_1 R_1}{D_1 r_1} = \frac{R_1}{r_1} = i_1 = 4; \text{ daher ist}$$

$$M_2 = M_1 \, i_1 = 12800 \, . \, 4 = 51200,$$

das Torsionsmoment M_3 für die Lastwelle ist:

$$M_3 = Q r = 2500 \, . \, 120 = 300000.$$

Da die Wellen kurz sind, so berechnen wir sie nur auf ihre Torsionsfestigkeit, ohne Rücksicht auf ihre Verdrehung, und gebrauchen die in der Tabelle der Aufgabe 8 enthaltene, für den vorliegenden Fall passende Formel: $d = \sqrt[3]{PR}$, oder allgemein $d = \sqrt[3]{M}$; in diese Gleichung anstatt M die für M_1, M_2 und M_3 gefundenen Werthe nach einander eingesetzt und d_1, d_2, d_3 bestimmt, erhält man abgerundet: $d_1 = 24^{mm}$, $d_2 = 38^{mm}$, $d_3 = 67^{mm}$; die Kurbelwelle wird man jedoch aus praktischen Rücksichten nicht unter 30^{mm} Dicke ausführen.

17. Zwei schmiedeiserne Transmissionswellen von à 45mm Durchmesser werden durch eine Frictions- (Kegel-) Kupplung ausrückbar mit einander verbunden; der mittlere Halbmesser der abgestutzten Kegel- oder Reibungsfläche (mittlerer innerer Halbmesser der Hohlkegelfläche) sei $R = 200^{mm}$; der auf der getriebenen Welle mittelst Feder und Nuth bewegliche Kegelstutz werde mit einer Kraft $p = 18^{Kg}$, welche an dem Ende eines Hebels von sechsfacher Uebersetzung zwischen den beiden Hebelarmen wirkt, in die Hohlkegelfläche hineingedrückt, um die Mitnahme der getriebenen Welle durch Reibung zu bewirken; man fragt: 1) Wie gross ist der Verdrehungswinkel der getriebenen Welle? 2) Welchen Durchmesser hätte die getriebene Welle zu erhalten, wenn ihre Verwindung nicht grösser als $^1/_4{}^\circ$ pro laufenden Meter Länge sein sollte? Der Winkel, den die Kegelseite mit der Axe bildet, ist $\alpha = 12^\circ$.

Auflösung. Für die Berechnung einer schmiedeisernen Transmissionswelle auf Verdrehung hatten wir die Formel:

$$d = 4{,}13 \sqrt[4]{M}, \text{ hieraus ist } M = \left(\frac{d}{4{,}13}\right)^4 = \left(\frac{45}{4{,}13}\right)^4,$$

oder $M = 14113{,}5$ und abgerundet $M = 14114$.

Wird die Kupplung eingerückt, so ist der axiale Druck zwischen den beiden Kegelflächen $K = 6p = 6 \,.\, 18 = 108^{Kg}$ (weil eine sechsfache Hebelübersetzung vorhanden ist), somit ist das Reibungsmoment:

$$M_1 = \frac{RK\mu}{\sin\alpha},$$

wenn μ den Reibungscoëfficienten, hier zwischen Eisen und Eisen, $\mu = 0{,}15$ und α den Winkel bedeutet, den eine Kegelseite mit der

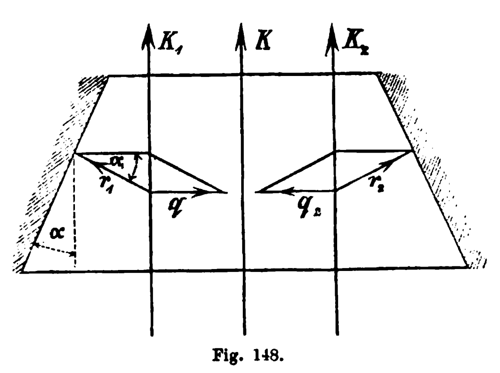


Fig. 148.

Axe bildet. Der die Reibung erzeugende Normaldruck $\frac{K}{\sin\alpha}$ wird auf folgende Art gefunden: Unter der Annahme, dass der Druck K

gleichförmig über der ganzen Kegelfläche vertheilt wird, zerlegen wir diese Kraft K in eine Reihe paralleler Kräfte K_1, K_2, $K_3 \ldots . K_n$, welche symmetrisch um die Axe so vertheilt gedacht werden, dass jeder Kraft K_1 auf der einen Seite von der Axe, eine andere ebenso grosse Kraft K_2 auf der anderen Seite von der Axe gegenüber steht; jede dieser Kräfte K_1, $K_2 \ldots K_n$, zerlegen wir wieder in die normal zur Axe gerichteten Componenten q_1, $q_2 \ldots . q_n$ (siehe Figur 148), welche sich, als einander entgegengesetzt und gleich gross, gegenseitig aufheben, und in die auf den Kegelseiten senkrechten Componenten r_1, $r_2 \ldots . r_n$. Die die Reibung erzeugenden Normaldrücke sind $r_1 + r_2 + \ldots . r_n$, es ist aber

$$r_1 = \frac{K_1}{\sin\alpha},\ r_2 = \frac{K_2}{\sin\alpha},\ r_n = \frac{K_n}{\sin\alpha},$$

die Summe dieser Normaldrücke:

$$r_1 + r_2 + \ldots r_n = \frac{K_1}{\sin\alpha} + \frac{K_2}{\sin\alpha} + \ldots \frac{K_n}{\sin\alpha}, \text{ oder}$$

$$r_1 + r_2 + \ldots r_n = \frac{1}{\sin\alpha}(K_1 + K_2 + \ldots . K_n) = \frac{K}{\sin\alpha}$$

ist der die Reibung erzeugende Normaldruck; dieser mit dem Reibungscoëfficienten μ multiplicirt, gibt die Reibungsgrösse, welche mit dem Halbmesser R multiplicirt, das Reibungsmoment M_1 darstellt. Man erhält also:

$$M_1 = \frac{200 \,.\, 108 \,.\, 0{,}15}{\sin 12^\circ} = \frac{200 \,.\, 108 \,.\, 0{,}15}{0{,}2079} = 15584;$$

da $M_1 > M$ ist, so wird die Mitnahme der getriebenen Welle durch die Frictionskupplung erfolgen; es wird aber auch die getriebene Welle wegen des vergrösserten Torsionsmomentes etwas mehr als $^1/_4{}^\circ$ pro laufenden Meter Länge verwunden werden. Da nun nach der Formel für den Verdrehungswinkel dieser dem Torsionsmomente direct proportional ist, so wird die getriebene Welle pro Meter Länge eine Verdrehung erleiden: $\alpha_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{M_1}{M} = \frac{1}{4} \cdot \frac{15584}{14114}$, oder $\alpha_1 = 0{,}276^\circ$. Soll die getriebene Welle keine grössere Verdrehung erleiden als $^1/_4{}^\circ$ pro Meter Länge, so müsste, dem Reibungsmomente M_1 entsprechend, die Welle einen Durchmesser erhalten:

$$d_1 = 4{,}13 \sqrt[4]{M_1} = 4{,}13 \sqrt[4]{15584} = 46{,}17, \text{ oder}$$

$$d_1 = d \sqrt[4]{\frac{M_1}{M}} = 45 \sqrt[4]{\frac{15584}{14114}} = 46{,}17$$

und abgerundet $d_1 = 46^{mm}$.

18. Eine einfache Torsionsfeder von kreisförmigem Querschnitte sei mit dem einen Ende fest eingespannt, und werde am anderen Ende durch eine Kraft $P = 125^{Kg}$ auf Verdrehung beansprucht; diese Kraft wirkt an dem Umfange einer kreisförmigen Scheibe vom Halbmesser R, welche auf dem freien Ende der Feder befestigt ist, die Länge der letzteren ist $l = 1000^{mm}$; die Grösse der gewünschten Federung sei $f = 90^{mm}$, das Material der Feder sei gehärteter und angelassener Gussstahl; man fragt 1) nach dem Durchmesser d der Feder und 2) nach dem Halbmesser R der Scheibe.

Auflösung. Die Beanspruchung dieser Feder auf Torsion ist offenbar dieselbe, wie bei einer Torsionswelle von der Länge l und dem Durchmesser d, das Torsionsmoment ist PR, folglich wird zur Berechnung von d dieselbe Formel wie bei einer Transmissionswelle, nämlich $PR = \frac{\mathfrak{S}\pi d^3}{16}$ dienen. In dieser Gleichung ist aber noch die Unbekannte R enthalten, wir haben daher noch eine zweite Gleichung, in der die Unbekannten R und d vorkommen, aufzustellen. Die gewünschte Federung f ist nichts anderes, als die Länge eines Kreisbogens vom Halbmesser R, entsprechend dem Verdrehungswinkel α, den die Feder durch die Kraft P erleiden soll, somit ist die Bogenlänge f, um welche der Angriffspunkt der Kraft bei Aufhören der Kraftwirkung wieder zurückgehen soll, $f = R\alpha$; nach der Lehre von der Torsionsfestigkeit ist aber der Verdrehungswinkel $\widehat{\alpha} = \frac{PRl}{J_p G} = \frac{32 PRl}{\pi d^4 G}$, daher $f = \frac{32 PR^2 l}{\pi d^4 G}$, aus dieser Gleichung und der Gleichung „$PR = \frac{\mathfrak{S}\pi d^3}{16}$“ die Werthe von R bestimmt und einander gleich gesetzt:

$$\frac{\mathfrak{S}\pi d^3}{16 P} = \sqrt{\frac{\pi d^4 G f}{32 Pl}}, \text{ hieraus ist}$$

$$\frac{\mathfrak{S}\pi d}{16 P} = \sqrt{\frac{\pi G f}{32 Pl}} \text{ und } d = \frac{16 P}{\mathfrak{S}\pi}\sqrt{\frac{\pi G f}{32 Pl}}, \text{ oder}$$

$$d = \sqrt{\frac{16 \,.\, 16 P^2 \pi G f}{\mathfrak{S}^2 \pi^2 \,.\, 32 Pl}} = \frac{4}{\mathfrak{S}}\sqrt{\frac{PGf}{2\pi l}};$$

der Elasticitätsmodul E des gehärteten und angelassenen Gussstahls ist: $E = 30000$, daher $G = \frac{2}{5} E$, $G = \frac{2}{5} \,.\, 30000 = 12000$; der Tragmodul des Federmaterials für Schub ist $T = 100^{Kg}$, daher nehmen wir als zulässige Schubspannung $\mathfrak{S} = 32$, was eine genü-

gende Sicherheit gewährt; die Zahlenwerthe in obige Gleichung für d eingesetzt:

$$d = \frac{4}{32} \sqrt{\frac{125 \,.\, 12000 \,.\, 90}{2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 1000}} = 18{,}3^{mm};$$

hiermit findet man

$$R = \frac{\mathfrak{S}\, \pi\, d^3}{16\, P} = \frac{32 \,.\, 3{,}14\, (18{,}3)^3}{16 \,.\, 125},$$

oder $R = 307{,}89$ und abgerundet

$$R = 308^{mm}.$$

Der Winkel α, um welchen die Feder verdreht wird, ist:

$$\widehat{\alpha} = \frac{f}{R} = \frac{90}{308} = \frac{45}{154},$$

oder im Gradmass:

$$\alpha^0 = \widehat{\alpha} \,.\, \frac{180}{3{,}14} = \frac{45}{154} \cdot \frac{180}{3{,}14} = 16{,}75^0,$$

die Grösse der Biegsamkeit der Feder ist

$$\frac{f}{R} = \frac{90}{308} = 0{,}2922.$$

19. Dieselbe Aufgabe, wie in voriger Nummer, jedoch mit dem Unterschiede, dass der Querschnitt der Feder ein Rechteck von den Dimensionen b und h ist, wobei $b < h$ sein soll; es sind die Querschnittsdimensionen b und h der Feder, sowie der Halbmesser R, an dem die Kraft wirkt, zu bestimmen.

Auflösung. Zur Berechnung der drei Unbekannten b, h und R haben wir drei Gleichungen aufzustellen. Für das Torsionsmoment M haben wir die Festigkeitsgleichung: $M = PR = \mathfrak{S}\, Z$, wobei Z den polaren Querschnittsmodul für das Rechteck $Z = \frac{2}{9}\, b^2 h$ bedeutet; man hat also die erste Gleichung:

$$PR = \frac{2}{9}\, b^2 h\, \mathfrak{S} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (1)$$

Die Federung f ist ausgedrückt durch die Gleichung: $f = R\, \widehat{\alpha}$, und da nach der Theorie der Torsionsfestigkeit allgemein

$$\widehat{\alpha} = \frac{\delta\, P R\, l}{\frac{4\, J_1\, J_2}{J_1 + J_2} \,.\, G},$$

diese Formel für den vorliegenden Fall specialisirt,

$$\widehat{\alpha} = \frac{3\,\delta\,P R\,(b^2 + h^2)\,l}{G\,b^3 h^3}$$

gibt, so hat man die zweite Gleichung:

$$f = \frac{3\,\delta\,P R^2 l\,(b^2 + h^2)}{G\,b^3 h^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

In dieser Gleichung bedeutet δ einen Coëfficienten, der zwischen 1,2 und 1,5 schwankt, und der Grösse 1,5 sich umsomehr nähert, je grösser das Verhältniss $\frac{h}{b}$, d. h. je grösser h im Vergleiche zu b wird. Durch Annahme eines Verhältnisses zwischen b und h gelangen wir endlich zur dritten Gleichung, wir setzen

$$b = \beta h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Aus Gleichung (1) ist $R = \frac{2\,b^2 h\,\mathfrak{S}}{9\,P}$, aus Gleichung (2) ist $R = \sqrt{\frac{G\,b^3 h^3 f}{3\,\delta\,P l\,(b^2 + h^2)}}$, diese beiden Werthe von R einander gleich gesetzt, gibt:

$$\sqrt{\frac{G\,b^3 h^3 f}{3\,\delta\,P l\,(b^2 + h^2)}} = \frac{2\,b^2 h\,\mathfrak{S}}{9\,P},$$

beiderseits quadrirt und nachher reducirt:

$$\frac{G\,b^3 h^3 f}{3\,\delta\,P l\,(b^2 + h^2)} = \frac{4\,b^4 h^2 \mathfrak{S}^2}{81\,P^2}, \text{ oder}$$

$$\frac{G\,h f}{\delta\,l\,(b^2 + h^2)} = \frac{4\,b\,\mathfrak{S}^2}{27\,P},$$

vom Nenner befreit:

$$27\,P G h f = 4\,b\,\mathfrak{S}^2 \delta\,l\,(b^2 + h^2),$$

den Werth von b aus Gleichung (3) hier eingesetzt:

$$27\,P G h f = 4\,\beta h\,\mathfrak{S}^2 \delta\,l\,(\beta^2 h^2 + h^2), \text{ oder}$$

$$27\,P G f = 4\,\beta\,\mathfrak{S}^2 \delta\,l h^2\,(\beta^2 + 1); \text{ hieraus ist}$$

$$h = \sqrt{\frac{27\,P G f}{4\,\mathfrak{S}^2 \delta\,l\,(\beta^2 + 1)\,\beta}} = \frac{3}{2\,\mathfrak{S}} \sqrt{\frac{3\,P G f}{\delta\,\beta\,l\,(\beta^2 + 1)}}.$$

In die Gleichung „$b = \beta h$“ für h den eben gefundenen Werth gesetzt:

$$b = \frac{3\,\beta}{2\,\mathfrak{S}} \sqrt{\frac{3\,P G f}{\delta\,\beta\,l\,(\beta^2 + 1)}} = \frac{3}{2\,\mathfrak{S}} \sqrt{\frac{3\,\beta\,P G f}{\delta\,l\,(\beta^2 + 1)}};$$

setzt man die für b und h gefundenen Werthe in die Gleichung „$R = \frac{2\,b^2 h \mathfrak{S}}{9\,P}$" ein, so erhält man:

$$R = \frac{2 \cdot \frac{9}{4\,\mathfrak{S}^2} \cdot \frac{3\,\beta P G f}{\delta\, l\,(\beta^2+1)} \cdot \frac{3}{2\,\mathfrak{S}} \sqrt{\frac{3\,P G f}{\delta\, \beta\, l\,(\beta^2+1)}} \cdot \mathfrak{S}}{9\,P}, \text{ oder}$$

$$R = \frac{\frac{81}{4} \cdot \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}^3} \sqrt{\frac{P^3 G^3 f^3 \beta}{\delta^3 l^3 (\beta^2+1)^3}}}{9\,P} = \frac{9 \sqrt{\beta \left[\frac{P G f}{\delta\, l\,(\beta^2+1)}\right]^3}}{4\,\mathfrak{S}^2 P},$$

wir nehmen $\beta = \frac{1}{3}$ und $\delta = 1{,}35$ an; in die Gleichung für h die Zahlenwerthe eingesetzt:

$$h = \frac{3}{2 \cdot 32} \sqrt{\frac{3 \cdot 125 : 12000 \cdot 90}{1{,}35 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1000 \left(\frac{1}{9}+1\right)}} = 42^{3}/_{16}{}^{mm}$$

und abgerundet $h = 42^{mm}$, hiermit wird $b = \frac{h}{3} = 14^{mm}$, man erhält ferner:

$$R = \frac{2 \cdot 14^2 \cdot 42 \cdot 32}{9 \cdot 125} = 468{,}3$$

und abgerundet $R = 468^{mm}$.

Der Verdrehungswinkel α wird:

$$\widehat{\alpha} = \frac{f}{R} = \frac{90}{468}, \text{ oder } \alpha^0 = \frac{90}{468} \cdot \frac{180}{\pi} = 11{,}016^0,$$

oder abgerundet 11^0.

Vergleicht man die Volumina der in den Aufgaben 18 und 19 berechneten Federn, so sieht man, dass im ersten Falle das Volumen wesentlich kleiner ist, als im zweiten Falle; man hat für den ersten Fall:

$$V_1 = \frac{\pi d^2 l}{4} = \frac{3{,}14\,(18{,}3)^2 \cdot 1000}{4} = 263020^{mm^3},$$

im zweiten Falle ist

$$V_2 = b\,h\,l = 14^{1}/_{16} \cdot 42^{3}/_{16} \cdot 1000, \text{ oder } V_2 = 593260^{mm^3}; \text{ daher}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{593260}{263020} = 2{,}255,$$

im zweiten Falle ist also das Volumen 2,255mal grösser, als im ersten Falle; diese Volumvergrösserung wird jedoch dann nicht so

bedeutend sein, wenn der Halbmesser $R = 308^{mm}$, wie in Aufgabe 18 angenommen, und nach der Federung f gefragt wird: in diesem Falle hat man die beiden Gleichungen

$$PR = \frac{2}{9} \mathfrak{S} b^2 h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

und

$$b = \beta h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

nach den Unbekannten b und h aufzulösen, und in die Gleichung

$$f = R\hat{\alpha} = \frac{R^2 P . 3 \delta l (b^2 + h^2)}{G b^3 h^3} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

die gefundenen Werthe einzusetzen. Man erhält aus (1) und (2):

$$PR = \frac{2}{9} \mathfrak{S} \beta^2 h^3, \text{ hieraus ist}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{9\, PR}{2\, \mathfrak{S} \beta^2}} = \sqrt[3]{\frac{9 . 125 . 308}{2 . 32 . \frac{1}{9}}} = 35{,}805$$

und abgerundet $h = 36^{mm}$, hiermit wird $b = \frac{h}{3} = \frac{36}{3} = 12^{mm}$; die Federung f ist nach obiger Gleichung für f, wenn man die Zahlenwerthe darin einsetzt:

$$f = \frac{(308)^2 125 . 3 . 1{,}35 . 1000 (144 + 1296)}{12000 . 1728 . 46656} = 71{,}48^{mm}.$$

der Verdrehungswinkel α wird:

$$\alpha^0 = \frac{f}{R} . \frac{180}{\pi} = \frac{71{,}48 . 180}{308 . 3{,}14} = 13{,}303^0.$$

Jetzt ist aber das Volumen:

$$V_2 = bhl = 12 . 36 . 1000 = 432000^{mm^3}, \text{ somit}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{432000}{263020} = 1{,}642;$$

es ist also das Volumen jetzt nur 1,642mal so gross, als bei der Feder von kreisförmigem Querschnitte.

20. Eine cylindrische Schraubenfeder vom mittleren Halbmesser $R = 36^{mm}$ erfährt in der Richtung der Cylinderaxe eine Zugbeanspruchung von $P = 24^{Kg}$; der Federdraht habe einen kreisförmigen Querschnitt vom Durchmesser d, ist aus gehärtetem und angelassenem Gussstahl, die Anzahl der Windungen ist $n = 10$; man fragt:

1) Wie gross ist der Durchmesser d des Drahtes zu machen, 2) wie gross ist die Ausdehnung oder Verlängerung f der Feder und 3) welche Länge l muss der gestreckt gedachte Draht der Feder erhalten?

Auflösung. Die hauptsächlichste Wirkung, die die Kraft P auf die Feder hervorbringt, ist eine Verdrehung der Federelemente mittelst des Torsionsmomentes PR und kann daher der Durchmesser d des Federdrahtes wie der Durchmesser einer auf Torsionsfestigkeit beanspruchten Welle nach der Formel „$PR = \frac{\mathfrak{S} \pi d^3}{16}$“ berechnet werden; man erhält aus dieser Formel:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 PR}{\mathfrak{S}\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16.24.36}{36.3,14}} = 4,95$$

und abgerundet $\underline{d = 5^{mm}}$.

Die Ausdehnung oder Verlängerung f, welche die Feder durch den axialen Zug erleidet, wird auf folgende Art gefunden: Denkt man sich ein Bogenelement ds der spiralförmigen Mittellinie der Feder als geradlinig, so ist der Winkel, um welchen ein Federelement von der Länge ds (um die Mittellinie des Stückes ds als Axe) verdreht wird, nach der Theorie der Torsionsfestigkeit:

$$\delta ds = \frac{\alpha M ds}{J_p G},$$

wobei δ den Verdrehungswinkel auf die Längeneinheit bezogen, α für den Kreisquerschnitt $= 1$, $M = PR$ das Torsionsmoment, J_p das polare Trägheitsmoment des Querschnittes des Federdrahtes, hier $J_p = \frac{\pi}{32} d^4$ und G den Torsions-Elasticitätsmodul $G = 10000$, bedeuten. Diese Verdrehung bewirkt aber eine unendlich kleine Verschiebung des einen Endpunktes des Bogenelementes ds in der Richtung der Axe der Spirale um ein Stück $df = \delta R^2 d\varphi$, wenn hierbei $d\varphi$ den Verwindungswinkel des Federelementes von der Länge ds bedeutet; setzt man in die letzte Gleichung anstatt δ den Werth $\delta = \frac{\alpha PR}{J_p G}$ ein, so ist $df = \frac{\alpha PR^3 d\varphi}{J_p G}$; diese Gleichung integrirt, erhält man die ganze Verschiebung oder Ausdehnung der Feder in der Richtung der Axe:

$$f = \frac{\alpha P}{J_p G} \int_0^{n.2\pi} R^3 d\varphi,$$

da aber im vorliegenden Falle R constant ist, so hat man:

$$f = \left[\frac{\alpha P}{J_p G} . R^3 \varphi\right]_0^{n.2\pi} = \frac{\alpha P}{J_p G} R^3 . 2 n\pi = \frac{2 n \alpha \pi P R^3}{J_p G},$$ oder

$$f = \frac{2 n \pi \alpha P R^3}{\frac{\pi}{32} d^4 G} = \frac{64 n \alpha P R^3}{G d^4} = \frac{64 . 10 . 24 (36)^3 . 1}{10000 . 5^4},$$

oder $f = 114{,}6$ und abgerundet $f = 115^{mm}$.

Die Länge l der gestreckt gedachten Feder ist: $l = 2 \pi R n$, oder genauer:

$$l = n \sqrt{d^2 + (2 \pi R)^2}, \text{ oder } l = 10 \sqrt{5^2 + (2 . 3{,}14 . 36)^2} = 2261{,}35^{mm}.$$

21. Dieselbe Aufgabe, wie in voriger Nummer, jedoch mit dem Unterschiede, dass der Querschnitt des Federdrahtes ein Rechteck von den Dimensionen b und h $(b < h)$ sein soll, und $\frac{b}{h} = \frac{1}{3}$ ist.

Auflösung. Aus der für diesen Fall geltenden Festigkeitsgleichung „$PR = \frac{2 \mathfrak{S} b^2 h}{9}$“ findet man, wenn man für b den Werth $b = \frac{h}{3}$ einsetzt: $PR = \frac{2 \mathfrak{S} h^3}{81}$, und hieraus ist

$$h = \sqrt[3]{\frac{81 PR}{2 \mathfrak{S}}} = \sqrt[3]{\frac{81 . 24 . 36}{2 . 36}} = 9{,}057^{mm},$$

oder abgerundet $h = 9^{mm}$, hiermit wird

$$b = \frac{h}{3} = \frac{9}{3} = 3^{mm}.$$

Nach dem vorigen Beispiele ist die Ausdehnung f, welche die Feder durch die Kraft P erleidet:

$$f = \frac{2 n \pi P R^3 \alpha}{J_p G},$$

wir setzen hier $\alpha = 1{,}35$; nach der Lehre von der Torsionsfestigkeit ist allgemein das polare Trägheitsmoment $J_p = \frac{4 J_1 J_2}{J_1 + J_2}$, wobei J_1 und J_2 die äquatorialen Trägheitsmomente des Rechteckes, bezogen auf die zwei auf einander senkrecht stehenden Axen des Rechteckes, bedeuten; es ist

$$J_1 = \frac{b h^3}{12}, \; J_2 = \frac{b^3 h}{12}, \text{ somit}$$

$$J_p = \frac{4 . \frac{b h^3}{12} . \frac{b^3 h}{12}}{\frac{b h^3 + b^3 h}{12}} = \frac{\frac{4 b^4 h^4}{144}}{\frac{b h}{12} (b^2 + h^2)} = \frac{b^3 h^3}{3 (b^2 + h^2)}.$$

diesen Werth von J_p in die Gleichung für f eingesetzt:

$$f = \frac{2 n \pi P R^3 \alpha}{\frac{b^3 h^3}{3(b^2 + h^2)} \cdot G} = \frac{6 n \pi P R^3 (b^2 + h^2) \alpha}{b^3 h^3 G},$$

die Zahlenwerthe eingesetzt:

$$f = \frac{6 \cdot 10 \cdot 3{,}14 \cdot 24 \cdot (36)^3 (9^2 + 3^2) 1{,}35}{3^3 \cdot 9^3 \cdot 10000} = 130{,}2^{mm}.$$

Die Länge l der gestreckt gedachten Feder ist:

$$l = n \sqrt{h^2 + (2 \pi R)^2} = 10 \sqrt{9^2 + (2 \cdot 3{,}14 \cdot 36)^2} = 2263^{mm}.$$

Anmerkung. Aus der Formel für die Dehnung f ist ersichtlich, dass die Biegsamkeit der Feder (der Quotient $\frac{f}{R}$ stellt die Grösse der Biegsamkeit dar) unabhängig von der Lage des rechteckigen Querschnittes ist, weil die beiden Dimensionen b und h immer symmetrisch in der Formel vorkommen; es ist also für die Biegsamkeit der Feder ganz gleich, ob man die grössere oder kleinere Seite des Rechteckes mit der Federaxe parallel stellt.

Ist der Querschnitt des Drahtes ein Quadrat von der Seite b, so erhält man aus der diesem Falle entsprechenden Festigkeitsformel

$$„PR = \frac{\mathfrak{S} b^3}{3\sqrt{2}}“ \text{ die Quadratseite:}$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{2} \cdot PR}{\mathfrak{S}}} = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{2} \cdot 24 \cdot 36}{36}} = 4{,}6723^{mm};$$

setzt man in der für das Rechteck geltenden Formel

$$„PR = \frac{2 \mathfrak{S} b^2 h}{9}“ \quad h = b, \text{ so ist}$$

$$PR = \frac{2 b^3 \mathfrak{S}}{9}, \text{ woraus } b = \sqrt[3]{\frac{9 PR}{2 \mathfrak{S}}} = \sqrt[3]{\frac{9 \cdot 24 \cdot 36}{2 \cdot 36}},$$

oder $b = \sqrt[3]{108} = 4{,}7622^{mm}$ folgt, also nahezu dasselbe Resultat; wir nehmen für die folgende Rechnung als Mittelwerth $b = 4{,}7^{mm}$. Die Grösse der Ausdehnung f wird hiermit:

$$f = \frac{6 \alpha n \pi P R^3 \cdot 2 b^2}{b^6 G} = \frac{12 \alpha n \pi P R^3}{b^4 G},$$

wenn man in der für das Rechteck geltenden Formel für f, $h = b$ setzt; die Zahlenwerthe: $\alpha = 1{,}2$, $n = 10$, $P = 24$, $R = 36$ eingesetzt, erhält man:

$$f = \frac{12 \cdot 1{,}2 \cdot 10 \cdot 3{,}14 \cdot 24 \cdot (36)^3}{(4{,}7)^4 \cdot 10000} = 103{,}8^{mm}.$$

Betrachtet man noch den Materialverbrauch bei der runddrähtigen und flachdrähtigen cylindrischen Schraubenfeder, wenn beide Federn durch die gleiche Belastung P dieselbe Dehnung f erfahren und aus gleichem Material mit gleicher Sicherheit gemacht sind; so gelangt man zu dem Verhältniss der beiden Materialien-Mengen auf folgende Art:

Es bezeichne: V das Volumen, n die Anzahl der Windungen, R den mittleren Halbmesser der Feder, F den Querschnitt des runden Drahtes, V_1, n_1, R_1, F_1 dieselben Grössen bei dem flachen Draht, so ist offenbar

$$\frac{V_1}{V} = \frac{2\pi n_1 R_1 F_1}{2\pi n R F} = \frac{n_1 R_1 F_1}{n R F},$$

in diese Gleichung ist für $\frac{n_1}{n}$ jener Werth zu setzen, den man durch Gleichsetzung der Dehnungen f und f_1 der beiden Federn aus den beiden Gleichungen

$$„f_1 = \frac{6\alpha_1 n_1 \pi P R_1^3 (h^2 + b^2)}{b^3 h^3 G} \text{ und } f = \frac{64 n \alpha P R^3}{G d^4}“$$

erhält. Setzt man $f_1 = f$, so erhält man:

$$\frac{6\alpha_1 n_1 \pi P R_1^3 (h^2 + b^2)}{b^3 h^3 G} = \frac{64 n \alpha P R^3}{G d^4},$$

für das Rechteck ist $\alpha_1 = 1{,}35$, für den Kreis $\alpha = 1$ einzusetzen, man erhält:

$$\frac{3 \,.\, 1{,}35 \pi n_1 R_1^3 (h^2 + b^2)}{b^3 h^3} = \frac{32 n \,.\, 1 \,.\, R^3}{d^4},$$

setzt man ferner $h = \beta b$ ein, so ist:

$$\frac{3 \,.\, 1{,}35 \pi n_1 R_1^3 (\beta^2 b^2 + b^2)}{b^6 \beta^3} = \frac{32 n R^3}{d^4}, \text{ oder}$$

$$\frac{4{,}05 n_1 R_1^3 (\beta^2 + 1) \pi}{b^4 \beta^3} = \frac{32 n R^3}{d^4},$$

oder beiderseits durch n dividirt und das Verhältniss $\frac{n_1}{n}$ bestimmt:

$$\frac{4{,}05 n_1 R_1^3 (\beta^2 + 1) \pi}{n b^4 \beta^3} = \frac{32 R^3}{d^4}, \text{ hieraus ist:}$$

$$\frac{n_1}{n} = \frac{32 R^3 b^4 \beta^3}{4{,}05 d^4 R_1^3 \pi (\beta^2 + 1)};$$

nun ist noch das Verhältniss $\frac{F_1}{F}$ zu bestimmen; es ist

$$F_1 = b h \text{ oder } F_1 = b \,.\, \beta b = b^2 \beta \text{ und } F = \frac{\pi d^2}{4},$$

daher: $\frac{F_1}{F} = \frac{4 b^2 \beta}{d^2 \pi}$, die Werthe von $\frac{n_1}{n}$ und $\frac{F_1}{F}$ in die Gleichung für $\frac{V_1}{V}$ eingesetzt, gibt:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{32 R^3 b^4 \beta^3}{4{,}05\, d^4 R_1^3 (\beta^2 + 1) \pi} \cdot \frac{R_1}{R} \cdot \frac{4 b^2 \beta}{d^2 \pi}, \text{ oder}$$

$$\frac{V_1}{V} = \frac{128 R^2 b^6 \beta^4}{4{,}05\, d^6 R_1^2 (\beta^2 + 1) \pi^2} = \frac{128 R^2 \beta^4}{4{,}05\, R_1^2 \pi^2 (\beta^2 + 1)} \cdot \left(\frac{b}{d}\right)^6.$$

Nun ist noch das Verhältniss $\frac{b}{d}$ durch das Verhältniss $\frac{R_1}{R}$ auszudrücken; dies geschieht auf folgende Art: Für den Kreisquerschnitt hatten wir die Formel: $P = \frac{\mathfrak{S} \pi d^3}{16 R}$, für den Rechteck-Querschnitt: $P = \frac{2 \mathfrak{S} b^2 h}{9 R_1}$, die beiden Werthe von P einander gleich gesetzt:

$$\frac{\pi}{16} \cdot \frac{d^3}{R} = \frac{2 b^2 h}{9 R_1}, \quad h = \beta b \text{ eingesetzt:}$$

$$\frac{\pi d^3}{16 R} = \frac{2 b^3 \beta}{9 R_1}, \text{ hieraus ist}$$

$$\left(\frac{b}{d}\right)^3 = \frac{9 \pi R_1}{32 \beta R} \text{ und } \left(\frac{b}{d}\right)^6 = \left(\frac{9 \pi R_1}{32 \beta R}\right)^2,$$

diesen Werth von $\left(\frac{b}{d}\right)^6$ in die Gleichung für $\frac{V_1}{V}$ eingesetzt:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{128 R^2}{4{,}05 R_1^2} \cdot \frac{81 \pi^2 R_1^2}{(32)^2 \beta^2 R^2} \cdot \frac{\beta^4}{(\beta^2 + 1) \pi^2}, \text{ reducirt:}$$

$$\frac{V_1}{V} = \frac{10368 \beta^2}{4141{,}2 (\beta^2 + 1)} = \frac{2{,}5036 \beta^2}{\beta^2 + 1};$$

hieraus ist ersichtlich, dass die cylindrische Schraubenfeder von rechteckigem Drahtquerschnitte nahezu $2^1/_2$mal soviel Material braucht, als die Feder von rundem Drahtquerschnitte unter gleichen Verhältnissen; ferner ersieht man, dass das Verhältniss $\frac{V_1}{V}$ unabhängig

von den Halbmessern R und R_1 nur in ganz geringem Grade von dem Verhältnisse $\beta = \frac{h}{b}$ abhängig ist. Es sei z. B. $\beta = 3$, wie auch im vorliegenden Beispiele angenommen wurde, so ist dann $\frac{V_1}{V} = \frac{2,5036 \,.\, 9}{9+1} = 2,25324$; wird $\beta = 1$, d. h. der Querschnitt des Drahtes wird ein Quadrat, so ist:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{2,5036 \,.\, 1^2}{2} = 1,2518;$$

der geringste Materialverbrauch ist daher beim runden Drahtquerschnitte, grösser ist er beim quadratischen und am grössten beim rechteckigen Drahtquerschnitte.

22. Für eine Federwage von 50^{Kg} Tragkraft soll eine cylindrische Schraubenfeder aus rundem Gussstahldraht angefertigt werden; man verlangt, dass auf der Gewichtsscala die Theilstriche, die den einzelnen Kilogrammen entsprechen sollen, 2^{mm} weit von einander entfernt sein sollen, dass also die durch die Kraft von $P = 50^{Kg}$ hervorgebrachte ganze Dehnung der Feder $f = 100^{mm}$ betrage; man fragt nach dem Durchmesser d des Drahtes, der Anzahl n der Windungen und dem mittleren Halbmesser R der Spirale.

Auflösung. Zur Auffindung der drei Unbekannten d, n und R haben wir nur die zwei Gleichungen:

$$PR = \frac{\mathfrak{S} \pi d^3}{16} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

und

$$f = \frac{64 n P R^3 \alpha}{G d^4} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Wir nehmen daher eine der Unbekannten an, wir setzen z. B. $d = 5^{mm}$ und erhalten aus Gleichung (1)

$$R = \frac{\mathfrak{S} \pi d^3}{16 P},$$

die Zahlenwerthe eingesetzt:

$$R = \frac{36 \,.\, 3,14 \,.\, 5^3}{16 \,.\, 50} = 17,66,$$

wir runden diesen Werth ab auf $R = 20^{mm}$. Aus Gleichung (2) findet man:

$$n = \frac{f G d^4}{64 P R^3 \alpha} = \frac{100 \,.\, 10000 \,.\, 5^4}{64 \,.\, 50\, (20)^3 \,.\, 1} = 24,4.$$

Sollte es aus irgend einem Grunde wünschenswerth sein, statt der einen Feder zwei ineinanderliegende, mit einander entsprechend verbundene Federn anzuwenden, welche zusammen die Tragkraft $P = 50^{Kg}$ haben, so muss die Drahtdicke der inneren Feder eine kleinere sein, als die der äusseren, auch die Anzahl der Windungen wird dann kleiner ausfallen. Man hat dann die Aufgabe, zwei cylindrische Schraubenfedern herzustellen, welche die gleiche Dehnung durch die Belastung erfahren sollen und verschiedene Halbmesser haben. Nehmen wir im vorliegenden Falle an, jede der Federn soll 25^{Kg} Tragkraft haben; da hier der Halbmesser R als gegeben zu betrachten sein wird, so rechnet man aus Gleichung (1) den Durchmesser d des Drahtes und aus (2) mit dem gefundenen Werthe von d die Grösse n aus.

23. Eine Kegelschraubenfeder aus Gussstahl für einen Puffer eines Eisenbahnwagens soll im zusammengedrückten Zustande einen Widerstand von $P = 2000^{Kg}$ entgegensetzen und bei diesem Drucke sich um eine Länge $f = 40^{mm}$ unter ihre Normallänge (Länge im nicht gedrückten Zustande) verkürzen; der Querschnitt des Drahtes sei eine Kreisfläche. Man fragt nach dem mittleren Halbmesser R der grösseren Endfläche des Kegelstutzes, der Anzahl n der Windungen, und nach dem Durchmesser d des Rundstahls.

Auflösung. In Aufgabe Nummer 20 hatten wir für die Dehnung einer Schraubenfeder im Allgemeinen die Gleichung:

$$f = \frac{\alpha P}{J_p G} \int_0^{n.2\pi} \rho^2 d\varphi,$$

wenn wir die constante Grösse R in Aufgabe 20 hier durch die Veränderliche ρ ersetzen; ρ ist ein beliebiger Fahrstrahl (radius vector) der Curve, durch welche die Horizontalprojection der gekrümmten Mittellinie der Feder dargestellt werde; diese Horizontalprojection ist hier eine Spirale, deren Polargleichung ist:

$$\rho = R - \frac{\varphi}{2\pi n}(R - r),$$

wenn R und r die mittleren Halbmesser der beiden Endflächen des Kegelstutzes bedeuten und der Durchschnittspunkt der Federaxe mit der Projectionsebene als Pol betrachtet wird. Mit diesem Werthe von ρ erhält man:

$$f = \frac{\pi n}{2} \cdot \frac{\alpha P}{J_p G}\left(\frac{R^4 - r^4}{R - r}\right);$$

für den Kreisquerschnitt des Federdrahtes ist

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32};$$

man erhält daher:

$$f = \frac{\pi n \alpha P (R^4 - r^4)}{2 G (R - r)} \cdot \frac{32}{\pi d^4} = \frac{16 n \alpha P (R^4 - r^4)}{G d^4 (R - r)}.$$

Zur Berechnung des Durchmessers d hat man dieselbe Formel wie früher bei der cylindrischen Schraubenfeder, $PR = \frac{\mathfrak{S} \pi d^3}{16}$, jedoch ist hier der Unterschied der, dass die Kegelschraubenfeder kein Körper von der Form der gleichen Festigkeit ist, wie dies bei der cylindrischen Schraubenfeder der Fall ist; die grösste Spannung bei ersterer ist dort, wo der Fahrstrahl ρ am grössten, also $\rho = R$ ist, das ist also in der grösseren Endfläche des Kegelstutzes. Aus der letzten Gleichung ist:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 PR}{\mathfrak{S} \pi}}.$$

Nehmen wir die beiden Werthe R und r mit $R = 80^{mm}$, $r = 40^{mm}$ an, so ist

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \, . \, 2000 \, . \, 80}{36 \, . \, 3{,}14}} = 28{,}2$$

und abgerundet $d = 28^{mm}$.

Aus der obigen Gleichung für die Dehnung f folgt die Anzahl n der Windungen:

$$n = \frac{G d^4 f (R - r)}{16 \alpha P (R^4 - r^4)},$$

die Zahlenwerthe eingesetzt:

$$n = \frac{10000 \, (28)^4 \, . \, 40 \, (80 - 40)}{16 \, . \, 1 \, . \, 2000 \left[(80)^4 - (40)^4\right]} = 8.$$

24. Dieselbe Aufgabe wie die vorige, jedoch mit dem Unterschiede, dass der Querschnitt des Federdrahtes ein Rechteck von den Dimensionen b und h $(b < h)$ sein soll.

Auflösung. Zur Berechnung der Querschnittsdimensionen b und h wenden wir hier dieselbe Formel an, wie bei der cylindrischen Schraubenfeder von rechteckigem Drahtquerschnitte, nämlich:

$$PR = \frac{2 \mathfrak{S} b^2 h}{9},$$

wir setzen $\frac{h}{b} = 10$, also $b = \frac{h}{10}$ und erhalten:

$$PR = \frac{2 \mathfrak{S} h^3}{900}, \text{ hieraus ist:}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{900\,PR}{2\,\mathfrak{S}}} = \sqrt[3]{\frac{900 \cdot 2000 \cdot 80}{2 \cdot 36}} = 126$$

$h = 126^{mm}$, hiermit wird $b = 12{,}6^{mm}$.

Setzt man in die für die Kegelschraubenfeder von beliebigem Drahtquerschnitte, in der vorigen Aufgabe für die Dehnung resp. Kürzung aufgestellte Formel:

$$f = \frac{\pi n}{2} \cdot \frac{\alpha P}{J_p G} \cdot \frac{R^4 - r^4}{R - r},$$

für J_p den dem Rechteck-Querschnitt entsprechenden Werth

$$„J_p = \frac{b^3 h^3}{3\,(h^2 + b^2)}“$$

ein (siehe Aufgabe 21), so erhält man:

$$f = \frac{\pi n \alpha}{2} \cdot \frac{P}{G\,\frac{b^3 h^3}{3\,(h^2 + b^2)}} \cdot \frac{R^4 - r^4}{R - r} = \frac{\pi n \alpha P (h^2 + b^2) 3}{2\,G b^3 h^3} \cdot \frac{R^4 - r^4}{R - r},$$

oder

$$f = \frac{3\,\alpha \pi n P (h^2 + b^2)}{2\,G b^3 h^3} \cdot \frac{R^4 - r^4}{R - r}, \text{ hieraus ist}$$

$$n = \frac{2\,G b^3 h^3 f}{3\,\alpha \pi P (h^2 + b^2)} \cdot \frac{R - r}{R^4 - r^4},$$

die Zahlenwerthe eingesetzt, wobei wir $\alpha = 1{,}5$, $R = 80^{mm}$ und $r = 40^{mm}$ annehmen:

$$n = \frac{2 \cdot 10000\,(12{,}6)^3\,(126)^3 \cdot 40}{3 \cdot 1{,}5 \cdot 3{,}14 \cdot 2000\,\left[(126)^2 + (12{,}6)^2\right]} \cdot \frac{80 - 40}{(80)^4 - (40)^4} = 7{,}35.$$

Anmerkung. Der Materialverbrauch ist, wie eine specielle Untersuchung zeigt, zwar bei dieser Kegelfeder ungefähr doppelt so gross, als bei der cylindrischen Schraubenfeder von rechteckigem Drahtquerschnitte, allein erstere hat den Vortheil, dass die ganze Feder sich auf eine kleine Höhe zusammenpressen lässt, weil sich die Gänge ineinanderschieben lassen.

Aufgaben aus der Lehre von der Zerknickungs- und zusammengesetzten Festigkeit.

1. Eine Säule aus Tannenholz von kreisförmigem Querschnitte und 3^m Höhe ist mit ihrem unteren Ende fest eingemauert (eingeklemmt) und soll auf ihrem oberen freien Ende eine Last von $P = 4000^{Kg}$ mit zehnfacher Sicherheit tragen; welchen Durchmesser d muss die Säule erhalten?

Auflösung. Für diesen Fall der Unterstützung der Säule haben wir nach der Lehre von der Zerknickungsfestigkeit die Festigkeitsformel

$$P = \frac{\pi^2 J E}{4 l^2 n}$$

zu benützen, in welcher J das Trägheitsmoment, E den Elasticitätsmodul des Materials, l die Länge des Balkens und n den Grad der Sicherheit bedeuten. Setzt man in obige Gleichung für die Tragkraft P statt J den Werth „$J = \frac{\pi d^4}{64}$" (dem Kreisquerschnitte entsprechend), so erhält man:

$$P = \frac{\pi^2 \cdot \frac{\pi d^4}{64} \cdot E}{4 l^2 n} = \frac{\pi^3 d^4 E}{64 \cdot 4 l^2 n}, \text{ hieraus ist}$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot 4 P l^2 n}{\pi^3 E}},$$

die Zahlenwerthe eingesetzt:

$$d = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot 4 \cdot 4000\,(3000)^2\,10}{(3,14)^3 \cdot 1100}} = 227,6$$

und abgerundet $\underline{d = 228^{mm}}$.

Nun ist noch zu untersuchen, ob die Belastung $\mathfrak{S}$ pro Quadratmillimeter Querschnitt die nöthige Sicherheit gegen die einfache

Druckfestigkeit bietet. Es ist nach der Lehre von der einfachen Druckfestigkeit

$$\mathfrak{S} = \frac{P}{f} = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4000}{\frac{3,14\,(228)^2}{4}} = \frac{8000}{81614,88} = 0,098,$$

somit hat man, wenn der Bruchmodul des Tannenholzes gegen Zerdrücken mit $K = 5^{Kg}$ angenommen wird, eine $\frac{5}{0,098} = 51$fache Sicherheit gegen das Zerdrücken.

Berechnet man hingegen die Tragkraft P dieser Säule von 228^{mm} Durchmesser nach der von Grashof angegebenen empirischen Formel $P = \frac{P_d P_k}{n\,(P_d + P_k)}$, worin P_d die Bruchkraft für das Zerdrücken, $P_d = fK$ und P_k die Bruchkraft für das Zerknicken, $P_k = \frac{\pi^2 JE}{4 l^2}$ und n den Sicherheitsgrad bedeuten, so hat man:

$$P_d = (228)^2 \frac{\pi}{4} \,.\, 5 = 204140^{Kg}, \text{ ferner}$$

$$P_k = \frac{\pi^2 \,.\, \frac{\pi d^4}{64} \,.\, E}{4 l^2} = \frac{(3,14)^3\,(228)^4\,1100}{64 \,.\, 4\,(3000)^2} = 40003,64$$

und abgerundet $P_k = 40004^{Kg}$, hiermit wird

$$P = \frac{204140 \,.\, 40004}{10\,(204140 + 40004)} = 3345^{Kg}.$$

Nach dieser empirischen Formel für P erscheint zwar die Tragkraft der Säule etwas kleiner, als nach der ersteren Rechnung; man kann jedoch die Säule unbedenklich mit 4000^{Kg} belasten, da der Sicherheitsgrad $n = 10$ ein genügend grosser ist.

2. Dieselbe Aufgabe, wie die vorige, jedoch mit dem Unterschiede, dass beide Enden der Säule frei auf ebenen Flächen aufliegen und in der ursprünglichen Axe des Stabes geführt sind, resp. in der Richtung der letzteren ausweichen können.

A u f l ö s u n g. Für diesen Fall der Unterstützung der Säule haben wir die Festigkeitsformel:

$$P = \frac{\pi^2 JE}{l^2 n} = \frac{\pi^2 \,.\, \frac{\pi d^4}{64} \,.\, E}{l^2 n}, \text{ oder}$$

$$P = \frac{\pi^3 d^4 E}{64\, l^4 n}, \text{ hieraus ist}$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{64\, P l^2 n}{\pi^3 E}} = \sqrt[4]{\frac{64 \,.\, 4000\, (3000)^2\, 10}{(3{,}14)^3 \,.\, 1100}} = 161,$$

$$\underline{d = 161^{mm}.}$$

3. Dieselbe Aufgabe wie in Nummer 1, jedoch mit dem Unterschiede, dass die beiden Enden der Säule eingemauert (fest eingeklemmt) sind.

Auflösung. Für diesen Fall der Unterstützung der Säule haben wir die Festigkeitsformel „$P = \frac{4\, \pi^2 J E}{l^2 n}$" zu benützen. Den Werth „$J = \frac{\pi d^4}{64}$" eingesetzt:

$$P = \frac{4\, \pi^2 \frac{\pi d^4}{64} \,.\, E}{l^2 n} = \frac{4\, \pi^3 d^4 E}{64\, l^2 n}, \text{ hieraus ist}$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{64\, P l^2 n}{4\, \pi^3 E}} = \sqrt[4]{\frac{64 \,.\, 4000\, (3000)^2\, 10}{4\, (3{,}14)^3 \,.\, 1100}} = 114^{mm}.$$

Die in dem Stabe durch die Belastung von 4000^{Kg} entstehende einfache Druckspannung ist:

$$\mathfrak{S} = \frac{P}{f} = \frac{4000}{3{,}14\, \frac{(114)^2}{4}} = \frac{4000}{10207} = 0{,}39^{Kg},$$

was eine $\frac{5}{0{,}39} = 12{,}8$fache Sicherheit gegen Zerdrücken gibt.

4. Eine schmiedeiserne Stange von rechteckigem Querschnitte ist in verticaler Lage mit ihrem unteren Ende fest eingeklemmt und mit ihrem oberen Ende frei, jedoch in der Richtung der Axe des Stabes geradlinig geführt; die Stange ist 4^m lang und wird in der Richtung ihrer Axe durch eine Last von $P = 1200^{Kg}$ auf ihre Zerknickungsfestigkeit beansprucht; es sind die Querschnittsdimensionen der Stange zu berechnen.

Auflösung. Für diesen Fall der Unterstützung des Stabes haben wir die Festigkeitsformel „$P = \frac{2\, \pi^2 J E}{l^2 n}$" zu gebrauchen. Die Querschnittsdimensionen des Stabes seien h und b, wobei $b < h$ ist, und da bei den auf Zerknickung beanspruchten Stäben das kleinere

der beiden axialen Trägheitsmomente zu nehmen ist, so hat man $J = \frac{b^3 h}{12}$ in die Formel für P einzusetzen. Man erhält:

$$P = \frac{2\,\pi^2 . \frac{b^3 h}{12} . E}{l^2 n} = \frac{b^3 h \pi^2 E}{6\, l^2 n},$$

setzen wir z. B. $h = 5\,b$, so ist

$$P = \frac{5\,b^4 \pi^2 E}{6\, l^2 n}, \text{ woraus } b = \sqrt[4]{\frac{6\,P l^2 n}{5\,\pi^2 E}},$$

oder die Zahlenwerthe eingesetzt,

$$b = \sqrt[4]{\frac{6 . 1200\,(4000)^2 5}{5\,(3{,}14)^2\, 20000}} = 27{,}63^{mm}$$

folgt; somit wird $h = 5\,b = 5 . 27{,}63 = 138{,}15^{mm}$.

5. Eine gusseiserne hohle Säule, die mit ihren beiden Enden fest eingeklemmt ist, hat in der Richtung ihrer Axe eine Last von $P = 5000^{Kg}$ zu tragen, die Höhe der Säule ist $l = 8^m$, es sind die Querschnittsdimensionen derselben zu berechnen.

Auflösung. Die für diesen Fall anzuwendende Festigkeitsformel lautet: $P = \frac{4\,\pi^2 J E}{n\, l^2}$, für J den Werth „$J = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$" gesetzt, wobei D den äusseren und d den inneren Durchmesser der Säule bedeuten:

$$P = \frac{4\,\pi^2 . \frac{\pi\,(D^4 - d^4)}{64} . E}{n\, l^2} = \frac{\pi^3 E\,(D^4 - d^4)}{16\, n\, l^2},$$

wir setzen $d = \alpha D$, hiermit wird:

$$P = \frac{\pi^3 E\,(D^4 - \alpha^4 D^4)}{16\, n\, l^2} = \frac{\pi^3 E D^4 (1 - \alpha^4)}{16\, n\, l^2};$$

hieraus ist

$$D = \sqrt[4]{\frac{16\, n\, l^2 P}{\pi^3 E\,(1 - \alpha^4)}},$$

wir nehmen $\alpha = 0{,}6$, $n = 6$, $E = 10000$ und erhalten mit diesen Werthen:

$$D = \sqrt[4]{\frac{16 . 6\,(8000)^2\, 5000}{(3{,}14)^3\, 10000\,\left[1 - (0{,}6)^4\right]}} = 102^{mm},$$

hiermit wird $d = 0{,}6 . 102 = 61{,}2^{mm}$ und abgerundet $d = 61^{mm}$, was einer Wandstärke $w = 20\frac{1}{2}^{mm}$ entspricht, welche für die

praktische Ausführung der Säule günstig ist. Nun berechnen wir noch die Dimensionen D und d nach der empirischen Formel von Hodgkinson:

$$P = 548775 \cdot \frac{D^{3,55} - d^{3,55}}{l^{1,7}},$$

welche für den vorliegenden Fall gilt, dass nämlich die beiden Säulenenden unbeweglich sind. In dieser Formel bedeutet P die Zerknickungslast in Kilogrammen, D und d sind auf Centimeter als Längeneinheit bezogen.

$d = \alpha D$ eingesetzt:

$$P = 548775 \cdot \frac{D^{3.55} - \alpha^{3,55} D^{3,55}}{l^{1,7}} = \frac{548775\, D^{3,55}\left(1 - \alpha^{3,55}\right)}{l^{1,7}};$$

wir setzen $\alpha = 0,6$ und berechnen die Grössen $l^{1,7}$ und $\alpha^{3,55}$; es sei $l^{1,7} = a = 800^{1,7}$, so ist

$$1,7 \log 800 = \log a = 1,7 \,.\, 2,90309 = 4,935253,$$

diesem Logarithmus entspricht eine Zahl $a = l^{1,7} = 86150$; es sei ferner $\alpha^{3,55} = 0,6^{3,55} = b$, so ist $3,55 \log 0,6 = \log b$, oder

$$\log b = 3,55\,(0,778151 - 1) = -0,78756395;$$

diesem Logarithmus entspricht die Zahl $b = 0,6^{3,55} = 0,163105$, hiermit erhält man:

$$P = \frac{D^{3,55}\left(1 - 0,163105\right) 548775}{86150} = 5,33169\, D^{3,55}, \text{ woraus}$$

$$D^{3,55} = \frac{P}{5,33169}$$

folgt. Da die von der Säule mit sechsfacher Sicherheit zu tragende Last 5000^{Kg} ist, so ist die Zerknickungslast $P = 6 \,.\, 5000 = 30000^{Kg}$, daher hat man:

$$D^{3,55} = \frac{30000}{5,33169},$$

beiderseits logarithmirt:

$$3,55 \log D = \log 30000 - \log 5,33169 = 3,750256,$$

$$\log D = \frac{3,750256}{3,55} = 1,056410,$$

diesem Logarithmus entspricht eine Zahl $D = 11,39^{cm} = 113,9^{mm}$ und abgerundet $D = 114^{mm}$, hiermit wird $d = 0,6 \,.\, 114 = 68,4^{mm}$, was einer Wandstärke von $22,8^{mm}$ entspricht. Man wird selbstver-

ständlich gut thun, die nach der zweiten Methode ausgerechneten grösseren Werthe von D und d zur praktischen Ausführung zu benützen.

Die in der Säule durch die Belastung entstehende Druckspannung ist:

$$\mathfrak{S} = \frac{P}{f} = \frac{5000}{\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)},$$

nehmen wir die für D und d zuerst gefundenen Werthe, so ist

$$\mathfrak{S} = \frac{5000}{\frac{3,14}{4}\left[(102)^2 - (61)^2\right]} = 0,95,$$

was offenbar eine genügende Sicherheit gegen Zerdrücken gewährt.

6. Wie gross ist die Tragfähigkeit einer Säule aus Eichenholz von quadratischem Querschnitte, wenn eine Seite des Quadrates $s = 400^{mm}$, die Säule 8^m hoch und mit ihren beiden Enden unwandelbar befestigt ist?

Auflösung. Die für diesen Fall geltende Festigkeitsgleichung aus der Theorie der Zerknickungsfestigkeit lautet:

$$P = \frac{4\,\pi^2 J E}{n\,l^2},$$

für J den Werth „$J = \frac{s^4}{12}$“ gesetzt:

$$P = \frac{4\,\pi^2 \cdot \frac{s^4}{12} \cdot E}{n\,l^2} = \frac{\pi^2 s^4 E}{3\,n\,l^2},$$

wir setzen $n = 12$, $E = 1170$ und die übrigen Zahlenwerthe ein; man erhält:

$$P = \frac{(3,14)^2 (400)^4\, 1170}{3 \cdot 12 \cdot 64000000} = 128304,8^{Kg}.$$

Nach Hodgkinson ist aber die Tragkraft:

$$P = \frac{248338\, s^4}{n\,l^2} = \frac{248338 \cdot (40)^4}{12\,(800)^2} = 82779^{Kg}.$$

7. Ein einer Eisenconstruction angehörender gusseiserner Stab von kreuzförmigem Querschnitte und von der Länge $l = 1,5^m$ wird durch eine Kraft $P = 3000^{Kg}$ auf seine Zerknickungsfestigkeit beansprucht; der Stab ist an seinen beiden Enden so befestigt, dass er als lose Strebe angesehen werden kann, deren Enden in der Richtung der

ursprünglichen Stabaxe gerade geführt werden; es sind die Querschnittsdimensionen dieses Stabes zu berechnen. (Siehe die folgende Figur.)

Fig. 149.

Auflösung. Die hier anzuwendende Festigkeitsformel ist: $P = \frac{\pi^2 J E}{l^2 n}$, für J den Werth „$J = \frac{B H^3 + b B^3}{12}$" gesetzt, wobei wir $B = \frac{H}{4}$ und $b = H - B$ einführen:

$$J = \frac{B H^3 + (H - B) B^3}{12} = \frac{\frac{H^4}{4} + \left(H - \frac{H}{4}\right)\frac{H^3}{64}}{12} = \frac{64 H^4 + 3 H^4}{12 \cdot 64 \cdot 4},$$

$$J = \frac{67 H^4}{3072},$$

man erhält mit diesem Werthe von J:

$$P = \frac{\pi^2 \cdot 67 H^4 E}{3072 l^2 n}, \text{ hieraus ist } H = \sqrt[4]{\frac{3072 l^2 n P}{\pi^2 \cdot 67 E}},$$

oder die Zahlenwerthe eingesetzt:

$$H = \sqrt[4]{\frac{3072 (1500)^2 \cdot 6 \cdot 3000}{(3{,}14)^2 \cdot 67 \cdot 10000}} = 66^{mm},$$

hiermit ergibt sich $B = \frac{66}{4} = 16^1/_2{}^{mm}$.

8. Eine schmiedeiserne Schubstange von kreisförmigem Querschnitte wird in der Richtung ihrer Axe durch eine Kraft von $P = 3000^{Kg}$ auf Zerknickungsfestigkeit beansprucht; die Länge der Stange ist $l = 2^m$, es ist der Durchmesser d der Schubstange in der Mitte der Länge zu berechnen.

Auflösung. Die Schubstange ist als ein Stab anzusehen, der mit seinen beiden Enden sich frei gegen zwei feste Punkte so stützt, dass die Enden in der ursprünglichen Stabaxe gerade geführt werden; daher ist die Festigkeitsformel anzuwenden: $P = \frac{\pi^2 J E}{n l^2}$, für J den Werth „$J = \frac{\pi d^4}{64}$" gesetzt:

$$P = \frac{\pi^2 \cdot \frac{\pi d^4}{64} \cdot E}{n l^2} = \frac{\pi^3 d^4 E}{64 n l^2}, \text{ woraus } d = \sqrt[4]{\frac{64 n l^2 P}{\pi^3 E}}$$

folgt. Der bei den Schubstangen übliche Sicherheitsgrad ist $n = 20$, die übrigen Zahlenwerthe eingesetzt:

$$d = \sqrt[4]{\frac{64 \,.\, 20\,(2000)^2\, 3000}{(3{,}14)^3\, 20000}} = 70{,}71,$$

und abgerundet $d = 71^{mm}$.

Dieser Durchmesser d wird jedoch einfacher in Beziehung auf den Durchmesser δ des der Schubstange angehörigen Kurbelzapfens berechnet. Die mittlere Kraft, durch welche der Kurbelzapfen auf seine Biegungsfestigkeit beansprucht wird, ist zwar kleiner, als die, durch welche die mit der Schubstange verbundene Kolbenstange beansprucht wird (der mittlere Druck auf den Kurbelzapfen in der Richtung der Tangente an den Kurbelkreis ist $0{,}6366\,P$), allein der Druck P in der Kolbenstange ist massgebend für die Berechnung des Kurbelzapfens. Genau genommen ist der Maximalwerth der durch die Schubstange auf den Kurbelzapfen übertragenen Kraft $P_m = P\left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right)$, wobei $\alpha = \frac{r}{l}$ ist, wenn r die Länge der Kurbel und l die Länge der Schubstange bedeuten. Bezeichnet w die Geschwindigkeit des gerade geführten Maschinentheiles und v die veränderliche Geschwindigkeit des Kurbelzapfens, so ist das Maximalverhältniss dieser Geschwindigkeiten $\left(\frac{w}{v}\right)_{max} = 1 + \frac{\alpha^2}{2}$, und da der von der Kurbel empfangene Effect ebenso gross ist, als der von dem gerade geführten Maschinentheil an die Schubstange abgegebene, so muss die Gleichung stattfinden: $\frac{P_m}{P} = \left(\frac{w}{v}\right)_{max}$, womit sich die obige Beziehung zwischen P_m und P erklärt. Wenn l_1 die Länge des schmiedeisernen Kurbelzapfens ist, so hat man nach der Lehre von der Biegungsfestigkeit:

$$\frac{P l_1}{2} = \frac{\pi \mathfrak{S} \delta^3}{32}, \text{ oder } P = \frac{2 \pi \mathfrak{S} \delta^3}{32\, l_1} = \frac{\pi \mathfrak{S} \delta^2}{16}\left(\frac{\delta}{l_1}\right),$$

wir setzen $\frac{\delta}{l_1} = \frac{1}{\alpha}$ und dividiren die letzte Gleichung für P durch die Gleichung:

$$P = \frac{\pi^3 d^4 E}{64\, n\, l^2},$$

man erhält hierdurch:

$$1 = \frac{\pi^3 d^4 E}{64\, n\, l^2} \cdot \frac{16}{\pi \mathfrak{S} \delta^2}\left(\frac{l_1}{\delta}\right) = \frac{\pi^2 d^4 E \alpha}{4\, n\, l^2 \mathfrak{S} \delta^2},$$

oder Zähler und Nenner der rechten Theiles mit δ^2 multiplicirt:

$$1 = \frac{\pi^2 d^4 E \delta^2 \alpha}{4 n l^2 \mathfrak{S} \delta^4}, \text{ woraus } \frac{d^4}{\delta^4} = \frac{4 n l^2 \mathfrak{S}}{\alpha \pi^2 E \delta^2}, \text{ oder}$$

$$\frac{d^4}{\delta^4} = \frac{4 n \mathfrak{S}}{\alpha \pi^2 E} \left(\frac{l}{\delta}\right)^2 \text{ und } \frac{d}{\delta} = \sqrt[4]{\frac{4 n \mathfrak{S}}{\pi^2 E \alpha} \left(\frac{l}{\delta}\right)^2}$$

folgt; setzen wir für Schmiedeisen $E = 20000$, $\alpha = 1{,}5$, $n = 20$, $\mathfrak{S} = 6$ ein, so ist

$$\frac{d}{\delta} = \sqrt[4]{\frac{4 \,.\, 20 \,.\, 6}{(3{,}14)^2 \,.\, 20000 \,.\, 1{,}5}} \,.\, \sqrt{\frac{l}{\delta}} = 0{,}2036 \sqrt{\frac{l}{\delta}}.$$

Berechnen wir nach dieser Formel den Durchmesser d der Schubstange in der Mitte der Länge, so haben wir vorerst den Durchmesser δ des zugehörigen Kurbelzapfens zu berechnen aus der Formel:

$$\frac{P l_1}{2} = \frac{\mathfrak{S} \pi \delta^3}{32}, \text{ oder } \frac{P}{2} = \frac{\mathfrak{S} \pi \delta^2}{32} \left(\frac{\delta}{l}\right), \text{ woraus}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{16 P}{\mathfrak{S} \pi} \left(\frac{l}{\delta}\right)}$$

folgt; die Zahlenwerthe $P = 3000$, $\mathfrak{S} = 6$, $\frac{l}{\delta} = 1{,}5$ eingesetzt:

$$\delta = \sqrt{\frac{16 \,.\, 3000}{6 \,.\, 3{,}14} \,.\, 1{,}5} = 61{,}8^{mm};$$

hiermit wird

$$d = 0{,}2036 \,.\, 61{,}8 \sqrt{\frac{2000}{61{,}8}} = 71\ 5^{mm},$$

also nahezu derselbe Werth, wie nach der ersten Berechnungsart.

Damit die Stange die angenäherte Form der gleichen Strebfestigkeit erhalte, mache man den Durchmesser d_1 der Stange am Kurbelende: $d_1 = 0{,}8\, d$ und den Durchmesser d_2 am anderen Ende: $d_2 = 0{,}7\, d$, und verbinde bei der Aufzeichnung des Längenprofils der Stange die drei berechneten Dimensionen d_1, d, d_2 durch eine schwach gekrümmte Curve. Die krumme Linie, welche der strengen Form der gleichen Strebfestigkeit entspricht, ist die cykloidische Sinoide, deren Gleichung für den Kreisquerschnitt nach Redtenbacher

$$\frac{x}{{}^1\!/_2\, l} = \frac{2}{\pi} \left\{ \text{arc sin } \frac{y}{d} - \frac{y}{d} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{d}\right)^2} \right\}$$

ist, in dieser Gleichung bedeuten x und y die Abscisse und Ordinate eines Punktes der Curve. Für die Praxis ist es jedoch ganz un-

wesentlich, ob die, die drei berechneten Durchmesser verbindende schwach gekrümmte Linie eine cykloidische Sinoide, oder eine andere Curve ähnlicher Krümmung ist. Dass die Stange am Kurbelende dicker, als am Kreuzkopfende gemacht wird, hat darin seinen Grund, dass ausser der Kraft P die Einwirkung der eigenen Masse der Stange und der damit verbundenen hin- und hergehenden Theile in Folge der grösseren Geschwindigkeit am Kurbelende dort die Stange stärker beansprucht wird, als am anderen Ende. Hat die Kurbel eine sehr grosse Geschwindigkeit, so hat sie ausser dem Drucke P in Folge der Beschleunigung ihrer Massentheilchen noch eine Biegungsbeanspruchung zu erleiden, und ist in diesem Falle auf zusammengesetzte Festigkeit zu berechnen.

9. Dieselbe Aufgabe, wie in voriger Nummer, jedoch mit dem Unterschiede, dass der Querschnitt der Stange ein Rechteck ist, von den Dimensionen b und h, wobei $h > b$ ist.

Auflösung. In die Formel „$P = \frac{\pi^2 J E}{n l^2}$“ für J den Werth „$J = \frac{b^3 h}{12}$“ eingesetzt:

$$P = \frac{\pi^2 b^3 h E}{12 n l^2}.$$

Nehmen wir zwischen b und h ein Verhältniss an, $\frac{b}{h} = \alpha$; man erhält dann:

$$P = \frac{\pi^2 \alpha^3 h^4 E}{12 n l^2}, \text{ hieraus ist}$$

$$h = \sqrt[4]{\frac{12 P n l^2}{\pi^2 \alpha^3 E}},$$

wir setzen $\alpha = \frac{1}{3}$, sowie die übrigen Zahlenwerthe ein und erhalten:

$$h = \sqrt[4]{\frac{12 \,.\, 3000 \,.\, 20\,(2000)^2}{(3{,}14)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3 .\, 20000}} = 141^{mm},$$

daher $b = \frac{h}{3} = \frac{141}{3} = 47^{mm}$; nimmt man jedoch das Verhältniss zwischen b und h wie 1 zu 2, also $\frac{b}{h} = \frac{1}{2}$ an, so erhält man $h = 104^{mm}$ und $b = 52^{mm}$.

Man berechnet jedoch auch häufig die Dimensionen b und h des rechteckigen Querschnittes in der Mitte der Schubstangenlänge

so, dass man diese Dimensionen auf den Durchmesser d einer gleichwerthigen Schubstange von kreisförmigem Querschnitte bezieht. Offenbar hat man dann bei beiden Schubstangen nur die Trägheitsmomente des Kreisquerschnittes und rechteckigen Querschnittes einander gleich zu setzen; es ist also:

$$\frac{\pi d^4}{64} = \frac{b^3 h}{12},$$

beiderseits mit b multiplicirt:

$$\frac{\pi d^4 b}{64} = \frac{b^4 h}{12}, \text{ hieraus ist}$$

$$\left(\frac{b}{d}\right)^4 = \frac{12 \pi b}{64 h} = \frac{12 \pi}{64} \left(\frac{b}{h}\right) \text{ und}$$

$$\frac{b}{d} = \sqrt[4]{\frac{12 \pi}{64} \left(\frac{b}{h}\right)} = 0{,}88 \sqrt[4]{\left(\frac{b}{h}\right)},$$

für $\frac{b}{h} = \frac{1}{3}$, erhält man

$$\frac{b}{d} = 0{,}88 \sqrt[4]{\frac{1}{3}} = 0{,}67,$$

also $b = 0{,}67\, d$; angenommen, wir hätten $d = 70^{mm}$ ausgerechnet, so ist $b = 0{,}67 \,.\, 70 = 46{,}9^{mm}$ und abgerundet $b = 47^{mm}$, somit $h = 3\,b = 3 \,.\, 47 = 141^{mm}$, also dieselben Werthe wie früher; für $\frac{b}{h} = \frac{1}{2}$ erhält man: $b = 0{,}74\, d = 0{,}74 \,.\, 70 = 51{,}8$ und abgerundet $b = 52^{mm}$, somit $h = 104^{mm}$, wie oben.

Behufs Bestimmung der Querschnittsdimensionen an den Enden der Stange macht man die gleiche Rechnung wie für die Mitte noch zweimal, mit den Durchmessern d_1 und d_2 an den Enden, und erhält hierdurch die Dimensionen b_1, h_1 und b_2, h_2; für die praktische Ausführung ist es aber bequemer, die Stange in constanter Dicke b auf ihrer ganzen Länge durchzuführen; wir setzen also $b_1 = b_2 = b$ und haben dann, wenn $d_1 = 0{,}8\, d = 0{,}8 \,.\, 70 = 56^{mm}$ gesetzt wird,

$$\frac{d_1}{b} = \frac{56}{47} = 1{,}191.$$

Aus der Gleichung „$\frac{\pi d_1^4}{64} = \frac{b^3 h_1}{12}$“ folgt, wenn man beiderseits mit $\frac{12}{b^3 d_1}$ multiplicirt:

$$\frac{h_1}{d_1} = \frac{12\pi d_1^3}{64 b^3} = \frac{3\pi}{16}\left(\frac{d_1}{b}\right)^3 = 0{,}59\left(\frac{d_1}{b}\right)^3,$$

oder für $\frac{d_1}{b}$ den Werth gesetzt, erhält man:

$$\frac{h_1}{d_1} = 0{,}59 \,.\, 1{,}191 = 0{,}7027,$$

hiermit ergibt sich $h_1 = 0{,}7027\, d_1 = 0{,}7027 \,.\, 56 = 39{,}35$ und abgerundet $h_1 = 40^{mm}$; selbstverständlich wird diese Höhe h_1 am Ende der Stange mittelst stetiger Ausrundung in die Breite des Schubstangenkopfes übergeführt. Hätte man für die Mitte der Stange die Dimensionen des Rechteckes „$h = 104$ und $b = 52$“ gewählt, so wäre, wie leicht ersichtlich ist, h_1 noch kleiner ausgefallen.

10. Dieselbe Aufgabe, wie in Nummer 8, jedoch mit dem Unterschiede, dass die Schubstange aus Gusseisen und von kreuzförmigem Querschnitte (geflügelt, wie bei den Axen, siehe die folgende Figur) ist.

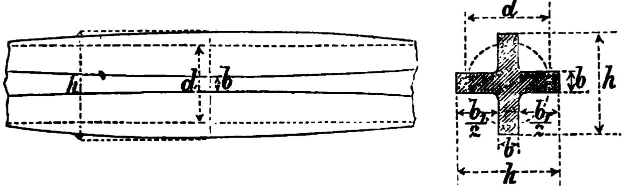


Fig. 150.

Auflösung. Man berechnet zuerst, wie in Aufgabe Nummer 8 gezeigt wurde, den mittleren Durchmesser d, sowie die beiden Enddurchmesser d_1 und d_2 einer gusseisernen gleichwerthigen Schubstange von kreisförmigem Querschnitte, verzeichnet mit diesen Massen die ideelle Form der Stange (siehe das in der Figur punktirt gezeichnete Längenprofil der Stange), deren Querschnitte daher an allen Stellen Kreisflächen sind; hierauf wird nach Geschmacksrücksichten, sonst aber beliebig, das Höhenprofil der Stange gezeichnet und dadurch das Verhältniss $\frac{d}{h}$ für alle Querschnitte der Stange bestimmt, da man aus der Zeichnung für alle Querschnitte die Dimensionen d und h entnehmen kann; es erübrigt also nur noch die jedem Querschnitte entsprechende Rippendicke b zu berechnen. Der Querschnitt der Stange in der Mitte ihrer Länge habe die Dimensionen h und b, der ideelle Durchmesser an dieser Stelle sei d. Da die beiden Trägheitsmomente des kreisförmigen und kreuzförmigen Querschnittes einander gleich zu setzen sind, so hat man:

$$\frac{\pi d^4}{64} = \frac{b h^3 + b_1 b^3}{12},$$

oder, da $b_1 = h - b$ ist,

$$\frac{\pi d^4}{64} = \frac{b h^3 + (h - b) b^3}{12}, \text{ oder}$$

$$\frac{3 \pi d^4}{16} = b h^3 + h b^3 - b^4;$$

diese unreine Gleichung des vierten Grades nach der Unbekannten b aufzulösen, wäre jedoch zu zeitraubend, wir ändern daher die Gleichung in ihrer Form, wie folgt, ab: Beiderseits durch $\frac{3 h^4 \pi}{16}$ dividirt:

$$\frac{d^4}{h^4} = \frac{16}{3 \pi} \left(\frac{b}{h} + \frac{b^3}{h^3} - \frac{b^4}{h^4}\right),$$

oder $\frac{b^4}{h^4}$ herausgehoben:

$$\frac{d^4}{h^4} = \frac{16}{3 \pi} \cdot \frac{b^4}{h^4} \left(\frac{h^3}{b^3} + \frac{h}{b} - 1\right), \text{ woraus}$$

$$\frac{d}{h} = \frac{b}{h} \sqrt[4]{\frac{16}{3 \pi} \left(\frac{h^3}{b^3} + \frac{h}{b} - 1\right)}$$

folgt. Es ist also die Dicke b so zu wählen, dass diese Gleichung für jeden Querschnitt erfüllt wird, was natürlich nur durch probeweises Rechnen geschehen kann. Wir setzen für die Mitte der Stange den berechneten, ideellen Durchmesser der gusseisernen Stange $d = 84^{mm}$, und nehmen $h = 104^{mm}$, also $\frac{d}{h} = \frac{84}{104} = 0{,}8$ an, und wählen $b = 24^{mm}$, bei diesen Werthen wird der Gleichung Genüge geleistet.

Weit einfacher gestaltet sich die Rechnung, wenn man den Winkelraum zwischen den Kreuzrippen des Querschnittes mit einer entsprechenden bogenförmigen Ausfüllung versieht und die Rippendicke b so wählt, dass das Trägheitsmoment des Kreuzquerschnittes demjenigen des Quadrates $m n q r$ (siehe die folgende Figur) gleich wird; dieses ist, wie eine specielle Untersuchung zeigt, dann der Fall, wenn die Bogen aus den Eckpunkten des Quadrates $a b c d$ beschrieben werden und $b = 0{,}178\, h$ gemacht wird. (Die etwas umständliche Ableitung dieser Beziehung wird hier in Ansehung der für die Praxis geringere Wichtigkeit habenden Sache weggelassen.)

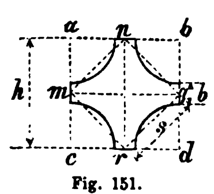


Fig. 151.

Man hat dann in die Festigkeitsgleichung „$P = \frac{\pi^2 J E}{n l^2}$“ für J den Werth „$J = \frac{s^4}{12}$“ einzusetzen und erhält:

$$P = \frac{\pi^2 s^4 E}{12\, n\, l^2}, \text{ woraus}$$

$$s = \sqrt[4]{\frac{12\, P n l^2}{\pi^2 E}} = \sqrt{\frac{l}{\pi}}\, \sqrt[4]{\frac{12\, P n}{E}}$$

folgt, und da, wie aus der Figur ersichtlich, $h^2 = 2\, s^2$ ist, so hat man auch:

$$h = s\sqrt{2} = \sqrt{\frac{2\, l}{\pi}}\, \sqrt[4]{\frac{12\, P n}{E}};$$

wir setzen $E = 10000$, $n = 20$ ein und erhalten:

$$h = \sqrt{\frac{2\, l}{\pi}}\, \sqrt[4]{\frac{12\, P . 20}{10000}} = 0{,}3141 \sqrt{l}\, \sqrt[4]{P},$$

setzt man noch $P = 3000$, $l = 2000$ ein, so erhält man:

$$h = 0{,}3141 \sqrt{2000}\, \sqrt[4]{3000} = 104^{mm},$$

somit wird die Rippendicke $b = 0{,}178\, h = 0{,}178 . 104 = 18{,}5^{mm}$.

Vergleicht man das Trägheitsmoment des letzten Kreuzquerschnittes (mit den bogenförmigen Ausfüllungen der Winkelräume zwischen den Rippen) mit dem Trägheitsmomente des vollen Kreisquerschnittes, so ergibt sich die Beziehung zwischen dem Durchmesser d des Kreisquerschnittes und der Höhe h einer der vier Kreuzrippen wie folgt: das Trägheitsmoment J des Kreuzquerschnittes mit den bogenförmigen Ausfüllungen erhält man wie folgt: Denkt man sich den Querschnitt 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (siehe die folgenden zwei Figuren) nach der Verticalen mn in zwei Theile zertheilt, jeden der Theile um 180° und zwar den Theil A nach links, den Theil B nach rechts gedreht, so erhält man durch das Aneinanderschieben der beiden Theile nach der Drehung die zweite Figur, welche ein Quadrat von der Seite h mit zwei halbkreisförmigen Höhlungen vom Halbmesser r darstellt; die Trägheitsmomente dieser beiden verschieden geformten Flächen sind offenbar einander gleich, da keine Verschiebung in verticalem Sinne stattfand, und zwar ist

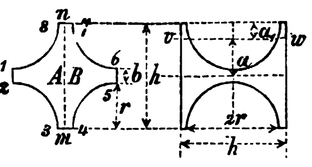


Fig. 152. Fig. 153.

$$J = \frac{h^4}{12} - 2\left(0{,}11\, r^4 + \frac{r^2 \pi a^2}{2}\right),$$

wobei also $0{,}11\, r^4$ das Trägheitsmoment eines Halbkreises für die Schwerlinie vw desselben und a die Entfernung derselben von der horizontalen Axe des ganzen Querschnittes bedeuten.

Bekanntlich ist das Trägheitsmoment i eines Querschnittes, bezogen auf eine zur Schweraxe des letzteren parallele Axe, gleich dem Trägheitsmomente i_1 des Querschnittes, bezogen auf seine eigene Schweraxe, mehr dem Producte aus der Fläche des Querschnittes in das Quadrat der Entfernung der beiden Axen.

Nach der Figur ist $a = \frac{h}{2} - a_1$ und da nach der Schwerpunktslehre $a_1 = 0{,}4244\, r$ ist, so hat man

$$a = \frac{h}{2} - 0{,}4244\, r = \frac{h - 0{,}8488\, r}{2}, \text{ somit}$$

$$J = \frac{h^4}{12} - 2\left[0{,}11\, r^4 + \frac{r^2 \pi}{2}\left(\frac{h - 0{,}8488\, r}{2}\right)^2\right], \text{ oder}$$

$$J = \frac{h^4}{12} - 2\left(\frac{0{,}88\, r^4 + r^2 \pi h^2 - 1{,}6976\, h r^3 \pi + 0{,}721\, r^4 \pi}{8}\right),$$

wir setzen $r = \alpha h$, wobei α ein echter Bruch ist, und erhalten hierdurch:

$$J = \frac{h^4}{12} - \left(\frac{0{,}88\, \alpha^4 h^4 + \pi h^4 \alpha^2 - 1{,}6976\, \pi h^4 \alpha^3 + 0{,}721\, \alpha^4 h^4 \pi}{4}\right),$$

$$J = \frac{h^4 - 2{,}64\, \alpha^4 h^4 - 3\pi h^4 \alpha^2 + 5{,}0928\, \pi h^4 \alpha^3 - 2{,}163\, \alpha^4 h^4 \pi}{12}, \text{ oder}$$

h^4 im Zähler herausgehoben und den Coëfficienten des zweiten Gliedes im Zähler $2{,}64 = 0{,}84\, \pi$ gesetzt:

$$J = \frac{h^4}{12}(1 - 0{,}84\, \pi \alpha^4 - 3\, \pi \alpha^2 + 5{,}0928\, \pi \alpha^3 - 2{,}163\, \pi \alpha^4),$$

oder, $\pi \alpha^2$ herausgehoben,

$$J = \frac{h^4}{12}\left[1 - \alpha^2 \pi\, (3{,}003\, \alpha^2 - 5{,}0928\, \alpha + 3)\right],$$

dieses Trägheitsmoment J ist demjenigen des Kreisquerschnittes gleich zu setzen; man erhält hierdurch:

$$\frac{h^4}{12}\left[1 - \alpha^2 \pi\, (3{,}003\, \alpha^2 - 5{,}0928\, \alpha + 3)\right] = \frac{\pi d^4}{64}, \text{ hieraus ist:}$$

$$\frac{h}{d} = \sqrt[4]{\frac{3\pi}{16\left[1 - \alpha^2 \pi\, (3{,}003\, \alpha^2 - 5{,}0928\, \alpha + 3)\right]}}, \text{ oder}$$

$$\frac{h}{d} = \frac{1}{2\sqrt[4]{\frac{1 - \alpha^2 \pi\, (3{,}003\, \alpha^2 - 5{,}0928\, \alpha + 3)}{3\pi}}},$$

setzen wir $\alpha = 0,4$, so ist

$$\frac{h}{d} = \frac{1}{0,816} = 1,225,$$

hiermit erhält man:

$$h = 1,225\, d = 1,225 . 84 = 103^{mm}.$$

Da $r = 0,4\, h = 0,4 . 103 = 41,2^{mm}$ und die Rippendicke $b = h - 2r = 103 - 82,4$ ist, so hat man $b = 20,6^{mm}$.

11. Wie gross ist der Durchmesser d einer schmiedeisernen Kolbenstange zu machen, die zu einem Dampfcylinder von 450^{mm} lichtem Durchmesser gehört, wenn der nützliche Dampfdruck (Differenz der beiden Dampfdrücke vor und hinter dem Kolben) $a = 4$ Atmosphären und die grösste Länge der Kolbenstange ausserhalb der Stopfbüchse $L = 900^{mm}$ beträgt?

Auflösung. Wir berechnen die Kolbenstange zuerst auf ihre Zugfestigkeit und dann auf ihre Strebfestigkeit, und behalten das grössere Resultat bei.

a) Berechnung der Kolbenstange auf Zugfestigkeit. Nach der in Aufgabe 31 der Anwendungsbeispiele aus der Lehre von der Zug-, Druck- und Scheerfestigkeit entwickelten Formel hat man für die schmiedeiserne Kolbenstange:

$$d = 0,0408\, D \sqrt{a} = 0,0408 . 450 \sqrt{4} = 36,72$$

und abgerundet $d = 37^{mm}$.

b) Berechnung der Kolbenstange auf Strebfestigkeit. Da die Kolbenstange am Kolbenende mit dem Kolben fest verbunden und durch denselben, sowie durch die Stopfbüchse geradlinig geführt, ferner das Kreuzkopfende der Stange ebenfalls geradlinig geführt wird, so entspricht diese Art der Befestigung der Stange dem Fall der Zerknickungsfestigkeit, dass der Stab an dem einen Ende fest eingeklemmt und am anderen in der ursprünglichen Stabaxe gerade geführt wird. Für diesen Fall haben wir die Festigkeitsgleichung

$$„P = \frac{2\pi^2 J E}{n L^2}“$$

anzuwenden, und da $P = \frac{\pi D^2}{4} . \frac{a}{100}$ ist, so hat man auch:

$$\frac{\pi D^2}{4} . \frac{a}{100} = \frac{2\pi^2 J E}{n L^2},$$

für J den Werth „$J = \frac{\pi d^4}{64}$“ gesetzt:

$$\frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{a}{100} = \frac{2\pi^2 \cdot \frac{\pi d^4}{64} \cdot E}{n L^2},$$

reducirt:

$$\frac{a D^2}{50} = \frac{\pi^2 d^4 E}{4 n L^2},$$

beiderseits mit D^2 multiplicirt:

$$\frac{a D^4}{50} = \frac{\pi^2 d^4 E}{4 n} \cdot \frac{D^2}{L^2},$$

hieraus ist

$$\frac{d}{D} = \sqrt[4]{\frac{4 n a}{50 \pi^2 E} \cdot \frac{L^2}{D^2}} = \sqrt{\frac{L}{D}} \cdot \sqrt[4]{\frac{a n}{E}} \cdot \sqrt[4]{\frac{4}{50 \pi^2}}, \text{ oder}$$

$$\frac{d}{D} = 0{,}3 \sqrt{\frac{L}{D}} \cdot \sqrt[4]{\frac{a n}{E}},$$

die Zahlenwerthe $E = 20000$, $n = 25$, $a = 4$, $\frac{L}{D} = \frac{900}{450} = 2$ eingesetzt:

$$\frac{d}{D} = 0{,}3 \sqrt{2} \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 25}{20000}} = 0{,}1128,$$

somit $d = 0{,}1128\, D = 0{,}1128 \cdot 450 = 50{,}76$ und abgerundet $d = 51^{mm}$; man wird somit diesen Werth beibehalten.

Man drückt häufig auch den Durchmesser d der Kolbenstange wegen der Bequemlichkeit der Rechnung durch den Durchmesser d_1 des zugehörigen Kurbelzapfens aus, und erhält man die Beziehung zwischen diesen beiden Dimensionen wie folgt: Für den Kurbelzapfen hatten wir die Festigkeitsgleichung:

$$\frac{P l}{2} = \frac{\mathfrak{S} \pi d_1^3}{32},$$

für die Kolbenstange ist:

$$P = \frac{2 \pi^2 E \frac{\pi d^4}{64}}{n L^2},$$

die Werthe von P aus diesen beiden Gleichungen einander gleich gesetzt:

$$\frac{\mathfrak{S} \pi d_1^3}{16 l} = \frac{\pi^3 E d^4}{32 n L^2},$$

oder beiderseits mit d_1^2 multiplicirt und reducirt:

$$\mathfrak{S}\, d_1^4 \left(\frac{d_1}{l}\right) = \frac{\pi^2 E d^4}{2n} \left(\frac{d_1^2}{L^2}\right),$$ hieraus ist

$$\left(\frac{d}{d_1}\right)^4 = \frac{2\mathfrak{S}\, n}{\pi^2 E} \left(\frac{d_1}{l}\right) \left(\frac{L}{d_1}\right)^2 \text{ und } \frac{d}{d_1} = \sqrt[4]{\frac{2\mathfrak{S}\, n}{\pi^2 E} \left(\frac{d_1}{l}\right) \left(\frac{L}{d_1}\right)^2},$$

oder

$$\frac{d}{d_1} = \sqrt{\frac{L}{d_1}} \cdot \sqrt[4]{\frac{\mathfrak{S}\, n}{E} \left(\frac{d_1}{l}\right)} \cdot \sqrt[4]{\frac{2}{\pi^2}} = 0{,}671 \sqrt{\frac{L}{d_1}} \sqrt[4]{\frac{\mathfrak{S}\, n}{E} \left(\frac{d_1}{l}\right)};$$

angenommen, wir hätten den Kurbelzapfendurchmesser d_1 aus der Formel

$$„\frac{Pl}{2} = \frac{\mathfrak{S}\, \pi d_1^3}{32}“$$

mit $d_1 = 91^{mm}$ berechnet und setzen $\frac{l}{d_1} = 1{,}5$, wobei l die Länge der Kurbelzapfens bedeutet, setzen ferner die Zahlenwerthe

$$\frac{d_1}{l} = \frac{1}{1{,}5} = \frac{2}{3},\ E = 20000,\ n = 25,\ L = 900,\ \mathfrak{S} = 6$$

ein, so erhält man:

$$\frac{d}{d_1} = 0{,}671 \sqrt{\frac{L}{d_1}} \cdot \sqrt[4]{\frac{6 \cdot 25}{20000} \cdot \frac{2}{3}} = 0{,}178 \sqrt{\frac{L}{d_1}},$$ oder

$$\frac{d}{d_1} = 0{,}178 \sqrt{\frac{900}{91}} = 0{,}5625,$$ hiermit ist

$$d = 0{,}5625\, d_1 = 0{,}5625 \cdot 91 = 51{,}18^{mm},$$

also nahezu derselbe Werth wie früher.

12. Bei dem Winkelhebel ABC (Kunstwinkel zum Betriebe einer Pumpe, siehe die folgende Figur) betrage jede der an den Punkten A und C senkrecht zu den gleich langen Armen des Kunstwinkels angreifenden, einander gleichen Kräfte $P = Q = 4000^{Kg}$; die Länge eines Armes ist $l = 800^{mm} = AB = BC$; es sind die Querschnittsdimensionen der Arme des Kunstwinkels und der Durchmesser d der schmiedeisernen Zugstange AC, deren Querschnitt eine Kreisfläche ist, zu berechnen.

Auflösung. Denkt man sich jede der Kräfte P und Q zerlegt in die zwei Componenten p und S, beziehungsweise q und S_1, wobei natürlich $p = q = P = Q$ und $S = S_1$ ist, so beanspruchen die Kräfte p und q die Arme des Kunstkreuzes auf ihre Zerknickungsfestigkeit, und die einander entgegengesetzt wirkenden Componenten S und S_1 die Zugstange AC auf ihre Zugfestigkeit; da die Rich-

tungen der Kräfte p und q senkrecht stehen auf den Richtungen der Kräfte P und Q und die beiden Arme des Kunstwinkels einander gleich sind, so folgt daraus die Gleichheit der Kräfte p, q,

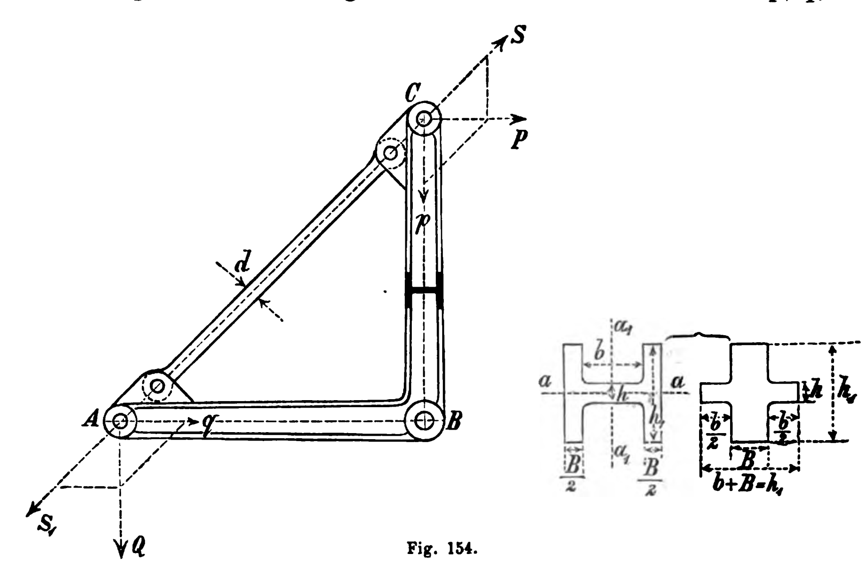


Fig. 154.

P und Q. Die Arme des Winkelhebels sind als lose Streben zu betrachten, die in ihren Endpunkten nach den Geraden CB und AB geführt werden, resp. von diesen Richtungen nicht abweichen können; man hat daher die Formel zu gebrauchen: $P = \frac{\pi^2 JE}{n l^2}$.

Wählen wir den Doppel-**T**-Querschnitt für die Arme, so zeigt sich durch eine kleine Rechnung, dass das Trägheitsmoment dieses Querschnittes bei der horizontalen Lage des Mittelsteges, bezogen auf die Axe $a\,a$ als Schweraxe, kleiner ist, als das Trägheitsmoment desselben Querschnittes bei verticaler Lage des Mittelsteges und bezogen auf die Axe $a_1 a_1$ als Schweraxe; denken wir uns die beiden Endflantschen des Querschnittes in horizontaler Richtung zusammengeschoben, so erhalten wir den kreuzförmigen Querschnitt, dessen Trägheitsmoment ist:

$$J = \frac{B h_1^3 + b h^3}{12},$$

wir setzen $B = 2h$, $B + b = h_1$, also $b = h_1 - B = h_1 - 2h$, ferner $h_1 = \mu h$, diese Werthe in die Gleichung für J eingesetzt:

$$J = \frac{2 h h_1^3 + h^3 (h_1 - 2h)}{12} = \frac{2 \mu^3 h^4 + h^3 (h \mu - 2h)}{12}, \text{ oder}$$

$$J = \frac{2\mu^3 h^4 + h^4(\mu - 2)}{12} = \frac{h^4(2\mu^3 + \mu - 2)}{12},$$

diesen Werth von J in obige Gleichung für P eingesetzt:

$$P = \frac{\pi^2 E}{n l^2} \cdot \frac{h^4(2\mu^3 + \mu - 2)}{12}, \text{ hieraus ist}$$

$$h = \sqrt[4]{\frac{12 P n l^2}{\pi^2 E (2\mu^3 + \mu - 2)}},$$

wir setzen $\mu = 5$, $h_1 = 5h$, $n = 25$, sowie die übrigen gegebenen Zahlenwerthe ein und erhalten:

$$h = \sqrt[4]{\frac{12 \cdot 4000 \cdot 25 (800)^2}{(3{,}14)^2 \cdot 10000 (2 \cdot 5^3 + 5 - 2)}} = 15{,}2$$

und abgerundet $h = 15^{mm}$; hiermit wird

$$h_1 = 5h = 5 \cdot 15 = 75^{mm}, \quad b = h_1 - 2h = 75 - 30 = 45^{mm}.$$

Würde man hingegen es vorziehen, den kreuzförmigen Querschnitt mit viertelkreisförmigen Ausrundungen zwischen den Rippen zu wählen, so benützen wir die in Beispiel 10 dieses Abschnittes für diesen Querschnitt gefundenen Resultate und berechnen zuerst den Durchmesser d eines gusseisernen Armes von kreisförmigem Querschnitte nach der Formel:

$$P = \frac{\pi^2 J E}{n l^2},$$

für J den Werth „$J = \frac{\pi d^4}{64}$“ gesetzt, erhält man:

$$P = \frac{\pi^2 E}{n l^2} \cdot \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi^3 E d^4}{64 n l^2}, \text{ hieraus ist:}$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{64 n P l^2}{\pi^3 E}} = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot 25 \cdot 4000 (800)^2}{(3{,}14)^3 \cdot 10000}} = 60{,}8$$

und abgerundet $d = 61^{mm}$.

In Beispiel 10 fanden wir die Höhe h_1 der Rippe (siehe nebenstehende Figur): $h_1 = 1{,}225\,d$, unter der Annahme, dass $r = 0{,}4\,h_1$ ist; demgemäss erhält man: $h_1 = 1{,}225 \cdot 61 = 74{,}725$ und abgerundet $h_1 = 75^{mm}$, wie nach der ersten Berechnungsart; es ergibt sich ferner: $r = 0{,}4 \cdot 75 = 30^{mm}$ und die Rippendicke b wird: $b = h_1 - 2r = 75 - 2 \cdot 30 = 15^{mm}$.

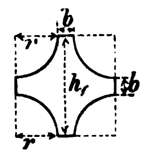


Fig. 155.

Der Durchmesser d der Zugstange AC ergibt sich aus der Formel:

$$S = f\mathfrak{S} = \frac{\pi d^2 \mathfrak{S}}{4},$$

und weil $S^2 = P^2 + p^2 = 2P^2$, also $S = P\sqrt{2}$ ist, so hat man auch:

$$P\sqrt{2} = \frac{\pi d^2 \mathfrak{S}}{4}, \text{ woraus}$$

$$d = \sqrt{\frac{4P\sqrt{2}}{\pi \mathfrak{S}}} = \sqrt{\frac{4 \,.\, 4000 \,.\, 1{,}4142}{3{,}14 \,.\, 6}} = 34{,}7$$

und abgerundet $d = 35^{mm}$ folgt.

13. Ein prismatischer Balken aus Eichenholz von quadratischem Querschnitte ist in verticaler Lage mit seinem unteren Ende unwandelbar befestigt, mit seinem oberen Ende frei; mit letzterem ist ein horizontaler Arm von der Länge $a = 1^m$ fest verbunden, an dessen Ende eine Last $P = 2140^{Kg}$ vertical nach abwärts wirkt (siehe nebenstehende Figur); es ist die Seite s des quadratischen Querschnittes des verticalen Balkens zu berechnen.

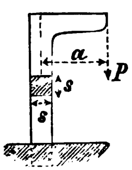


Fig. 156.

Auflösung. Da der Balken durch eine excentrische Druckbelastung beansprucht wird, so haben wir nach der Theorie der excentrischen Zug- und Druckfestigkeit die Formel anzuwenden:

$$P = \frac{\mathfrak{S} f J}{J + acf}.$$

Hierin bedeuten: P die Tragkraft des Balkens, $\mathfrak{S}$ die erlaubte Belastung pro Querschnittseinheit, f den Querschnitt des Balkens, J das kleinere der beiden äquatorialen Trägheitsmomente, auf eine Schweraxe des Querschnittes bezogen, a die Excentricität, c die Entfernung der äusserst gespannten oder gedrückten Faserschichte von der neutralen Axe; ferner wird bei dieser Formel vorausgesetzt, dass die Durchbiegung der elastischen Linie im Vergleich zur Excentricität a sehr klein ist, welcher Umstand auch in der Praxis im Allgemeinen zutrifft. Setzt man in die Formel für P die Werthe: $f = s^2$, $J = \frac{s^4}{12}$, $c = \frac{s}{2}$ ein, so erhält man:

$$P = \frac{\mathfrak{S} s^2 \,.\, \frac{s^4}{12}}{\frac{s^4}{12} + a \,.\, \frac{s}{2} \,.\, s^2} = \frac{\mathfrak{S} s^6}{s^4 + 6as^3} = \frac{\mathfrak{S} s^3}{s + 6a},$$

diese Gleichung nach der Unbekannten s geordnet:

$$Ps + 6\,a\,P = \mathfrak{S}\,s^3, \text{ oder}$$

$$\mathfrak{S}\,s^3 - Ps = 6\,a\,P, \text{ oder}$$

$$s^3 - \frac{Ps}{\mathfrak{S}} = \frac{6\,a\,P}{\mathfrak{S}},$$

diese unreine kubische Gleichung ist nach der Unbekannten s aufzulösen. Setzt man $\frac{P}{\mathfrak{S}} = p$, $\frac{6\,a\,P}{\mathfrak{S}} = q$, so hat man nach der Cardan'schen Formel:

$$s = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}},$$

die Zahlenwerthe

$$p = \frac{2140}{0{,}5} = 4280, \quad q = \frac{6 \,.\, 1000 \,.\, 2140}{0{,}5} = 25680000$$

eingesetzt, erhält man $s = 299{,}7$, oder abgerundet $s = 300^{mm}$.

Wäre es erlaubt, die Excentricität a etwas grösser oder kleiner zu nehmen, als vorgeschrieben ist, so könnte man sich die Auflösung der kubischen Gleichung ersparen und wie folgt verfahren: Dividirt man die Gleichung

$$s^3 - \frac{Ps}{\mathfrak{S}} = \frac{6\,a\,P}{\mathfrak{S}}$$

durch s, so erhält man:

$$s^2 - \frac{P}{\mathfrak{S}} = \frac{6\,a\,P}{s\,\mathfrak{S}} = \frac{6\,P}{\mathfrak{S}} \,.\, \frac{a}{s},$$

wir nehmen das Verhältniss $\frac{a}{s}$ als eine bekannte Grösse an und setzen z. B. probeweise $\frac{a}{s} = \frac{10}{3}$, man erhält hiermit:

$$s^2 = \frac{6\,P}{\mathfrak{S}} \,.\, \frac{10}{3} + \frac{P}{\mathfrak{S}} = \frac{21\,P}{\mathfrak{S}}, \text{ woraus}$$

$$s = \sqrt{\frac{21\,P}{\mathfrak{S}}} = \sqrt{\frac{21 \,.\, 2140}{0{,}5}} = 299{,}78$$

und abgerundet $s = 300^{mm}$ folgt; hiermit erhält man:

$$a = \frac{10}{3} \,.\, s = \frac{10}{3} \,.\, 300 = 1000^{mm}.$$

Die Querschnittsdimensionen des horizontalen Armes von der Länge a sind selbstverständlich aus dem Biegungsmomente

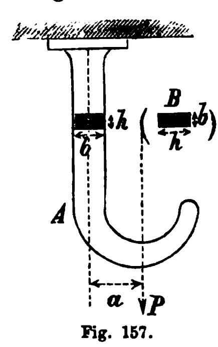


Fig. 157.

$$P\left(a-\frac{s}{2}\right)=\mathfrak{S}Z$$

zu berechnen.

14. Eine schmiedeiserne Hängestütze von rechteckigem Querschnitte hat eine excentrisch wirkende Zugbelastung $P=1948^{Kg}$ zu tragen, die Excentricität a beträgt: $a=120^{mm}$; es sind die Querschnittsdimensionen b und h $(b>h)$ der Stütze zu berechnen. (Siehe nebenstehende Figur.)

Auflösung. Setzt man in die hier anzuwendende Festigkeitsformel

$$„P=\frac{\mathfrak{S}fJ}{J+acf}“$$

$$f=bh,\ c=\frac{h}{2},\ J=\frac{bh^3}{12}$$

ein, so erhält man:

$$P=\frac{\mathfrak{S}bh\,.\,\frac{bh^3}{12}}{\frac{bh^3}{12}+a\,.\,\frac{h}{2}\,.\,bh}=\frac{\mathfrak{S}bh^3}{h+6a},$$

da in dieser Gleichung die beiden Unbekannten b und h vorkommen, so nehmen wir zwischen b und h ein Verhältniss an, wir setzen $\frac{h}{b}=\alpha$ und erhalten hiermit:

$$P=\frac{\mathfrak{S}b\,.\,\alpha^3b^3}{\alpha b+6a}=\frac{\mathfrak{S}\alpha^3b^3}{\alpha b+6a},$$

nach der Unbekannten b geordnet:

$$P\alpha b+6aP=\mathfrak{S}\alpha^3b^3,\ \text{oder}$$

$$\mathfrak{S}\alpha^3b^3-P\alpha b=6aP,\ \text{oder}$$

$$b^3=\frac{P\alpha b}{\mathfrak{S}\alpha^3}=\frac{6aP}{\mathfrak{S}\alpha^3}.$$

wir setzen: $\frac{P}{\mathfrak{S}\alpha}=p$, $\frac{6aP}{\mathfrak{S}\alpha^3}=q$ und erhalten: $b^3-pb=q$, diese Gleichung nach der Cardanischen Formel aufgelöst, für α, p und q die Zahlenwerthe: $\alpha=\frac{1}{2}$ (Annahme),

$$p = \frac{1948}{6 \cdot \frac{1}{2}} = 649{,}3, \quad q = \frac{6 \cdot 120 \cdot 1948}{6 \cdot \frac{1}{4}} = 935040$$

gesetzt, erhält man abgerundet $b = 100^{mm}$; somit $h = 50^{mm}$. Diese Werthe von b und h sind jedoch nur dann zu wählen, wenn die grössere Querschnittsdimension b parallel zur neutralen Axe des Querschnittes zu liegen kommt (also senkrecht zu der in der Figur A gezeichneten Lage von b), was jedoch wegen des dadurch bedingten, grösseren Querschnittes und des daraus resultirenden grösseren Materialverbrauches als ungünstig zu bezeichnen ist. Man wird daher im Allgemeinen den Querschnitt so anordnen, dass die kleinere Querschnittsdimension parallel zur neutralen Axe der Querschnittes zu liegen kommt (wie in der Figur A angegeben ist), dann hat man aber in der Formel „$P = \frac{\mathfrak{S} f J}{J + a c f}$“, wenn $h > b$ ist (siehe Fig. B, in welcher die Dimension b parallel zur neutralen Axe gestellt ist), $c = \frac{h}{2}$, $J = \frac{b h^3}{12}$ zu setzen, man erhält dann bei der Annahme $\frac{h}{b} = 2$, wenn man obige Rechnung noch einmal macht, aus der Gleichung „$b^3 - p b = q$“ mit $p = 162{,}325$ und $q = 58440$ nach der Cardanischen Formel: $b = 40{,}25$, oder rund $b = 40^{mm}$, somit $h = 2 \cdot 40 = 80^{mm}$, welche Werthe im Allgemeinen bei der Ausführung zu benutzen sein werden.

15. Eine hohle, gusseiserne Säule ist an ihren beiden Enden, oben und unten seitlich gestützt (wie dies beispielsweise bei einer Krahnsäule vorkommt, siehe die nebenstehende Figur); mit ihrem unteren Ende steht sie flach auf dem Boden auf; fest mit der Säule verbunden ist der horizontale Arm CD, an welchem die Last P vertical nach abwärts wirkt und somit die Säule excentrisch auf ihre Druckfestigkeit beansprucht; es ist der äussere und innere Durchmesser d und d_1 der Säule zu berechnen, wenn die Excentricität $a = 1000^{mm}$, $P = 5314^{Kg}$ und der Befestigungspunkt C des horizontalen Armes an der Säule so gelegen ist, dass $\frac{BC}{AB} = \frac{q}{l} = 0{,}8$ ist.

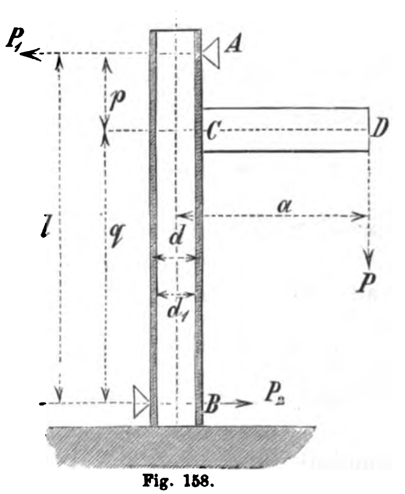


Fig. 158.

Auflösung. Nach der Festigkeitstheorie der excentrischen Druckbelastung ist allgemein die im gedrückten Stabe herrschende grösste Druckfaserspannung gleich der Summe zweier Spannungen $\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2$, herrührend von der Kraft P und einem Biegungsmomente M, und zwar ist $\mathfrak{S}_1 = \frac{P}{f}$, $\mathfrak{S}_2 = \frac{Mc}{J}$, daher $\mathfrak{S} = \frac{P}{f} + \frac{Mc}{J}$, in welcher Gleichung M das Maximalbiegungsmoment ist, P, c und f die schon früher bei der Formel „$P = \frac{\mathfrak{S} f J}{J + acf}$“ erklärte Bedeutung haben. Bei den Punkten A und B ist das Moment gleich Null; im Punkte C wirkt das Moment $M = Pa \cdot \frac{q}{l}$, denn: Unmittelbar oberhalb C wirkt das Moment $M_1 = P_1 p$ und unmittelbar unterhalb C das Moment $M_2 = M_1 - Pa$, wobei P_1 die Widerstandskraft bei A bedeutet; es ist aber für das Gleichgewicht $P_1 l = Pa$, daher $P_1 = \frac{Pa}{l}$ und $M_2 = \frac{Pap}{l} - Pa$, wenn man nämlich für M_1 obigen Werth setzt.

Die Gleichung für M_2 kann man auch schreiben:

$$M_2 = \frac{Pap - Pal}{l} = -\frac{Pa(l-p)}{l},$$

oder, da $l - p = q$ ist, hat man auch: $M_2 = -\frac{Paq}{l}$; da aber das Vorzeichen des Momentes auf die Querschnittsberechnung keinen Einfluss hat, so lassen wir das negative Vorzeichen und auch den Index von M_2 weg und erhalten: $M = \frac{Paq}{l}$, welches das Maximalbiegungsmoment ist; denn:

Es ist $M_1 = \frac{Pap}{l}$ und absolut genommen, $M_2 = \frac{Paq}{l}$, da aber $\frac{q}{l} > \frac{p}{l}$ und bei den Punkten A und B die Momente gleich Null sind, so muss $\frac{Paq}{l} = M$ das Maximalbiegungsmoment sein.

In die Gleichung für $\mathfrak{S}$ diesen Werth für M eingesetzt:

$$\mathfrak{S} = \frac{Paq}{l} \cdot \frac{c}{J} + \frac{P}{f},$$

wir setzen $\frac{q}{l} = \alpha$ und erhalten hierdurch:

$$\mathfrak{S} = \frac{Pa\alpha c}{J} + \frac{P}{f} = P\left(\frac{a\alpha c}{J} + \frac{1}{f}\right), \text{ woraus}$$

$$P = \frac{\mathfrak{S}\, J f}{a \alpha c f + J}$$

folgt; für J, c und f die Werthe: $J = \frac{\pi}{64}(d^4 - d_1^4)$, $c = \frac{d}{2}$, $f = \frac{\pi}{4}(d^2 - d_1^2)$ gesetzt:

$$P = \frac{\mathfrak{S} \cdot \frac{\pi}{64}(d^4 - d_1^4)\frac{\pi}{4}(d^2 - d_1^2)}{a\alpha \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{\pi}{4}(d^2 - d_1^2) + \frac{\pi}{64}(d^4 - d_1^4)},$$

oder Zähler und Nenner des rechten Theiles durch $\frac{\pi}{4}(d^2 - d_1^2)$ dividirt:

$$P = \frac{\frac{\pi}{64} \cdot \mathfrak{S}\,(d^4 - d_1^4)}{a\alpha \cdot \frac{d}{2} + \frac{d^2 + d_1^2}{16}} = \frac{\pi \mathfrak{S}\,(d^4 - d_1^4)}{32\, a \alpha d + 4\,(d^2 + d_1^2)},$$

wir setzen $d_1 = \alpha_1 d$ und erhalten dadurch:

$$P = \frac{\mathfrak{S} \pi d^4 (1 - \alpha_1^4)}{32\, a \alpha d + 4 d^2 (1 + \alpha_1^2)} = \frac{\mathfrak{S} \pi d^3 (1 - \alpha_1^4)}{32\, a \alpha + 4 d (1 + \alpha_1^2)},$$

diese Gleichung nach der Unbekannten d geordnet:

$$32\, a \alpha P + 4 d (1 + \alpha_1^2) P = \mathfrak{S} \pi d^3 (1 - \alpha_1^4), \text{ oder}$$

$$d^3 - \frac{4 d P (1 + \alpha_1^2)}{\mathfrak{S} \pi (1 - \alpha_1^4)} = \frac{32\, a \alpha P}{\mathfrak{S} \pi (1 - \alpha_1^4)}, \text{ oder}$$

$$d^3 - \frac{4 d P}{\mathfrak{S} \pi (1 - \alpha_1^2)} = \frac{32\, a \alpha P}{\mathfrak{S} \pi (1 - \alpha_1^4)},$$

diese Gleichung nach d aufgelöst, gibt, wenn man die Zahlenwerthe: $P = 5314$, $a = 1000$, $\mathfrak{S} = 5$, $\alpha_1 = \alpha = 0{,}8$, also $d_1 = 0{,}8\, d$ einsetzt, abgerundet: $d = 250^{mm}$, $d_1 = 200^{mm}$.

16. Dieselbe Aufgabe, wie in der vorigen Nummer, jedoch mit dem Unterschiede, dass die Säule an ihren beiden Endpunkten oben und unten nicht seitlich gestützt, sondern in verticaler Lage unwandelbar befestigt ist.

Auflösung. In diesem Falle haben wir nicht nur die Biegungsmomente unmittelbar ober- und unterhalb des Punktes C, sondern auch die an den Befestigungspunkten A und B der Säule jetzt auftretenden Biegungsmomente ihrer absoluten Grösse nach zu unter-

suchen. Wir bezeichnen diese Momente der Reihe nach mit: M_{C^1}, M_{C_1}, M_A, M_B. Die Festigkeitstheorie des excentrischen Druckes führt diesen Fall zurück auf den Fall der Biegungsfestigkeit, dass ein gerader, stabförmiger, prismatischer Körper an seinen beiden Enden eingemauert, oder befestigt und in der Entfernung a von einer Befestigungsstelle mit P^{Kg} belastet ist, die Tangenten an die elastische Linie an den beiden Befestigungspunkten bilden mit der horizontalen Verbindungslinie der beiden Befestigungspunkte die Winkel α und β. Unter Benützung der dort für die an den Befestigungsstellen wirkenden Widerstandskräfte und Biegungsmomente gefundenen Ausdrücke ergeben sich für die obengenannten vier Momente und die beiden in den Punkten A und B wirkenden Widerstandskräfte P_1 und P_2 folgende Gleichungen:

$$M_{C^1} = \frac{q(q^2 - pq + 4p^2)}{l^3} \, . \, Pa,$$

$$M_{C_1} = -\frac{p(4q^2 - pq + p^2)}{l^3} \, . \, Pa,$$

$$M_A = M_{C^1} - P_1 p = \frac{q(q - 2p)}{l^2} \, . \, Pa,$$

$$M_B = M_{C_1} - P_2 q = \frac{p(2q - p)}{l^2} \, . \, Pa,$$

$$P_1 = -P_2 = \frac{6pq}{l^3} \, . \, Pa \text{*)}.$$

Um zu erfahren, welches von diesen vier Momenten das absolut grösste ist, setzen wir, wie in der vorigen Aufgabe angenommen wurde, $q = 4p$, also $\frac{p}{l} = \frac{1}{5}$, $\frac{q}{l} = \frac{4}{5}$, man erhält hierdurch:

$$M_{C^1} = \frac{4p(16p^2 - 4p^2 + 4p^2)}{l^3} \, . \, Pa = \frac{64p^3 Pa}{l^3} = 64 Pa \left(\frac{p}{l}\right)^3,$$

oder

$$M_{C^1} = 64 Pa \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{64 Pa}{125},$$

$$M_{C_1} = -\frac{p(64p^2 - 4p^2 + p^2)}{l^3} \, . \, Pa = -\frac{61 p^3 Pa}{l^3} = -61 Pa \left(\frac{p}{l}\right)^3,$$

oder

$$M_{C_1} = -61 Pa \left(\frac{1}{5}\right)^3 = -\frac{61 Pa}{125},$$

*) Die Ableitung dieser fünf Gleichungen gehört in die reine Festigkeitstheorie, wurde daher, als nicht in der Tendenz dieses Buches gelegen, weggelassen.

$$M_A = \frac{4p(4p-2p)}{l^2} \, . \, Pa = \frac{8p^2 Pa}{l^2} = 8\,Pa\left(\frac{p}{l}\right)^2 = 8\,Pa\left(\frac{1}{5}\right)^2,$$

oder

$$M_A = \frac{8\,Pa}{25} = \frac{40\,Pa}{125},$$

$$M_B = \frac{p\,(8p-p)}{l^2}\,Pa = \frac{7\,p^2 Pa}{l^2} = 7\,Pa\left(\frac{p}{l}\right)^2 = 7\,Pa\left(\frac{1}{5}\right)^2, \text{ oder}$$

$$M_B = \frac{7\,Pa}{25} = \frac{35\,Pa}{125};$$

die vier Momente sind also:

$$M_{C^1} = \frac{64\,Pa}{125},$$

$$M_{C_1}' = -\frac{61\,Pa}{125},$$

$$M_A = \frac{40\,Pa}{125},$$

$$M_B = \frac{35\,Pa}{125};$$

es ist hiermit ersichtlich, dass das Biegungsmoment $M_{C^1} = \frac{64\,Pa}{125}$ an dem Querschnitte unmittelbar oberhalb des Punktes C das grösste ist. Dieser Werth des Biegungsmomentes ist in der allgemeinen Gleichung für die Spannung „$\mathfrak{S} = \frac{Mc}{J} + \frac{P}{f}$“ an die Stelle von M zu setzen; man erhält durch diese Substitution:

$$\mathfrak{S} = \left(\frac{4}{5}\right)^3 Pa \, . \, \frac{c}{J} + \frac{P}{f} = P\left[\left(\frac{4}{5}\right)^3 \frac{ac}{J} + \frac{1}{f}\right],$$

woraus die Tragkraft

$$P = \frac{\mathfrak{S}\,Jf}{\left(\frac{4}{4}\right)^3 afc + J}$$

folgt. Für J, c und f die Werthe gesetzt:

$$J = \frac{\pi}{64}(d^4 - d_1^4),\ f = \frac{\pi}{4}(d^2 - d_1^2),\ c = \frac{d}{2},\ \frac{4}{5} = \alpha, \text{ gibt:}$$

$$P = \frac{\mathfrak{S} \, . \, \frac{\pi}{64}(d^4 - d_1^4)\,\frac{\pi}{4}(d^2 - d_1^2)}{\alpha^3 a \, . \, \frac{d}{2} \, . \, \frac{\pi}{4}(d^2 - d_1^2) + \frac{\pi}{64}(d^4 - d_1^4)},$$

oder Zähler und Nenner des rechten Theiles durch $\frac{\pi}{4}(d^2 - d_1^2)$ dividirt:

$$P = \frac{\frac{\pi}{64} \cdot \mathfrak{S}(d^4 - d_1^4)}{\alpha^3 a \cdot \frac{d}{2} + \frac{d^2 + d_1^2}{16}} = \frac{\mathfrak{S}\pi(d^4 - d_1^4)}{32\,\alpha^3 a d + 4(d^2 + d_1^2)},$$

$d_1 = \alpha_1 d$ gesetzt:

$$P = \frac{\mathfrak{S}\pi d^4 (1 - \alpha_1^4)}{32\,\alpha^3 a d + 4 d^2 (1 + \alpha_1^2)} = \frac{\mathfrak{S}\pi d^3 (1 - \alpha_1^4)}{32\,\alpha^3 a + 4 d (1 + \alpha_1^2)};$$

diese Gleichung nach der Unbekannten d geordnet:

$$d^3 - \frac{4 d P (1 + \alpha_1^2)}{\mathfrak{S}\pi(1 - \alpha_1^4)} = \frac{32\,\alpha^3 a P}{\mathfrak{S}\pi(1 - \alpha_1^4)},$$

wir setzen die Coëfficienten:

$$\frac{4P(1 + \alpha_1^2)}{\mathfrak{S}\pi(1 - \alpha_1^4)} = \frac{4P}{\mathfrak{S}\pi(1 - \alpha_1^2)} = \frac{4 \cdot 5314}{5 \cdot 3{,}14\left[1 - (0{,}8)^2\right]} = 3760{,}79 = p,$$

$$\frac{32\,a\,\alpha^3 P}{\mathfrak{S}\pi(1 - \alpha_1^4)} = \frac{32 \cdot 1000 \left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot 5314}{5 \cdot 3{,}14\left[1 - (0{,}8)^4\right]} = 9399177 = q$$

und erhalten dadurch:

$$d^3 - 3760{,}79\,d - 9399177 = 0, \text{ oder } d^3 - p d - q = 0;$$

diese Gleichung nach der Cardanischen Formel aufgelöst:

$$d = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}},$$

die Werthe:

$$\frac{q}{2} = 4699588{,}5, \quad \frac{q^2}{4} = 22086132069332{,}25 \text{ und}$$

$$\frac{p^3}{27} = 1969896741{,}02$$

eingesetzt, erhält man:

$$d = \sqrt[3]{9398967{,}5} + \sqrt[3]{209{,}5} = 216{,}935$$

und abgerundet $d = 217^{mm}$; hiermit wird

$$d_1 = 0{,}8\,d = 0{,}8 \cdot 217 = 173{,}6^{mm}.$$

Man ersieht aus diesem Resultat, dass in Folge des hier geringeren Werthes des Maximalbiegungsmomentes, als in der vorigen Aufgabe,

die beiden Durchmesser d und d_1 der Säule etwas kleiner ausfielen; dort war das Maximalbiegungsmoment

$$M = Pa \cdot \frac{q}{l} \text{ oder } M = \frac{4}{5} Pa = \frac{100\,Pa}{125}, \text{ hier ist } M = \frac{64\,Pa}{125}.$$

17. Es sind die Querschnittsdimensionen eines schmiedeisernen Kettenhakens von $P = 5000^{Kg}$ Tragkraft zu berechnen, wenn der Querschnitt des Hakens an allen Stellen eine Kreisfläche ist.

Auflösung. Die bei einem Haken zu berechnenden wichtigsten Querschnittsdimensionen sind an den Stellen bei A, B und C (siehe nebenstehende Figur). Da hier die Querschnitte überall Kreisflächen sind, so nennen wir die zu berechnenden Durchmesser an diesen drei Hakenquerschnitten: d an der Befestigungsstelle bei A, d_1 am Hakenrücken bei B und d_2 an der tiefsten Stelle des Hakens bei C. Wir wählen die Krümmung des Hakens so, dass die Richtungslinie der Kraft P mit der Mittellinie des cylindrischen Hakenschaftes (Aufhängestelle) zusammenfällt, damit der Schaft bei A keine excentrische Zugbelastung auszuhalten habe; die Weite w des Hakens sei nach einem Kreise vom Durchmesser $w = d_1$ gekrümmt. Der Theil des Hakens bei A ist gewöhnlich eine Schraube; der Kerndurchmesser d' derselben ergibt sich nach der in Aufgabe Nummer 40 der Anwendungsbeispiele über Zug-, Druck- und Scheerfestigkeit entwickelten Formel:

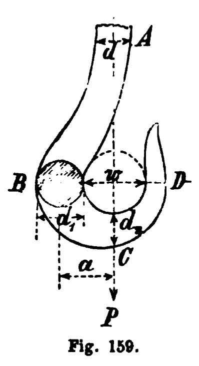


Fig. 159.

$$d' = 0{,}7\sqrt{P} = 0{,}7\sqrt{5000} = 49{,}5^{mm},$$

hiermit wird der äussere Durchmesser des Bolzens: $d = 56{,}4^{mm}$. Zur Berechnung des Durchmessers d_1 bedenke man, dass der Theil des Hakens bei B eine excentrische Zugbelastung auszuhalten habe; die Excentricität ist, wie aus der Figur ersichtlich, $a = d_1$; setzt man daher in die für den excentrischen Zug geltende Formel „$P = \frac{\mathfrak{S} f J}{J + acf}$" für f, J, a und c die Werthe: $f = \frac{\pi d_1^2}{4}$, $a = d_1$, $J = \frac{\pi d_1^4}{64}$, $c = \frac{d_1}{2}$ ein, so erhält man:

$$P = \frac{\mathfrak{S} \cdot \frac{\pi d_1^2}{4} \cdot \frac{\pi d_1^4}{64}}{\frac{\pi d_1^4}{64} + d_1 \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{\pi d_1^2}{4}} = \frac{\mathfrak{S}\, \pi^2 d_1^6}{4\pi d_1^4 + 32\, d_1^4 \pi}, \text{ oder}$$

$$P = \frac{\mathfrak{S}\,\pi^2 d_1^8}{4\pi + 32\pi} = \frac{3{,}14\,\mathfrak{S}\,d_1^2}{36} = 0{,}0872\,\mathfrak{S}\,d_1^2, \text{ woraus}$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{P}{0{,}0872\,\mathfrak{S}}} = 3{,}385\sqrt{\frac{P}{\mathfrak{S}}}$$

folgt. Setzen wir $P = 5000$, $\mathfrak{S} = 6$ ein, so erhält man:

$$d_1 = 3{,}385\sqrt{\frac{5000}{5}} = 97{,}69^{mm}.$$

Dieser Werth von d_1 wurde unter der Voraussetzung gefunden, dass die Hakenweite $w = d_1$ sei; gewöhnlich wird aber diese in der Praxis etwas grösser genommen, und zwar bei kreisförmigem Querschnitte des Hakenrückens $w = 1{,}225\,d_1$ bis $w = 1{,}25\,d_1$, bleiben wir bei dem ersteren Werthe, so ist die Excentricität:

$$a = \frac{d_1 + w}{2} = \frac{d_1 + 1{,}225\,d_1}{2} = 1{,}1125\,d_1;$$

diesen Werth von a in die Gleichung für die Tragkraft P eingesetzt:

$$P = \frac{\mathfrak{S}\,\pi\,\frac{d_1^2}{4} \cdot \frac{\pi}{64}\,d_1^4}{\frac{\pi d_1^4}{64} + 1{,}1125\,\frac{d_1^2}{2} \cdot \frac{\pi d_1^2}{4}} = \frac{\frac{\mathfrak{S}\,\pi^2 d_1^6}{256}}{\frac{\pi d_1^4}{64} + \frac{0{,}55625\,d_1^4\,\pi}{4}}, \text{ oder}$$

$$P = \frac{\mathfrak{S}\,\pi^2 d_1^6}{\pi d_1^4 (4 + 35{,}6)} = \frac{\mathfrak{S}\,\pi\,d_1^2}{39{,}6}, \text{ woraus}$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{39{,}6\,P}{\pi\,\mathfrak{S}}} = 3{,}55\sqrt{\frac{P}{\mathfrak{S}}}$$

folgt. Setzt man $P = 5000$, $\mathfrak{S} = 6$ ein, so erhält man:

$$d_1 = 3{,}55\sqrt{\frac{5000}{6}} = 102{,}4^{mm},$$

für $\mathfrak{S} = 8$ und $\mathfrak{S} = 10$ erhält man $d_1' = 89^{mm}$ und $d_1'' = 79{,}4^{mm}$. Nun erübrigt noch, den Durchmesser d_2 an der Stelle bei C zu berechnen. In diesem Querschnitte wirkt die Kraft P als Schubkraft. Nach der Theorie der Schubfestigkeit ist die grösste Tangentialspannung im Querschnitte bei C:

$$\mathfrak{S}_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{P}{f}\left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{7}{16}\alpha^4\right), \text{ wobei } \alpha = \frac{1}{\frac{w}{d_2} + 1}$$

und $f = \frac{\pi d_2^2}{4}$ ist, setzen wir $1 + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{7\alpha^4}{16} = s$, so hat man:

$$\mathfrak{S}_1 = \frac{4Ps}{3f} = \frac{4Ps}{3 \cdot \frac{\pi d_2^2}{4}} = \frac{16Ps}{3\pi d_2^2};$$

der Werth von s ist sehr wenig grösser als 1, denn, setzt man in der Gleichung „$\alpha = \frac{1}{\frac{w}{d_2} + 1}$“, z. B. $\frac{w}{d_2} = \frac{3}{2}$, oder $\frac{w}{d_2} = 1$, oder $\frac{w}{d_2} = 2$, so erhält man der Reihe nach: $s = 1{,}15234$, $s' = 1{,}0912$, $s'' = 1{,}0609$; wie auch das Verhältniss $\frac{w}{d_2}$ gewählt werden mag (selbstverständlich innerhalb praktischer Ausführungsgrenzen), der Werth von s wird immer nur sehr wenig von 1 verschieden sein, wir setzen $s = 1{,}2$ in die Gleichung für $\mathfrak{S}_1$ ein und erhalten: $\mathfrak{S}_1 = \frac{16P \cdot 1{,}2}{3\pi d_2^2}$, diese Spannung muss aber auch der im Querschnitte bei B herrschenden grössten Normalspannung, nämlich gleich $\frac{3}{4}\mathfrak{S}$ bis $\frac{4}{5}\mathfrak{S}$ sein, für $\mathfrak{S}_1 = \frac{3}{4}\mathfrak{S}$ erhält man: $\frac{3}{4}\mathfrak{S} = \frac{6{,}4P}{\pi d_2^2}$, woraus

$$d_2 = \sqrt{\frac{6{,}4P \cdot 4}{3\pi\mathfrak{S}}} = 1{,}65\sqrt{\frac{P}{\mathfrak{S}}} = 1{,}65\sqrt{\frac{5000}{6}} = 47{,}62,$$

oder rund $d_2 = 48^{mm}$ folgt; setzt man aber $\mathfrak{S}_1 = \frac{4}{5}\mathfrak{S}$, so ist

$$\frac{4}{5}\mathfrak{S} = \frac{6{,}4P}{\pi d_2^2}, \text{ woraus}$$

$$d_2' = 1{,}703\sqrt{\frac{P}{\mathfrak{S}}} = 1{,}703\sqrt{\frac{5000}{6}} = 49{,}14^{mm}$$

folgt. (Die letztere Beziehung zwischen $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}$ ist die bei numerischen Rechnungen gewöhnlich allgemein gebrauchte.) Diese Dimension d_2 wird aber bei der Ausführung des Hakens wegen des gewünschten allmäligen Ueberganges des Querschnittes bei B in den bei C um etwas vergrössert, so dass das Hakenprofil an den Stellen bei B und C durch eine Kreislinie begrenzt erscheint. (Siehe die Figur.) Endlich sei noch erwähnt, dass der Durchmesser an der dem Hakenrücken gegenüber liegenden Stelle des Hakens bei D gleich $\frac{d_1}{2}$ gemacht wird.

18. Dieselbe Aufgabe, wie in der vorigen Nummer, jedoch mit dem Unterschiede, dass der Querschnitt des Hakenrückens eine Ellipse von den Halbaxen $\frac{h}{2}$ und $\frac{h}{3}$ ist.

Auflösung. Zur Bestimmung des Querschnittes im Hakenrücken, d. i. also an der Stelle bei B, hat man nur in die für die Tragkraft P geltende Formel „$P = \frac{\mathfrak{S} f J}{J + a c f}$“ die für die Ellipse geltenden Werthe, nämlich $f = \frac{b h \pi}{4}$, $\left(\frac{b}{2}\right.$ die kleine Halbaxe der Ellipse$\left.\right)$ $a = h$, (wobei wir also annehmen, dass die Hakenweite $w = h$ ist), $J = \frac{\pi b h^3}{64}$, $c = \frac{h}{2}$ einzusetzen; man erhält hierdurch:

$$P = \frac{\frac{\mathfrak{S} b h \pi}{4} \cdot \frac{\pi b h^3}{64}}{\frac{\pi b h^3}{64} + h \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{b h \pi}{4}},$$

oder Zähler und Nenner des rechten Theiles durch $\frac{b h \pi}{4}$ dividirt:

$$P = \frac{\frac{\mathfrak{S} \pi b h^3}{64}}{\frac{h^2}{16} + \frac{h^2}{2}} = \frac{\frac{\mathfrak{S} \pi b h^3}{64}}{\frac{4 h^2 + 32 h^2}{64}} = \frac{\mathfrak{S} \pi b h^3}{36 h^2} = \frac{\mathfrak{S} \pi b h}{36}.$$

nimmt man nun $b = \frac{2}{3} h$ an, so ist:

$$P = \frac{\mathfrak{S} \pi \cdot \frac{2}{3} h^2}{36} = \frac{\mathfrak{S} \pi h^2}{54}, \text{ woraus}$$

$$h = \sqrt{\frac{54 P}{\mathfrak{S} \pi}} = \sqrt{\frac{54 \cdot 5000}{6 \cdot 3{,}14}} = 120^{mm};$$

folgt; hiermit wird $b = \frac{2}{3} \cdot 120 = 80^{mm}$; für $\mathfrak{S} = 10$, erhält man $h = 93^{mm}$, $b = 62^{mm}$.

Die Dimensionen b_1 und h_1 des elliptischen Querschnittes an der Stelle C des Hakens (siehe die Figur in der vorigen Aufgabe) findet man ebenso, wie beim vorigen Beispiele, mittelst der Formel: $\mathfrak{S}_1 = \frac{3}{4} \mathfrak{S} = \frac{4 P s}{3 f}$, die Werthe: $s = 1{,}2$, $f = \frac{b_1 h_1 \pi}{4}$ eingesetzt:

$$\frac{3}{4}\,\mathfrak{S} = \frac{4P\,.\,1{,}2}{3\,.\,\frac{b_1\,h_1\,\pi}{4}} = \frac{4P\,.\,4{,}8}{3\,b_1\,h_1\,\pi} = \frac{6{,}4\,P}{b_1\,h_1\,\pi}, \text{ oder}$$

$$\mathfrak{S} = \frac{25{,}6\,P}{3\,b_1\,h_1\,\pi},$$

für b_1 den Werth $b_1 = \frac{2}{3}h_1$ gesetzt:

$$\mathfrak{S} = \frac{25{,}6\,P}{3\,.\,\frac{2}{3}\,h_1^2\,\pi} = \frac{25{,}6\,P}{2\,h_1^2\,\pi} = \frac{12{,}8\,P}{h_1^2\,\pi}, \text{ woraus}$$

$$h_1 = \sqrt{\frac{12{,}8\,P}{\pi\,\mathfrak{S}}} = 2{,}02\sqrt{\frac{P}{\mathfrak{S}}}, \text{ oder}$$

$$h_1 = 2{,}02\sqrt{\frac{5000}{6}} = 58{,}29,$$

und rund $h_1 = 58^{mm}$ folgt; hiermit wird $b_1 = \frac{2}{3}\,.\,58 = 38{,}86$, oder abgerundet $b_1 = 39^{mm}$. Die Dimension $h_1 = 58^{mm}$ wird auch hier bei der Ausführung des Hakens wegen des allmäligen Ueberganges des Querschnittes bei B in den bei C etwas grösser ausfallen.

19. Ein prismatischer Balken aus Eichenholz von rechteckigem Querschnitte und der Länge $l = 5^m$, ist mit dem einen Ende in

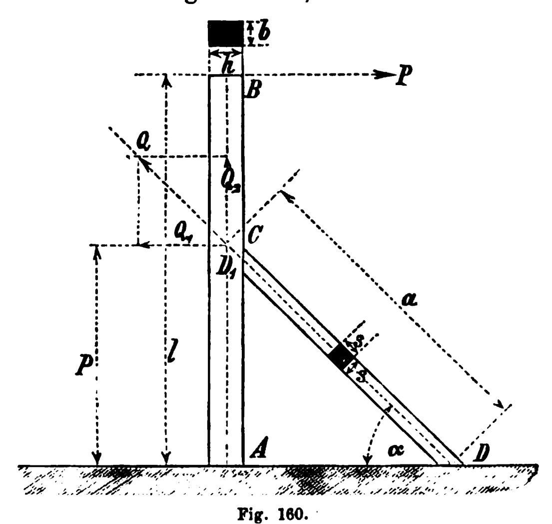


Fig. 160.

verticaler Lage bei A unwandelbar befestigt; am anderen Ende bei B wird der Balken durch die horizontal wirkende Kraft $P = 2000^{Kg}$

angegriffen und durch die Strebe CD in verticaler Lage erhalten. (Siehe Fig. 160.) Man fragt: 1) Welche Länge a muss die Strebe CD erhalten, wenn ihr Querschnitt ein Quadrat von der Seitenlänge $s = 150^{mm}$ ist? 2) Welche Querschnittsdimensionen b und h erhält der Balken AB?

Auflösung. Die Strebe CD denken wir uns durch eine Kraft Q ersetzt, welche in der Richtung DD_1 (Mittellinie der Strebe) nach aufwärts wirkt; diese Kraft Q zerlegen wir in die auf einander rechtwinklig stehenden Componenten Q_1 und Q_2; die beiden Kräfte P und Q_1 haben in Bezug auf den Punkt A ein entgegengesetztes Drehungsbestreben, so, dass die Gleichgewichtsbedingung stattfindet: $Q_1 p = Pl$; es ist aber $Q_1 = Q \cos \alpha$ und $p = a \sin \alpha$ (wobei der Winkel α vorläufig als bekannt anzusehen ist), man hat daher mit diesen Substitutionen:

$$Q \cos \alpha \,.\, a \sin \alpha = Pl, \text{ woraus } Q = \frac{Pl}{a \sin \alpha \cos \alpha}$$

folgt; es ist aber $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$, daher ist

$$Q = \frac{Pl}{a \,.\, \frac{1}{2} \sin 2\alpha} = \frac{2Pl}{a \sin 2\alpha}.$$

Die Kraft Q nimmt die rückwirkende Festigkeit der Strebe in Anspruch, und zwar werden die Querschnittsdimensionen der letzteren um so kleiner ausfallen, je kleiner Q wird; in Ansehung des Winkels α wird aber die Kraft Q um so kleiner, je grösser $\sin 2\alpha$ wird; das Maximum von $\sin 2\alpha$ ist aber offenbar: $\sin 2\alpha = 1$, d. h. $2\alpha = 90^\circ$ und $\alpha = 45^\circ$; wir stellen daher die Strebe unter einem $\measuredangle\, \alpha = 45^\circ$ gegen die Säule geneigt; darnach wird also

$$Q = \frac{2Pl}{a}.$$

Wir betrachten die Strebe CD als eine auf ihre Zerknickungsfestigkeit beanspruchte Säule, welche an ihren beiden Endpunkten lose aufsteht und in der ursprünglichen Stabaxe in den Endpunkten C und D gerade geführt wird. Wir haben daher für diesen Fall die Formel: $Q = \frac{\pi^2 JE}{n a^2}$, wenn a die Länge der Strebe bedeutet. Setzen wir den Sicherheitsgrad wegen der Bequemlichkeit der Rechnung $n = \pi^2$, so hat man $Q = \frac{2Pl}{a} = \frac{JE}{a^2}$, oder $2Pl = \frac{JE}{a}$; für J den Werth gesetzt: $J = \frac{s^4}{12}$, erhält man:

$$2\,P\,l = \frac{s^4\,E}{12\,a}, \text{ woraus}$$

$$a = \frac{s^4\,E}{24\,P\,l} = \frac{(150)^4 \,.\, 1200}{24 \,.\, 2000 \,.\, 5000} = 2531^{mm} \text{ folgt.}$$

Der Balkentheil BC wird durch die Kraft P auf Biegung und durch die Kraft Q_2 auf Zug, also auf seine zusammengesetzte Festigkeit beansprucht. Lassen wir vorläufig die Kraft Q_2 unberücksichtigt und berechnen die Dimensionen b und h des rechteckigen Balkenquerschnittes aus der für die Biegungsfestigkeit geltenden Formel: $P(l-p) = \frac{\mathfrak{S}\,b\,h^2}{6}$; mit $b = \frac{5}{7}h$ erhält man:

$$P(l-p) = \frac{5\,\mathfrak{S}\,h^3}{42}, \text{ woraus } h = \sqrt[3]{\frac{42\,P(l-p)}{5\,\mathfrak{S}}}$$

folgt. Es ist

$$p = a \sin\alpha = 2531 \,.\, \sin 45^{\circ}, \text{ oder}$$

$$p = 2531 \,.\, 0{,}707 = 1789{,}4$$

und rund $p = 1790$, daher

$$h = \sqrt[3]{\frac{42 \,.\, 2000\,(5000 - 1790)}{5 \,.\, 0{,}8}} = 406{,}8^{mm},$$

hiermit wird $b = \frac{5}{7} \,.\, 406{,}8 = 290{,}5^{mm}$.

Will man die Säule AB mit geringeren Querschnittsdimensionen ausführen, so muss die Strebe CD länger genommen werden; dieses kann ohne Schwächung der Festigkeit des Ganzen nur dadurch geschehen, dass man auch die Querschnittsdimension s der Strebe grösser macht, wie dies auch aus der Gleichung „$a = \frac{s^4\,E}{24\,P\,l}$“ hervorgeht, wenn P und l unveränderlich sind und der $\sphericalangle\,\alpha = 45^{\circ}$ beibehalten wird. Wir nehmen z. B. $s = 170^{mm}$, so gibt dieses:

$$a = \frac{(170)^4 \,.\, 1200}{24 \,.\, 2000 \,.\, 5000} = 4176^{mm},$$

$$p = a \sin\alpha = a \sin 45^{\circ} = 4176 \,.\, 0{,}707 = 2952{,}4^{mm};$$

hiermit erhält man aus der obigen Gleichung für h, wenn man die Zahlenwerthe, sowie $p = 2952{,}4$ einsetzt: $h = 348{,}5^{mm}$, somit $b = \frac{5}{7} \,.\, 348{,}5 = 249^{mm}$.

Wenn man bei der Berechnung der Querschnittsdimensionen b und h des Balkens AB die Componente Q_2 berücksichtigt, so

hat man es mit der zusammengesetzten Festigkeit des Balkens zu thun, da derselbe durch die Kraft P auf Biegung und gleichzeitig durch die Kraft Q_2 auf Zug beansprucht wird. Für diesen Fall hat man nach der Lehre von der zusammengesetzten Festigkeit die Tragkraft P_1 des Balkens AB:

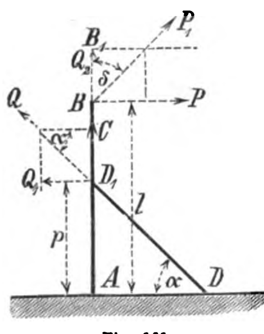


Fig. 161.

$$P_1 = \frac{\mathfrak{S} f J}{J \cos \delta + f l_1 c \sin \delta},$$

in dieser Gleichung bedeuten: P_1 die Resultirende der Kräfte P und Q_2, δ der Winkel, den diese Resultirende mit der Verticalen AB einschliesst (siehe nebenstehende Figur), f den Querschnitt des Balkens, $l_1 = BD_1 = l - p$; es ist hier $P_1 = \sqrt{Q_2^2 + P^2}$,

$$Q_2 = BB_1 = D_1 C = Q \sin \alpha,$$

und wegen $Q = \frac{2Pl}{a}$, ist auch $Q_2 = \frac{2Pl}{a} \cdot \sin \alpha$, oder die Zahlenwerthe eingesetzt:

$$Q_2 = \frac{2 \cdot 2000 \cdot 5000}{4176} \cdot 0{,}707 = 3386^{Kg};$$

hiermit wird:

$$P_1 = \sqrt{(3386)^2 + (2000)^2} = 3932{,}5^{Kg}.$$

Es ist ferner:

$$\cos \delta = \frac{Q_2}{P_1} = \frac{3386}{3932{,}5} = 0{,}861,$$

$$\sin \delta = \frac{P}{P_1} = \frac{2000}{3932{,}5} = 0{,}508.$$

Aus der obigen Gleichung für P_1 erhält man den Querschnitt

$$f = \frac{P_1}{\mathfrak{S} J} (J \cos \delta + f l_1 c \sin \delta), \text{ oder}$$

$$f = \frac{P_1}{\mathfrak{S}} \left(\cos \delta + \frac{f l_1 c \sin \delta}{J} \right),$$

die Werthe für f, c und J in den rechten Theil der Gleichung eingesetzt, nämlich: $f = bh$, $c = \frac{h}{2}$, $J = \frac{bh^3}{12}$, erhält man:

$$f = \frac{P_1}{\mathfrak{S}} \left(\cos \delta + \frac{b h l_1 h \sin \delta}{2 \cdot \frac{bh^3}{12}} \right) = \frac{P_1}{\mathfrak{S}} \left(\cos \delta + \frac{6 l_1 \sin \delta}{h} \right),$$

$f = b h$, $b = \frac{5}{7} h$, also $f = \frac{5}{7} h^2$ eingesetzt:

$$\frac{5}{7} h^2 = \frac{P_1}{\mathfrak{S}} \left(\cos \delta + \frac{6 l_1 \sin \delta}{h} \right),$$

oder, wenn man diese Gleichung nach der Unbekannten h ordnet:

$$\frac{5}{7} h^2 = \frac{P_1}{\mathfrak{S}} \cos \delta + \frac{6 l_1 P_1 \sin \delta}{\mathfrak{S} h}, \text{ oder}$$

$$\frac{5}{7} h^3 = \frac{P_1 h \cos \delta}{\mathfrak{S}} + \frac{6 l_1 P_1 \sin \delta}{\mathfrak{S}}, \text{ oder}$$

$$h^3 - \frac{7 P_1 h \cos \delta}{5 \mathfrak{S}} = \frac{42 l_1 P_1 \sin \delta}{5 \mathfrak{S}}; \text{ wir setzen}$$

$$\frac{7 P_1 \cos \delta}{5 \mathfrak{S}} = \frac{7 \,.\, 3932{,}5 \,.\, 0{,}861}{5 \,.\, 0{,}8} = 5925{,}29 = p,$$

$$\frac{42 l_1 P_1 \sin \delta}{5 \mathfrak{S}} = \frac{42 \,.\, 2047{,}6 \,.\, 3932{,}5 \,.\, 0{,}508}{5 \,.\, 0{,}8} = 42950332 = q,$$

die Werthe dieser Coëfficienten in die geordnete kubische Gleichung eingesetzt:

$$h^3 - 5925{,}29 h = 42950332, \text{ oder } h^3 - p h = q,$$

diese Gleichung nach h aufgelöst, für p und q die Werthe gesetzt, gibt abgerundet $h = 355^{mm}$, somit $b = \frac{5}{7} h = \frac{5}{7} \,.\, 355 = 253{,}5^{mm}$. Will man die kubische Gleichung umgehen, so nehme man in der Gleichung

$$f = b h = \frac{P_1}{\mathfrak{S}} \cos \delta + \frac{6 l_1 P_1 \sin \delta}{\mathfrak{S} h}$$

für b probeweise einen beliebigen, passenden Zahlenwerth an und erhält dann:

$$h^2 - \frac{h P_1 \cos \delta}{b \mathfrak{S}} = \frac{6 l_1 P_1 \sin \delta}{b \mathfrak{S}}, \text{ hieraus ist}$$

$$h = \frac{P_1 \cos \delta}{2 b \mathfrak{S}} \pm \sqrt{\left(\frac{P_1 \cos \delta}{2 b \mathfrak{S}} \right)^2 + \frac{6 l_1 P_1 \sin \delta}{b \mathfrak{S}}}.$$

Ist jedoch die Strecke p gegeben, und man fragt, für welchen Winkel α werden die Querschnittsdimensionen der Strebe $D_1 D$ am schwächsten ausfallen, so hat man wieder die Gleichgewichtsgleichung „$p \,.\, Q \cos \alpha = P l$“ anzuwenden; aus dieser Gleichung folgt: $Q = \frac{P l}{p \cos \alpha}$, und da nach Früherem $Q = \frac{E J}{a^2}$ ist, so hat man auch

$$\frac{Pl}{p \cos \alpha} = \frac{EJ}{a^2},$$

oder, da $a = \frac{p}{\sin \alpha}$ ist,

$$\frac{Pl}{p \cos \alpha} = \frac{EJ}{\frac{p^2}{\sin^2 \alpha}} = \frac{EJ \sin^2 \alpha}{p^2}, \text{ hieraus ist:}$$

$$J = \frac{Plp}{E \sin^2 \alpha \cos \alpha} = \frac{s^4}{12};$$

je kleiner J wird, desto kleiner wird die Quadratseite s, J wird aber am kleinsten, wenn in dem Bruche $\frac{Plp}{E \sin^2 \alpha \cos \alpha}$ der Nenner $E \sin^2 \alpha \cos \alpha$ am grössten wird; da E constant ist, so wird J ein Minimum, wenn $\sin^2 \alpha \cos \alpha =$ Maximum wird. Den ersten Differential-Quotienten dieses Ausdruckes nach α genommen, gleich Null gesetzt:

$$2 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 = 0, \text{ hieraus folgt:}$$

$$2 \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha, \text{ woraus sich}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{3}, \text{ und } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}57736$$

ergibt; dies entspricht einem Winkel $\alpha = 54{,}75^\circ$. Angenommen, es wäre $p = 2952{,}4$ (wie oben ausgerechnet wurde) gegeben, dann ist

$$a = \frac{p}{\sin \alpha} = \frac{p}{\sin 54{,}75^\circ} = \frac{2952{,}4}{0{,}8166} = 3600^{mm},$$

mit diesem Werthe von a erhält man dann aus der Gleichung

$$„\frac{s^4}{12} = \frac{Plp}{E \sin^2 \alpha \cos \alpha}“:$$

$$s = \sqrt[4]{\frac{12\, Plp}{E \sin^2 \alpha \cos \alpha}} = \sqrt[4]{\frac{12 \,.\, 2000 \,.\, 5000 \,.\, 2952{,}4}{1200\,(0{,}8166)^2 \,.\, 0{,}57736}} = 166^{mm}.$$

20. Eine schmiedeiserne Schwungradwelle von der Länge $l = 2^m$ zwischen den Unterstützungspunkten trägt in der Entfernung $a = 0{,}6^m$ von dem einen Unterstützungspunkte ein Schwungrad im Gewichte von $Q = 2600^{Kg}$ und überträgt 30 Pferdekräfte bei einer Umdrehungsanzahl von $u = 50$ pro Minute. Es ist der Durchmesser d der Welle unter Berücksichtigung der Biegungsbelastung Q, sowie des Eigengewichtes der Welle und der möglichen dynamischen Einwirkung des Schwungrades zu berechnen; der mittlere Halbmesser des Schwungringes ist $r = 1{,}5^m$, das Gewicht des letzteren werde mit $Q_2 = 2000^{Kg}$ angenommen.

Auflösung. Um vorläufig zu einem ungefähren Werthe des Wellendurchmessers wegen der Gewichtsberechnung der Welle zu gelangen, lassen wir die Last Q, das Eigengewicht der Welle und die dynamische Einwirkung des Schwungrades vorläufig unberücksichtigt, und berechnen den Durchmesser der Welle nur aus ihrer Torsionsbeanspruchung. Nach der in Beispiel 8 der Aufgaben über Torsionsfestigkeit entwickelten Formel

$$d = 120 \sqrt[4]{\frac{N}{u}}$$

hat man, wenn man die Zahlenwerthe einsetzt:

$$d = 120 \sqrt[4]{\frac{30}{50}} = 105{,}6^{mm};$$

da aber die Welle jedenfalls wegen der Last Q stärker ausfallen wird, so nehmen wir behufs Gewichtsberechnung der Welle den Durchmesser $d = 120^{mm}$ an, hiermit erhält man das Gewicht der Welle:

$$Q_1 = \frac{l d^2 \pi}{4} . \gamma = 20 . (1{,}2)^2 . \frac{3{,}14}{4} . 7{,}75 = 176^{Kg}.$$

Zur Berechnung des Maximalbiegungsmomentes M_b der Welle berechnen wir zunächst die Entfernung r_1 des Angriffspunktes der Resultirenden R der beiden Kräfte Q und Q_1 von dem einen Unterstützungspunkte A (siehe nebenstehende Figur). Nach dem Satze: „das statische Moment der Resultirenden ist gleich der algebraischen Summe der statischen Momente der Componenten“ hat man die Gleichung:

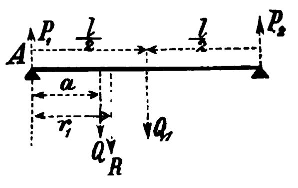


Fig. 162.

$$R r_1 = Q a + \frac{Q_1 l}{2}, \text{ woraus}$$

$$r_1 = \frac{Q a + \frac{Q_1 l}{2}}{R} = \frac{2 Q a + Q_1 l}{2 (Q + Q_1)} = \frac{2 . 2600 . 0{,}6 + 176 . 2}{2 (2600 + 176)} = 0{,}625^m$$

folgt. Bezeichnet P_1 den Auflagerdruck im Punkte A, so ist

$$P_1 l = R (l - r_1), \text{ woraus}$$

$$P_1 = \frac{R (l - r_1)}{l} = \frac{2776 (2000 - 625)}{2000} = 1908{,}5$$

und abgerundet $P_1 = 1909^{Kg}$ ist. Das Maximalbiegungsmoment ist

$$M_b = P_1 r_1 = 1909 . 625, \text{ oder } M_b = 1193125.$$

Das Torsionsmoment M_d ist, wie aus Früherem bekannt:

$$M_d = \frac{716200\,N}{u} = \frac{716200 \,.\, 30}{50} = 429720.$$

Die Welle wird durch das Biegungs- und Torsionsmoment, die beide gleichzeitig wirken, auf ihre zusammengesetzte Festigkeit beansprucht; für diesen Fall hat man nach der Lehre von der zusammengesetzten Festigkeit (wenn Torsion und Biegung gleichzeitig auf einen Körper einwirken), die grösste zulässige Faserspannung

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{J}\left(\frac{3}{8} M_b + \frac{5}{8}\sqrt{M_b^2 + M_d^2}\right), \text{ hieraus ist}$$

$$\frac{\mathfrak{S} J}{c} = M_{b(i)} = \frac{3}{8} M_b + \frac{5}{8}\sqrt{M_b^2 + M_d^2},$$

d. h. gleich einem ideellen Biegungsmomente, welches als Resultat der gleichzeitigen Einwirkung des verdrehenden und biegenden Momentes angesehen wird. Da $\frac{\mathfrak{S} J}{c} = \frac{\mathfrak{S} \pi d^3}{32}$ ist, so hat man auch:

$$\frac{\mathfrak{S} \pi d^3}{32} = \frac{3}{8} M_b + \frac{5}{8}\sqrt{M_b^2 + M_d^2};$$

die Zahlenwerthe in den rechten Theil der Gleichung eingesetzt:

$$\frac{\mathfrak{S} \pi d^3}{32} = \frac{3}{8} \,.\, 1193125 + \frac{5}{8}\sqrt{(1193125)^2 + (429720)^2}, \text{ oder}$$

$$\frac{\mathfrak{S} \pi}{32} d^3 = 1197945{,}7, \text{ hieraus ist}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \,.\, 1197945{,}7}{\mathfrak{S} \pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \,.\, 1197945{,}7}{6 \,.\, 3{,}14}} = 127^{mm}.$$

Das Gewicht der Welle von 2^m Länge und 127^{mm} Durchmesser ergibt sich jetzt zwar mit

$$G_1 = \frac{d^2 \pi}{4} l \gamma = \frac{(1{,}27)^2 \,.\, 3{,}14}{4} \,.\, 20 \,.\, 7{,}75 = 196^{Kg},$$

während wir bei der ersten Gewichtsberechnung der Welle unter der Annahme $d = 120^{mm}$ fanden: $G = 176^{Kg}$; allein diese Differenz von 20^{Kg} im Eigengewicht der Welle hat einen so geringen Einfluss auf den Durchmesser der letzteren, dass wir die Rechnung mit dem Gewichte $G_1 = 196^{Kg}$ nicht zu wiederholen brauchen.

Berechnung des Wellendurchmessers d aus dem dynamischen Einflusse des Schwungrades. Die bei der Bewegung der Welle im Schwungringe des Schwungrades sich ansammelnde lebendige Kraft hat bei einem etwaigen plötzlich ein-

tretenden Bewegungshindernisse das Bestreben, die Welle zu verdrehen. Dieser Verdrehung muss die Welle (ganz abgesehen von der übrigen Beanspruchung durch Biegung und Verdrehung) einen genügenden Widerstand entgegensetzen können, d. h. sie muss im Stande sein, die von dem Schwungring ausgeübte Drehungsarbeit in sich aufzunehmen, ohne einen Bruch zu erleiden. Die von der Welle aufzunehmende Drehungsarbeit ist nach der Lehre von der Berechnung der Arbeit der inneren Kräfte (Arbeitsaufwand zur Deformation eines Körpers durch Verdrehung) $A = \frac{\mathfrak{S}_1^2 V}{4 G}$, in welcher Gleichung $\mathfrak{S}_1$ die grösste Faserspannung, V das Volumen der Welle, G des Torsions-Elasticitätsmodul des Materials bedeuten. Die im Schwungringe angesammelte lebendige Kraft ist $\frac{Q_2 v^2}{2g}$; hierbei bedeuten Q_2 das Gewicht des Schwungringes, v die mittlere Umfangsgeschwindigkeit des Schwungringes und $g = 9{,}81^m$ die Fallbeschleunigung der Schwere. Diese lebendige Kraft hat das Bestreben, bei einer plötzlich eintretenden Verminderung der Winkelgeschwindigkeit w der Welle die Arme des Schwungrades zu biegen und die Welle zu verdrehen. Angenommen, es werde die Winkelgeschwindigkeit w der Welle durch ein plötzliches Bewegungshinderniss auf $\frac{w}{4}$ vermindert (es ist nicht gut anzunehmen, dass plötzlich $w = 0$ würde), so wird dadurch auch die Umfangsgeschwindigkeit v des Schwungringes auf $\frac{v}{4}$ reducirt, und es wird daher im Schwungringe eine überschüssige lebendige Kraft von $\frac{Q_2}{2g}\left(\frac{3v}{4}\right)^2$ zur Biegung der Arme und Verdrehung der Welle frei. Es ist bekanntlich $v = \frac{\pi r u}{30}$, wenn r der mittlere Halbmesser des Schwungringes und u die Tourenzahl des Rades pro Minute bedeuten.

Man findet, wenn man die Zahlenwerthe einsetzt:

$$v = \frac{3{,}14 \,.\, 1{,}5 \,.\, 50}{30} = 7{,}85^m.$$

Hiermit erhält man, auf Centimeter bezogen:

$$\frac{Q_2}{2g}\left(\frac{3}{4}v\right)^2 = \frac{2000}{2 \,.\, 981} \cdot \left(\frac{3}{4}\,785\right)^2 = 353340 = A.$$

Von dieser Arbeit A wird jedoch ein Theil zur Biegung der Arme verwendet; es ist anzunehmen, dass diese Biegungsbeanspruchung bis zum Bruche der Arme geht. Nach der Lehre von der Berechnung

der Arbeit (der Biegungsfestigkeit), die zur Biegung der Arme bis zum Bruche nöthig ist, hat man diese Arbeit:

$$A_1 = 0{,}0892 \cdot \frac{K^2}{E} \cdot Fr,$$

in welcher Gleichung K die Beanspruchung bis zum Bruche, E den Biegungs-Elasticitätsmodul, F den Gesammtquerschnitt der Arme (diese als prismatische Körper angesehen), r den mittleren Halbmesser der Schwungringes, also (Fr) das Volumen aller Arme in Kubikcentimetern bedeuten; die Zahlenwerthe eingesetzt, erhält man: $A_1 = 26271$, also die zur Verdrehung der Welle verwendete Arbeit:

$$A_w = A - A_1 = 353340 - 26271, \text{ oder } A_w = 327069^{Kgcm}.$$

Diese Arbeit muss die Welle in sich aufnehmen können, ohne einen Bruch zu erleiden, es muss also

$$A_w = \frac{\mathfrak{S}_1^2 V}{4G}$$

sein; hieraus ist $V = \frac{4 G A_w}{\mathfrak{S}_1^2}$; wir setzen hier den Torsions-Elasticitätsmodul $G = 600000$ (für dickere Stäbe) und $\mathfrak{S}_1 = 4500^{Kg}$ (Bruchmodul für Schub bei dickeren Stäben), da im Allgemeinen anzunehmen ist, dass die Welle über die Elasticitätsgrenze hinaus angestrengt werden wird; die Zahlenwerthe eingesetzt:

$$V = \frac{4 \cdot 600000 \cdot 327069}{(4500)^2} = 38763{,}7$$

und rund $V = 38764^{cm^3}$. Wenn nun die Schwungradwelle dieses oder ein kleineres Volumen hätte, so würde sie durch die lebendige Kraft des Schwungringes bei der plötzlich eintretenden Verminderung der Winkelgeschwindigkeit der Welle um $\frac{3}{4} w$ abgedreht werden; da dieses aber nicht geschehen soll, so muss das Volumen V_1 der Welle grösser als V sein; es ist aber mit dem berechneten Durchmesser $d = 127^{mm}$ das Volumen der Welle nur:

$$\frac{l \pi d^2}{4} = \frac{200 \cdot 3{,}14}{4} (12{,}7)^2 = 25334^{cm^3},$$

daher muss die Welle in Ansehung des dynamischen Einflusses des Schwungrades stärker als 127^{mm} gemacht werden. Wir machen die Annahmen: $l = 2500^{mm}$, $d = 150^{mm}$, dadurch erhält man

$$V_1 = \frac{250 \cdot 3{,}14 \, (15)^2}{4} = 44177{,}5^{cm^3} > V.$$

Kann man die Länge l der Welle nicht vergrössern, so bleibt man selbstverständlich auf die Vergrösserung des Wellendurchmessers beschränkt. Bei dem Volumen $V_1 = 44177{,}5^{cm^3}$ tritt wohl ein Abdrehen der Welle nicht ein, da $V_1 > V$ ist, wohl aber ein Verdrehen derselben bis über die Elasticitätsgrenze hinaus; die Berechnung der hierbei stattfindenden Anstrengung der Welle (Faserspannung $\mathfrak{S}_1$) bleibe dem Fleisse des Lesers überlassen. Würde die Winkelgeschwindigkeit w der Welle plötzlich auf Null reducirt, so findet man durch die Rechnung, dass die Welle noch bei einem Volumen von 71335^{cm^3} abgedreht werden würde; es müsste also in diesem Falle, wenn der dynamische Einfluss des Schwungrades berücksichtigt werden sollte, $V > 71335^{cm^3}$ gemacht werden.

Berechnung des Durchmessers d der Welle nach der Methode der graphischen Statik. (Siehe die folgende Figur.)

$^1/_{40}$ der natürlichen Grösse.

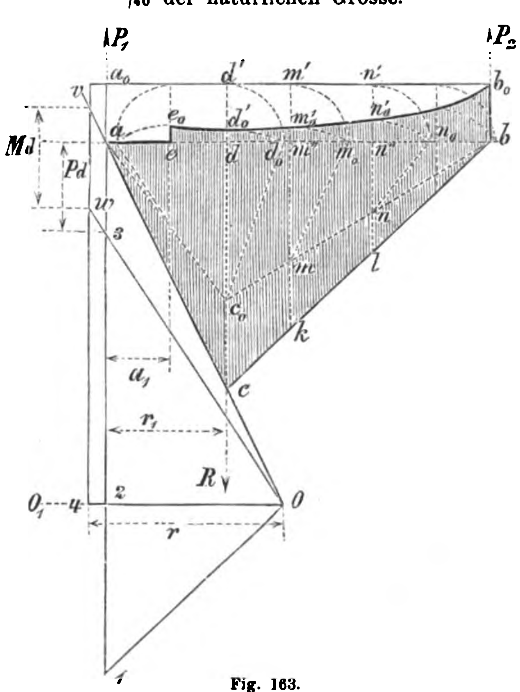


Fig. 163.

Man verzeichne für das Maximalbiegungsmoment M_b das Seilpolygon abc, indem man eine horizontale Gerade $ab = l = 2000^{mm}$ zieht, an diese unter einem beliebigen Winkel bac die Gerade ac anträgt, hierauf auf ab das Stück $ad = r_1 = 625^{mm}$, oder, wenn man das Eigengewicht der Welle nicht berücksichtigt, das Stück

$a = 600^{mm}$ aufträgt, $dc \perp ab$ zieht und b mit c verbindet. Hierauf zieht man die Gerade $a1 \perp ab$ und macht $a1 = R = 2776^{Kg}$, oder, wie in der Figur abgerundet 2780^{Kg}, indem man 1^{mm} oder einen Bruchtheil eines Millimeters $= 1^{Kg}$ setzt (hier wurde ${}^1/_{40}{}^{mm} = 1^{Kg}$ gesetzt), zieht $1,O \parallel cb$, so schneidet diese die Gerade ac im Punkte O, die Gerade $OO_1 \parallel ab$ gezogen, gibt $a,2 = P_1$, $2,1 = P_2$. Zur Verzeichnung des Drehmomentes $M_d = 429720$ zerlegen wir dieses in die zwei Factoren

$$P_d = \frac{M_d}{r} = \frac{429720}{1000} = 420{,}72^{Kg}$$

und $r = 1000^{mm}$, wir nehmen also an, der Halbmesser der Scheibe, an deren Umfange die die Welle verdrehende Kraft angreift, sei $r = 1000^{mm}$, hiermit ergibt sich der Werth der verdrehenden Kraft $P_d = 429{,}72^{Kg}$. In Wirklichkeit kann der Halbmesser r grösser oder kleiner als 1000^{mm} gemacht werden, das ändert in dem Resultate nichts ab, da das Product M_d ungeändert bleibt. Wir machen $O,4 = r = 1000^{mm}$, ziehen im Punkte 4 die Gerade $v,4 \perp ab$, machen ferner $a,3 = P_d$, ziehen die Gerade $O,3$, so ist das zwischen den Geraden aO und $3,O$ liegende Stück vw der Senkrechten $v,4$, das Torsionsmoment M_d, also $vw = M_d$. Wir machen

$$a a_0 = b b_0 = \frac{5}{8} v w,$$

ferner $c c_0 = \frac{3}{8} c d$, schlagen aus d mit dem Halbmesser dd' den Viertelkreisbogen $d' d_0$ und von c_0 aus mit dem Halbmesser $c_0 d_0$ den Kreisbogen $d_0 d'_0$, so stellt die Ordinate $c d'_0$ das ideelle biegende Moment $M_{b(i)}$ für den Punkt d der Welle dar. Zieht man die Gerade $c_0 b$ und in den beliebigen Punkten m und n derselben die Verticalen mm' und nn', hierauf von m'' und n'' aus die Viertelkreisbögen $m' m_0$, $n' n_0$ und von den Punkten m und n aus die Kreisbögen $m_0 m'_0$ und $n_0 n'_0$, so erhält man in den Schnittpunkten m'_0 und n'_0 der Kreisbögen mit den Verticalen mm' und nn' zwei Punkte, die mit den Punkten d'_0 und b_0 durch eine stetige Curve verbunden, einen Theil der Begrenzungslinie der Momentenfläche $a e e_0 d'_0 m'_0 n'_0 b_0 b c a$ darstellt, welche in ihren Ordinaten von e bis b die ideellen Biegungsmomente der Welle ab darstellt; hierbei wird angenommen, dass die Verdrehung der Welle im Punkte e beginnt, also in diesem Punkte, in der Entfernung $a_1 = ae = 360^{mm}$ vom Punkte a, die Scheibe vom Halbmesser r fest auf der Welle sitzt. Da die längste Ordinate in der ganzen Momentenfläche cd'_0 ist, so hat man auch für die Berechnung der cylindrisch zu machenden Welle diese zu benutzen, weil sie das grösste ideelle biegende Moment darstellt. Man findet $y = cd'_0 = 1360^{mm}$, die der Zapfenwurzel in a entsprechende Ordinate y_1 findet man aus dem in

grösserem Massstabe gezeichneten Seilpolygon abc (siehe graphostatische Berechnung der Axen) mit $y_1 = 80^{mm}$, daher

$$d = d_1 \sqrt[3]{\frac{y}{y_1}} = d_1 \sqrt[3]{\frac{1360}{80}},$$

oder $d = d_1 \sqrt[3]{17} = 2{,}57\, d_1$. Nach der bei den Zapfenberechnungen entwickelten Formel ist $d_1 = 1{,}13 \sqrt{P_1} = 1{,}13 \sqrt{1909} = 49{,}4^{mm}$, hiermit wird $d = 2{,}57 \,.\, 49{,}4 = 127^{mm}$, wie früher.

Anmerkung. Die Zusammensetzung der durch das Torsionsrechteck $a a_0 b b_0$ dargestellten verdrehenden Momente mit den durch die Ordinaten des Dreieckes abc dargestellten biegenden Momenten geschieht durch die Formel:

$$M_{b(i)} = \frac{3}{8} M_b + \frac{5}{8} \sqrt{M_b^2 + M_d^2},$$

nur haben wir in dieser Formel an die Stelle von M_b und M_d die entsprechenden Ordinaten zu setzen. Da $\overline{cc_0} = \frac{3}{8} \overline{cd}$, also $\overline{c_0 d} = \frac{5}{8} \overline{cd}$ und $\overline{dd'} + \overline{dd_0} = \frac{5}{8} \overline{vw} = \frac{5}{8} M_d$ gemacht wurde, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke $c_0 d_0 d$ die Hypothenuse $\overline{c_0 d_0} = \overline{c_0 d_0'} = \sqrt{\overline{c_0 d}^2 + \overline{dd_0}^2}$, oder

$$\overline{c_0 d_0'} = \sqrt{\left(\frac{5}{8} \overline{cd}\right)^2 + \left(\frac{5}{8} \overline{vw}\right)^2} = \frac{5}{8} \sqrt{\overline{cd}^2 + \overline{vw}^2},$$

daher die ganze Ordinate $\overline{cd_0'} = \overline{cc_0} + \overline{c_0 d_0'}$, oder

$$\overline{cd_0'} = y = \frac{3}{8} M_b + \frac{5}{8} \sqrt{(M_b)^2 + (M_d)^2}.$$

Ebenso erhält man in der Summe der Ordinatenstücke $\overline{km} = \frac{3}{8} \overline{km''}$ und $\overline{mm_0'} = \overline{mm_0}$, also $\overline{km} + \overline{mm_0'} = \overline{km_0'}$ das ideelle Biegungsmoment $M_{b(i)}$ für den Punkt m'' der Welle, desgleichen auch bei den Punkten e und n'' der Welle.

21. Es sind die wichtigsten Festigkeitsdimensionen einer gusseisernen Kurbel sammt dazugehöriger schmiedeiserner Gegenkurbel aus nachfolgenden Angaben zu berechnen: Die Länge der Kurbel (Kurbelradius) ist $R = 500^{mm}$, der Durchmesser der Welle, auf der die Kurbel befestigt werden soll, ist $D = 150^{mm}$; der Druck auf den Kurbelzapfen ist $P = 4000^{Kg}$, der Druck auf den Gegenkurbelzapfen ist $P_1 = 900^{Kg}$, die Länge des Gegenkurbelhalbmessers ist $R_1 = 350^{mm}$; die Entfernung von der Mitte des Kurbelzapfens bis zur Mitte des Hauptkurbelarmes ist $c = 120^{mm}$, die senkrechte Entfernung von der Mitte des Gegenkurbelzapfens bis zur Mitte des Gegenkurbelarmes ist $c_1 = 80^{mm}$. (Siehe die folgende Figur.) Die Entfernung der beiden Zapfenmittel ist $a = 300^{mm}$.

Auflösung. *a)* **Berechnung der Hauptkurbel.**

1) *Kurbelzapfen.* Wir machen die Annahme, dass die Kraft P_1 der Kraft P entgegengesetzt gerichtet sei, was bei Anwendung

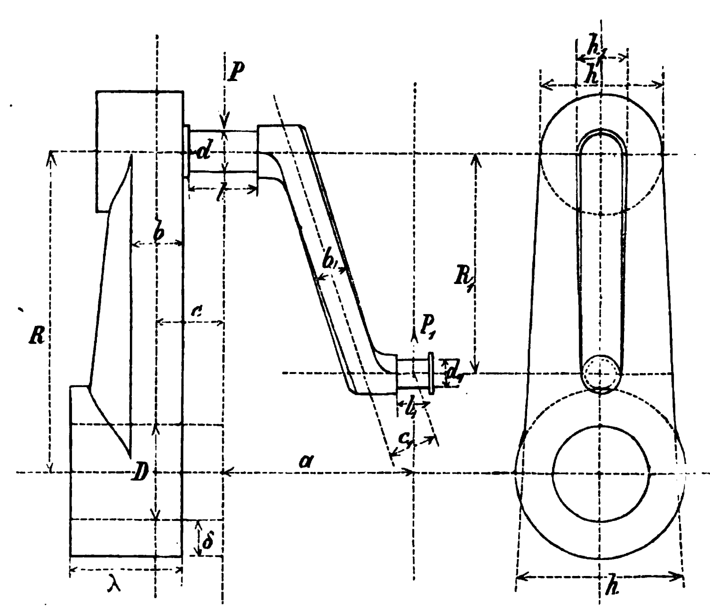


Fig. 164.

von Gegenkurbeln auch meist der Fall ist. Auf den Zapfen vom Durchmesser d wirkt daher ein Biegungsmoment:

$$M_b = P_1 \left(a + \frac{l}{2}\right) - \frac{Pl}{2}$$

und gleichzeitig aber auch ein Torsionsmoment

$$M_d = P_1 R_1;$$

es wird daher der Hauptkurbelzapfen auf seine zusammengesetzte Festigkeit beansprucht. In der Gleichung für M_b kommt noch die unbekannte Grösse l vor; um diese zu berechnen, nehmen wir an, der Hauptkurbelzapfen sei nur durch den Druck P allein beansprucht, denn die Abnützung des Zapfens ist nur von dem directen Drucke P abhängig und umgekehrt proportional der Länge des Zapfens; es wird dann der Durchmesser d nach der bei den Aufgaben über Zapfen entwickelten Formel

$$d = 1{,}13\sqrt{P} = 1{,}13\sqrt{4000} = 71{,}47$$

und rund $d = 72^{mm}$; der Formel zu Grunde liegt das Verhältniss $\frac{l}{d} = 1{,}5$, somit ist $l = 1{,}5\,d = 1{,}5 \,.\, 72 = 108^{mm}$.

In die Gleichung für M_b die Zahlenwerthe eingesetzt:

$$M_b = 900\left(300 + \frac{108}{2}\right) - \frac{4000 \,.\, 108}{2} = 102600.$$

Das Torsionsmoment ist:

$$M_d = 900 \,.\, 350 = 315000,$$

hiemit wird das ideelle biegende Moment:

$$M_{b(i)} = \frac{3}{8} M_b + \frac{5}{8}\sqrt{(M_b)^2 + (M_d)^2}, \text{ oder}$$

$$M_{b(i)} = \frac{3}{8} \,.\, 102600 + \frac{5}{8}\sqrt{(102600)^2 + (315000)^2}, \text{ oder}$$

$$M_{b(i)} = 245530.$$

Aus der Gleichung „$M_{b(i)} = \frac{\pi d^3 \mathfrak{S}}{32}$" folgt

$$d = \sqrt[3]{\frac{32\, M_{b(i)}}{\mathfrak{S}\,\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \,.\, 245530}{6 \,.\, 3{,}14}} = 59^{mm}.$$

Für den Fall, dass die Richtung der Kraft P_1 dieselbe wäre wie die der Kraft P, wäre das Biegungsmoment

$$M_b = P_1\left(a + \frac{l}{2}\right) + \frac{Pl}{2}$$

in die Rechnung einzuführen. Die Länge des Zapfens bleibt $l = 108^{mm}$.

Der Zapfendurchmesser d wurde jetzt mit 59^{mm} unter der Voraussetzung gefunden, dass beide Kräfte P und P_1 gleichzeitig wirken; es ist jedoch auch der Fall zu berücksichtigen, dass einmal nur die Hauptkurbel allein in Thätigkeit und die Gegenkurbel ausser Betrieb gesetzt ist; in diesem Falle ist dann das den Zapfen beanspruchende Biegungsmoment grösser, es ist daher für diesen Fall der Durchmesser d zu berechnen. Man erhält:

$$M_b = \frac{Pl}{2} = \frac{4000 \,.\, 108}{2} = 216000,$$

mit diesem Werthe von M_b ergibt sich:

$$M_{b(i)} = 324000 \quad \text{und} \quad d = \sqrt[3]{\frac{32\, M_{b(i)}}{\mathfrak{S}\,\pi}}, \text{ oder}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \,.\, 324000}{6 \,.\, 3{,}14}} = 65^{mm};$$

welcher Werth beizubehalten ist.

2) *Berechnung des Kurbelarmes der Hauptkurbel.* Der Kurbelarm der Hauptkurbel wird durch das Biegungsmoment $M_b = PR$ und gleichzeitig durch das Torsionsmoment $M_d = Pc$, also auf seine zusammengesetzte Festigkeit beansprucht. Das von der Kraft P_1 in Bezug auf den Arm hervorgebrachte Biegungs- und Drehmoment ist wohl von den Momenten M_b und M_d abzuziehen, allein in dem möglichen Falle, dass die Kraft P_1 am Gegenkurbelzapfen nicht wirken würde (wenn die Gegenkurbel nicht arbeitet), sind diese Abzüge nicht zu machen, in Folge dessen der Hauptkurbelarm stärker beansprucht wird. Das ideelle biegende Moment ist:

$$M_{b(i)} = \frac{3}{8} M_b + \frac{5}{8} \sqrt{M_b^2 + M_d^2},$$

oder, da man sich die Grösse $M_{b(i)}$ als ein Product aus der Kraft P und einem unbekannten Halbmesser R'' zusammengesetzt denken kann, so kann man auch schreiben:

$$PR'' = \frac{3}{8} PR + \frac{5}{8} \sqrt{(PR)^2 + (Pc)^2}, \text{ oder}$$

$$PR'' = \frac{3}{8} PR + \frac{5}{8} \sqrt{P^2 (R^2 + c^2)} = \frac{3}{8} PR + \frac{5}{8} P \sqrt{R^2 + c^2},$$

beiderseits durch P dividirt:

$$R'' = \frac{3}{8} R + \frac{5}{8} \sqrt{R^2 + c^2},$$

die Zahlenwerthe eingesetzt:

$$R'' = \frac{3}{8} . 500 + \frac{5}{8} \sqrt{(500)^2 + (120)^2} = 508{,}87$$

und rund $R'' = 509^{mm}$.

Da der Arm durch das Moment PR'' nur auf Biegung beansprucht wird, so hat man aus der Festigkeitsgleichung:

$$PR'' = \frac{b h^2 \mathfrak{S}}{6},$$

wenn man darin $b = \frac{h}{3}$ setzt:

$$PR'' = \frac{1}{6} \cdot \frac{h^3 \mathfrak{S}}{3} = \frac{h^3 \mathfrak{S}}{18}, \text{ woraus}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{18\, PR''}{\mathfrak{S}}} = \sqrt[3]{\frac{18 \cdot 4000 \cdot 509}{2,5}} = 245^{mm}$$

folgt, hiermit wird $b = \frac{h}{3} = \frac{245}{3} = 81,66$ und rund $b = 82^{mm}$.

Weil das Moment $M_{b\,(i)}$ von der Axe der Kurbel bis zum Kurbelzapfen hin stetig abnimmt, so kann man die Breite h des Armes nach dem Zapfen hin verjüngen, und zwar nimmt man bei constanter Dicke b die Armbreite h' am Zapfenende $h' = \frac{4}{5} h$; man erhält daher $h' = \frac{4}{5} \cdot 245 = 196^{mm}$; die Dicke der Mittelrippe, die wir aus der Rechnung weggelassen haben, nehme man

$$\frac{b}{2} = \frac{82}{2} = 41^{mm}.$$

3) *Berechnung der Nabenwandstärke δ der Kurbel.* Die auf der Welle festsitzende Nabe des Kurbelarmes wird durch dasselbe Moment M_d verdreht, welches die Welle auf ihre Torsionsfestigkeit beansprucht. Laut Tabelle in Aufgabe 8 der Beispiele über Torsionsfestigkeit ist der Durchmesser d der schmiedeisernen, auf Verdrehung berechneten Welle: $d = \sqrt[3]{M} = \sqrt[3]{PR}$, hieraus folgt $d^3 = M$, oder, wenn man den äusseren Durchmesser der Nabe mit d_1 bezeichnet, die Festigkeitsformel:

$$M = \mathfrak{S}\, Z = d^3, \text{ oder } d^3 = \frac{\mathfrak{S}\,\pi}{16} \left(\frac{d_1^4 - d^4}{d_1}\right),$$

hieraus ist $\frac{16\, d_1\, d^3}{\mathfrak{S}\,\pi} = d_1^4 - d^4$, diese Gleichung nach der Unbekannten d_1 geordnet:

$$d_1^4 - \frac{16\, d_1\, d^3}{\mathfrak{S}\,\pi} = d^4;$$

wir haben hier für $\mathfrak{S}$ einen verhältnissmässig geringen Werth einzusetzen, denn für den Fall, dass die Kurbel durch einen Keil auf der Welle befestigt wird, wird die Nabe nicht nur auf ihre Torsionsfestigkeit beansprucht, sondern hat auch noch der besonderen Anstrengung des Eintreibens des Keiles zu widerstehen; wir setzen daher $\mathfrak{S} = 1$ und erhalten, wenn wir obige Gleichung nach d_1 auflösen, angenähert:

$$d_1 = 1,8\, d, \text{ und da } d_1 = d - 2\,\delta$$

ist, so hat man auch: $\delta = 0{,}4\,d$, oder, den Zahlenwerth für d (der aber in der vorliegenden Aufgabe durch D bezeichnet ist) gesetzt, erhält man: $\delta = 0{,}4 \,.\, 150 = 60^{mm}$. Die Länge λ der Nabe nimmt man gewöhnlich gleich D bis $1{,}25\,D$.

Wird die Kurbel nicht durch einen Keil, sondern dadurch auf der Welle befestigt, dass die Kurbel mit rothglühender Nabe auf die Welle gebracht (warm aufgezogen) und durch die beim Erkalten des Eisens zusammenziehende Kraft der Eisenmoleküle auf die Welle gepresst wird, so lässt sich die Nabe als eine Röhre betrachten, die unter einem grossen äusseren Drucke steht und die Wandstärke δ dieser Röhre nach der diesem Falle entsprechenden Festigkeitsformel

$$\delta^{cm} = 0{,}00871\,d^{cm}\sqrt[3]{n} + c$$

berechnen. In dieser Gleichung bedeuten: d den inneren Durchmesser der Röhre, also hier den Wellendurchmesser D, n den äusseren Ueberdruck in Atmosphären, c ist eine Constante, welche für Gusseisen 4 bis 5 angenommen wird. Es ist anzunehmen, dass die Kraft, mit der die Nabe auf die Welle gepresst wird, so gross ist, wie die Schubfestigkeit des Gusseisens, d. i. 2000^{Kg} pro Quadrat-Centimeter, d. h. man brauchte, um die Verbindung zwischen Kurbelnabe und Welle im kalten Zustande zu lösen, eine Kraft gleich $\pi d \lambda K$, wenn λ die Länge der Nabe, d ihr innerer Durchmesser und K der Festigkeitsmodul des Gusseisens für Schub ist, so, als ob Nabe und Welle ein Gusseisenstück wären und aus ersterer bei der Trennung ein Cylinder von der Länge λ und dem Durchmesser d ausgescheert würde; es ist daher $n = 2000$ zu setzen; hiermit erhält man:

$$\delta = 0{,}00871 \,.\, 15\sqrt[3]{2000} + 5 = 6{,}65^{cm}, \text{ oder } \delta = 66{,}5^{mm}.$$

b) **Berechnung der Gegenkurbel.**

Der Durchmesser d_1 des Gegenkurbelzapfens ergibt sich zu

$$d_1 = 1{,}13\sqrt{P_1} = 1{,}13\sqrt{900} = 33{,}9$$

und rund $d_1 = 34^{mm}$, die Länge l_1 des Zapfens ist

$$l_1 = 1{,}5\,d_1 = 1{,}5 \,.\, 34 = 51^{mm}$$

zu machen. Die Höhe h_1 des Armes ergibt sich daraus, dass die Seiten desselben tangential an den Anlauf des Hauptkurbelzapfens gerichtet sein sollen. Es heisse die Anlaufhöhe des Hauptkurbelzapfens e, so nimmt man gewöhnlich

$$e = 3^{mm} + 0{,}04\,d = 3 + 0{,}04 \,.\, 65 = 5{,}6,$$

womit man

$$h_1 = d + 2\,e = 65 + 2 \,.\, 5{,}6 = 76{,}2,$$

oder rund $h_1 = 76^{mm}$ erhält.

Der Arm wird auf seine zusammengesetzte Festigkeit durch das Biegungsmoment $P_1 R_1$ und durch das Drehmoment $P_1 c_1$ beansprucht, daher berechnen wir ihn nach dem ideellen biegenden Momente $P_1 R'$. Wie bereits bekannt, ist der ideelle Arm

$$R' = \frac{3}{8} R_1 + \frac{5}{8} \sqrt{R_1^2 + c_1^2}, \text{ oder}$$

$$R' = \frac{3}{8} . 350 + \frac{5}{8} \sqrt{(350)^2 + (80)^2} = 356^{mm};$$

man erhält somit aus der Gleichung „$P_1 R' = \frac{b_1 h_1^2 \mathfrak{S}}{6}$“:

$$b_1 = \frac{6 P_1 R'}{h_1^2 \mathfrak{S}} = \frac{6 . 900 . 356}{(76)^2 . 6}, \text{ oder } b_1 = 55{,}5^{mm}.$$

Würde man den Durchmesser d des Hauptkurbelzapfens nach dem Biegungsmomente $P_1 a = 900 . 300 = 270000$ und nach dem Drehmomente $P_1 R_1$ berechnen, d. h. also annehmen, dass auch der Fall eintreten könnte: Der Druck P am Hauptkurbelzapfen wird gleich Null und der Gegenkurbelzapfendruck P_1 allein bleibt wirksam, so erhält man, die obige Rechnung für d noch einmal gemacht, $d = 67^{mm}$ und darnach die Armhöhe h_1 bei der Gegenkurbel $h_1 = 79^{mm}$, und die Breite $b_1 = 52^{mm}$. Selbstverständlich kann man auch die Höhe h_1 des Gegenkurbelarmes nach dem Gegenkurbelzapfen hin auf $\frac{4}{5} h_1$ verkleinern.

22. Es sind die Querschnittsdimensionen einer gekröpften Welle (Kurbelwelle) aus den nachfolgenden Angaben zu berechnen. (Siehe die folgende Figur.) Die Entfernung der beiden Lagermittel ist

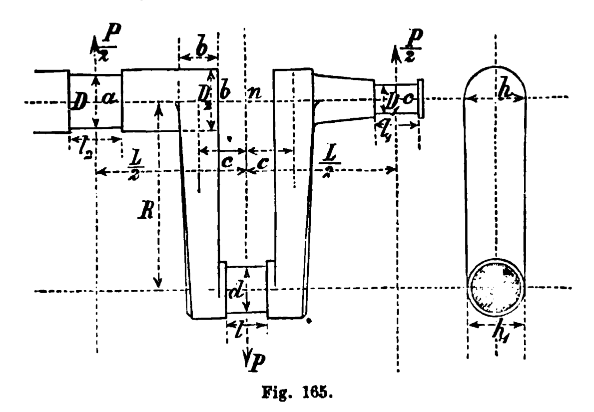


Fig. 165.

$a c = L = 800^{mm}$; an dem Kurbelzapfen vom Durchmesser d und der Länge l greift die Kraft $P = 4000^{Kg}$ an; die Richtunglinie

dieser Kraft ist von jedem der Lagermittel gleich weit entfernt, der Kurbelradius ist $R = 500^{mm}$. Die Kraft P wird nur nach einer Seite hin, hier nach links fortgeleitet; es wird hierbei angenommen, dass die Welle links von dem Kurbelzapfen in mehreren Punkten durch Lager unterstützt sei und an einem oder mehreren Punkten zwischen diesen Lagern Räder trage, von welchen aus die Kraft abgeleitet wird.

Auflösung. Berechnung des Kurbelzapfendurchmessers d. Wir nehmen zu diesem Zwecke die dem Zapfen ungünstigste Unterstützungsweise der Welle an, nämlich die, dass letztere in den Punkten a und c frei aufliege und diese Punkte die Endpunkte der Welle seien; dann ist das Biegungsmoment M_b für den Kurbelzapfen: $M_b = \frac{PL}{4}$, also dasselbe Moment, wie für den Punkt n der gerade durchgehend gedachten Welle; ausserdem aber wird der Zapfen durch das Drehmoment $\frac{P}{2} . R = \frac{4000}{2} . 500 = 1000000$ auf Torsion beansprucht, wobei $\frac{P}{2}$ die Lagerreaction im Punkte c bedeutet. Man hat also das resultirende ideelle biegende Moment:

$$M_{b(i)} = \frac{3}{8} M_b + \frac{5}{8} \sqrt{M_b^2 + M_d^2}, \text{ oder}$$

$$M_{b(i)} = \frac{3}{8} . \frac{4000 . 800}{4} + \frac{5}{8} \sqrt{(800000)^2 + (1000000)^2}, \text{ oder}$$

$$M_{b(i)} = 1100387{,}5;$$

aus der Gleichung $M_{b(i)} = \frac{\pi d^3 \mathfrak{S}}{32}$ folgt:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 M_{b(i)}}{\mathfrak{S} \pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 . 1100387{,}5}{6 . 3{,}14}} = 123^{mm}.$$

Die Länge l ist jedoch hier nicht gleich $1^1/_2\, d$ zu nehmen, sondern 1,5 von jenem Durchmesser d' eines ideellen Kurbelzapfens, welcher dem Drucke P zu widerstehen hat, d. i. also

$$d' = 1{,}13 \sqrt{P} = 1{,}13 \sqrt{4000} = 72^{mm},$$

demgemäss ist $l = 1{,}5\, d' = 1{,}5 . 72 = 108^{mm}$.

Natürlich wird es für die Abnützung des Zapfens nur günstig sein, wenn man die Länge l grösser nimmt, als die Rechnung ergibt.

Berechnung des Durchmessers D_1 des Zapfens im Punkte c der Welle. Dieser Zapfen ist nur ein einfacher Trag-

zapfen, da er blos den Druck $\frac{P}{2}$ aufzunehmen hat; man erhält daher:

$$D_1 = 1{,}13\sqrt{\frac{P}{2}} = 1{,}13\sqrt{2000} = 50{,}5 \text{ und rund } D_1 = 51^{mm}.$$

Die Länge des Zapfens wird

$$l_1 = 1{,}5\,D_1 = 1{,}5 \,.\, 51 = 76{,}5^{mm}.$$

Da die Durchmesser der Welle in den Punkten a und b, wie die Rechnung weiter unten zeigt, bedeutend stärker als D_1 sich ergeben, so wird man des Aussehens wegen den Durchmesser D_1 stärker als 51^{mm} und dem entsprechend auch die Länge l_1 ausführen.

Berechnung des Durchmessers D des Halszapfens im Punkte a der Welle. Die Welle wird in diesem Punkte auf Torsion und Biegung beansprucht; und zwar ist das Torsionsmoment offenbar:

$$M_d = PR = 4000 \,.\, 500 = 2000000.$$

Zu dem Biegungsmomente gelangt man durch folgende Erwägung: Ist die Welle ausser in den Punkten a und c links von a noch weiter durch Lager unterstützt (wie dies oben angenommen wurde), und in dem links von a liegenden Theile durch äussere Kräfte beansprucht, so ist die Welle als ein continuirlicher Balken anzusehen, d. h. als ein solcher, der in mehr als zwei Punkten unterstützt ist, daher ist die Welle im Punkte a als fest eingespannt oder eingemauert zu betrachten; wir haben daher den Fall vor uns, dass ein prismatischer Balken an einem Ende eingemauert, am anderen Ende unterstützt und in der Mitte belastet ist; für diesen Fall aber ist das Biegungsmoment im Punkte a nach der Festigkeitslehre: $M_b = \frac{3}{16} PL$, daher das ideelle Biegungsmoment:

$$M_{b(i)} = \frac{3}{8} M_b + \frac{5}{8}\sqrt{M_b^2 + M_d^2}, \text{ oder}$$

$$M_{b(i)} = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{16} PL + \frac{5}{8}\sqrt{\left(\frac{3}{16} PL\right)^2 + (PR)^2} = \frac{\mathfrak{S}\pi D^3}{32}, \text{ oder}$$

$$\frac{\mathfrak{S}\pi D^3}{32} = \frac{9\,PL}{128} + \frac{5}{8}\sqrt{\frac{9\,P^2L^2 + (16\,PR)^2}{(16)^2}}, \text{ oder}$$

$$\frac{\mathfrak{S}\pi D^3}{32} = \frac{9\,PL}{128} + \frac{5}{8} \cdot \frac{P}{16}\sqrt{9\,L^2 + (16\,R)^2}, \text{ oder}$$

$$\frac{\mathfrak{S}\,\pi\,D^3}{32} = \frac{P}{128}\left[9\,L + 5\,\sqrt{(3\,L)^2 + (16\,R)^2}\right],$$ hieraus ist

$$D = \sqrt[3]{\frac{32\,P\left[9\,L + 5\,\sqrt{(3\,L)^2 + (16\,R)^2}\right]}{128\,\mathfrak{S}\,\pi}},$$ oder

$$D = \sqrt[3]{\frac{P\left[9\,L + 5\,\sqrt{(3\,L)^2 + (16\,R)^2}\right]}{4\,\mathfrak{S}\,\pi}},$$

die Zahlenwerthe eingesetzt:

$$D = \sqrt[3]{\frac{4000\left[9\,.\,800 + 5\,\sqrt{(3\,.\,800)^2 + (16\,.\,500)^2}\right]}{4\,.\,6\,.\,3{,}14}} = 137{,}7$$

und abgerundet $D = 138^{mm}$.

Man kann jedoch diesen Werth von D auch einfacher, wie folgt, berechnen:

Wir fanden oben:

$$\frac{\mathfrak{S}\,\pi\,D^3}{32} = \frac{P}{128}\left[9\,L + 5\,\sqrt{(3\,L)^2 + (16\,R)^2}\right],$$

dividiren wir diese Gleichung durch die für den Kurbelzapfen geltende Gleichung:

$$\frac{\mathfrak{S}\,\pi\,d^3}{32} = M_{b\,(c)} = 1100387{,}5 = 0{,}34387\,.\,4000\,.\,800 = 0{,}34387\,.\,PL.$$

so erhält man:

$$\frac{D^3}{d^3} = \frac{P}{128}\left[9\,L + 5\,\sqrt{(3\,L)^2 + (16\,R)^2}\right]\frac{1}{0{,}34387\,PL},$$ oder

$$\frac{D}{d} = \sqrt[3]{\frac{9\,L + 5\,\sqrt{(3\,L)^2 + (16\,R)^2}}{0{,}34387\,.\,128\,L}},$$

die Zahlenwerthe eingesetzt:

$$\frac{D}{d} = \sqrt[3]{\frac{9\,.\,800 + 5\,\sqrt{(3\,.\,800)^2 + (16\,.\,500)^2}}{0{,}34387\,.\,128\,.\,800}} = 1{,}123;$$

hiermit erhält man:

$$D = 1{,}123\,d = 1{,}123\,.\,123 = 138^{mm}$$ wie oben.

Die Länge l_2 des Halszapfens im Punkte a der Welle bestimmt sich aus dem für das Halslager entfallenden Druck nach der Formel:

$$l_2 = 1{,}5\,D',$$

wenn D' der Durchmesser des ideellen Zapfens ist, der durch den Druck P_1 nur auf Biegung beansprucht ist, also $D' = 1,13\sqrt{P_1}$ und $l_2 = 1,5 \,.\, 1,13\sqrt{P_1}$. Der Druck P_1 resultirt aus den Kräften, die links vom Punkte a wirken und dem halben Kurbelzapfendrucke $\frac{P}{2}$; erstere kennen wir aber nicht, wir nehmen daher an, der Druck P_1 sei so gross, dass darnach $l_2 = 1,5\,D' = 138^{mm}$, d. h. ebenso gross wird, als der Durchmesser D der Welle; dem entspricht der Druck P_1 aus der Gleichung „$l_2 = 1,5 \,.\, 1,13\sqrt{P_1} = 138^{mm}$“:

$$P_1 = \left(\frac{138}{1,5 \,.\, 1,13}\right)^2 = 6626^{Kg}.$$

Da der Kurbelzapfendruck $P = 4000^{Kg}$ die Welle in Bewegung setzt und die links vom Punkte a auf der Welle sitzenden Räder oder Riemscheiben diesen in die Welle eingeleiteten Druck wieder ableiten, so ist im Allgemeinen anzunehmen, dass in keinem der Lager der Welle eine so grosse Reaction von $P_1 = 6626^{Kg}$ entstehen kann, weshalb die Länge $l_2 = D = 138^{mm}$ grösser als nothwendig ist, was aber in Ansehung der Abnützung des Zapfens bekanntlich nur günstig wirkt.

Berechnung des Durchmessers D_2 im Punkte b der Welle, wo der Kurbelarm in die Welle übergeht. In diesem Punkte wird die Welle durch das Biegungsmoment

$$M_b = \frac{P}{2}\left[\frac{L}{2} - \left(\frac{l}{2} + 2e\right)\right]$$

und gleichzeitig durch das Torsionsmoment $M_d = PR$, also auf ihre zusammengesetzte Festigkeit beansprucht. In der Gleichung für M_b bedeuten: l die Länge des Kurbelzapfens, e die Anlaufhöhe des Zapfens. Wir haben bereits gefunden: $l = 108^{mm}$, die Anlaufhöhe ist $e = 3^{mm} + 0,04d$, oder $e = 3 + 0,04 \,.\, 123 = 8^{mm}$, daher ist

$$M_b = \frac{4000}{2}\left[400 - \left(\frac{108}{2} + 16\right)\right] = 660000;$$

man hat daher aus der Gleichung

$$„\frac{\pi \mathfrak{S} D_2^3}{32} = M_{b(i)} = \frac{3}{8} M_b + \frac{5}{8}\sqrt{M_b^2 + M_d^2}“:$$

$$D_2 = \sqrt[3]{\frac{32\, M_{b(i)}}{\pi \mathfrak{S}}}, \text{ und da}$$

$$M_{b(i)} = \frac{3}{8} \,.\, 660000 + \frac{5}{8}\sqrt{(660000)^2 + (2000000)^2}.$$

oder $M_{b(i)} = 1563804$ ist, so hat man auch

$$D_2 = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1563804}{3{,}14 \cdot 6}} = 138{,}4,$$

oder rund $D_2 = 139^{mm}$. Weil aber die Welle im Punkte a mit dem für diesen Punkt ausgerechneten Durchmesser von $D = 138^{mm}$ als eingedrehter Lagerhals gewöhnlich ausgeführt wird, so wird die Welle von b bis zu diesem Lagerhalse etwas stärker als 139^{mm} auszuführen sein.

Berechnung der Kurbelarme. Der Arm, der sich im Punkte b an die Welle anschliesst, erhält im Wellenmittel eine Höhe $h = D_2$, damit sich die Seiten des Armes tangential an die Welle anschliessen. Der Arm wird durch das Biegungsmoment $PR = 4000 \cdot 500 = 2000000$ und durch das Torsionsmoment

$$M_d = \frac{P}{2}\left(\frac{L}{2} + c\right) - Pc, \text{ oder}$$

$$M_d = P\left(\frac{L + 2c}{4} - c\right) = \frac{P}{4}(L - 2c),$$

also auf seine zusammengesetzte Festigkeit beansprucht, wobei c die Entfernung des Kurbelzapfenmittels von der Armmitte (im Wellenmittel gemessen) bedeutet. Da aber die Dicke b des Armes erst zu berechnen ist, so kennt man die Grösse c noch nicht und berechnet daher vorläufig die Armdicke b nur aus dem Biegungsmomente allein nach der Formel: $PR = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{6}$, wenn der Kurbelarm den rechteckigen Querschnitt von der Dicke b und der Höhe h erhält. Aus dieser Gleichung ist

$$b = \frac{6PR}{\mathfrak{S} h^2} = \frac{6 \cdot 4000 \cdot 500}{6\,(139)^2},$$

oder $b = 103{,}4^{mm}$, hiermit erhält man:

$$c = \frac{l}{2} + 2e + \frac{b}{2} = \frac{108}{2} + 16 + \frac{103{,}4}{2} = 121{,}7^{mm}.$$

Den ideellen Kurbelarm R' findet man aus der Gleichung:

$$PR' = \frac{3}{8} PR + \frac{5}{8}\sqrt{(PR)^2 + P^2\left(\frac{L - 2c}{4}\right)^2}, \text{ oder}$$

$$PR' = \frac{3}{8} PR + \frac{5}{8} P\sqrt{R^2 + \left(\frac{L - 2c}{4}\right)^2}, \text{ oder}$$

$$R' = \frac{3}{8} R + \frac{5}{8}\sqrt{R^2 + \left(\frac{L - 2c}{4}\right)^2};$$

die Zahlenwerthe eingesetzt:

$$R' = \frac{3}{8} \,.\, 500 + \frac{5}{8}\sqrt{(500)^2 + \left(\frac{800 - 2\,.\,121{,}7}{4}\right)^2} = 511{,}7$$

und abgerundet $R' = 512^{mm}$.

Diesen Werth von R' in die Gleichung „$b = \frac{6\,PR}{\mathfrak{S}\,h^2}$“ eingesetzt:

$$b = \frac{6\,.\,4000\,.\,512}{6\,.\,(139)^2} = 106{,}5^{mm}.$$

Wir lassen diese Dicke b in gleicher Stärke bis zum Kurbelzapfen fortgehen, da es wegen der grösseren Arbeitskosten keinen Vortheil brächte, die Form der gleichen Festigkeit am Arme herzustellen. Der andere Kurbelarm, durch welchen keine Kraft fortgeleitet wird, erhält des Aussehens wegen dieselben Dimensionen, wie der eben berechnete Kurbelarm; er wird durch das Biegungsmoment $\frac{PR}{2}$ und durch das Drehmoment $\frac{P}{2}\left(\frac{L}{2} - c\right)$ beansprucht.

23. Dieselbe Aufgabe, wie in voriger Nummer, jedoch mit dem Unterschiede, dass die Welle nach beiden Seiten vom Kurbelzapfen das Torsionsmoment fortleitet.

Auflösung. Für den Kurbelzapfen nehmen wir wieder an, dass die Welle in den Punkten a und c (siehe die vorige Figur) frei aufliege und in der Mitte belastet sei, daher wird der Kurbelzapfen durch das Biegungsmoment $\frac{PL}{4}$ beansprucht und erhält man den Durchmesser d aus der Gleichung:

$$\frac{PL}{4} = \frac{\mathfrak{S}\,\pi\,d^3}{32} \quad \text{mit} \quad d = \sqrt[3]{\frac{32\,PL}{4\,\mathfrak{S}\,\pi}},$$

oder die Zahlenwerthe eingesetzt:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32\,.\,4000\,.\,800}{4\,.\,6\,.\,3{,}14}} = 110{,}8,$$

und rund $d = 111^{mm}$.

Berechnung des Durchmessers D in den Lagerstellen a und c. Da die Welle nach beiden Seiten vom Kurbelzapfen, links und rechts von a und c das Torsionsmoment PR fortleitet, so muss angenommen werden, dass die Welle in den links und rechts von a und c gelegenen Theilen von äusseren Kräften auf Biegung beansprucht wird, so, dass man sie in a und c als fest eingespannt betrachten muss; demgemäss ist die Welle in a und c durch das

Biegungsmoment $\frac{PL}{8}$, ausserdem aber noch durch die Kraft $\frac{P}{2}$ auf Verdrehung, also durch das Drehmoment $\frac{PR}{2}$, somit auf ihre zusammengesetzte Festigkeit beansprucht. Der Durchmesser D ergibt sich aus der Gleichung:

$$\frac{\pi \mathfrak{S} D^3}{32} = M_{b(i)} = \frac{3}{8} M_b + \frac{5}{8} \sqrt{M_b^2 + M_d^2}, \text{ oder}$$

$$\frac{\pi \mathfrak{S} D^3}{32} = \frac{3}{8} \cdot \frac{PL}{8} + \frac{5}{8} \sqrt{\left(\frac{PL}{8}\right)^2 + \left(\frac{PR}{2}\right)^2}, \text{ oder}$$

$$\frac{\pi \mathfrak{S} D^3}{32} = \frac{3}{64} PL + \frac{5}{8} \sqrt{\frac{P^2 (L^2 + 16 R^2)}{8^2}}, \text{ oder}$$

$$\frac{\pi \mathfrak{S} D^3}{32} = \frac{P}{64} \left[3 L + 5 \sqrt{L^2 + (4 R)^2}\right], \text{ woraus}$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot \frac{P}{64} \left[3 L + 5 \sqrt{L^2 + (4 R)^2}\right]}{\pi \mathfrak{S}}},$$

oder, die Zahlenwerthe eingesetzt,

$$M_{b(i)} = \frac{4000}{64} \left[3 \cdot 800 + 5 \sqrt{(800)^2 + (4 \cdot 500)^2}\right]$$

$$M_{b(i)} = 657813 \text{ und}$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{32 M_{b(i)}}{\pi \mathfrak{S}}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 657813}{3{,}14 \cdot 6}} = 104^{mm}$$

folgt. Die Durchmesser an den Punkten, wo die Kurbelarme in die Welle übergehen, werden ebenso stark gemacht, wie die Durchmesser in den Lagerstellen, obzwar dort ein etwas kleineres Biegungsmoment als $\frac{PL}{8}$ stattfindet, da bekanntlich das Biegungsmoment bei einem an seinen Enden eingemauerten und in der Mitte belasteten, prismatischen, stabförmigen Körper von der Mitte aus nach den beiden Endpunkten hin abnimmt, bis zu den Wendepunkten der elastischen Linie, und von diesen Punkten aus wieder zunimmt, bis zu den Befestigungsstellen, wo, absolut genommen, dasselbe Biegungsmoment stattfindet, wie in der Mitte der Länge, wo die Last angreift, was auch übrigens die graphische Darstellung der Momente deutlich zeigt.

Die Kurbelarme werden ebenso berechnet, wie in der vorigen Aufgabe. Die Höhe eines Armes, im Wellenmittel gemessen, ist $h = D = 104^{mm}$; daher ergibt sich an derselben Stelle die Dicke (siehe vorige Nummer):

$$b = \frac{3PR'}{\mathfrak{S}h^2} = \frac{3 \cdot 4000 \cdot 512}{6\,(104)^2} = 94{,}67^{mm};$$

hierbei ist angenommen, dass die Entfernung c ebenso gross ist, als in der vorigen Aufgabe, nämlich $c = 121^{mm}$, ferner, dass auf jeden Arm die Kraft $\frac{P}{2}$ kommt. Die Höhe h_1 des Armes am Kurbelzapfen ergibt sich: $h_1 = d + 2e = 111 + 16 = 127^{mm}$, wenn die Seiten des Armes an dem Anlauf des Kurbelzapfens tangiren sollen; da aber die Armhöhe h im Wellenmittel nur $h = 104^{mm}$ ist, so würde dadurch eine Form des Armes hergestellt, welche der angestrebten Form der gleichen Festigkeit geradezu zuwider laufen würde; man wird daher in diesem Falle entweder darauf verzichten müssen, die Seiten der Arme tangential an den Zapfen laufen zu lassen, oder man wird die Welle in ihrer ganzen Länge, ausgenommen die Lagerstellen, stärker als 104^{mm} machen. Im ersteren Falle lasse man die Höhe h im Wellenmittel gegen den Kurbelzapfen hin auf $\frac{4}{5}h$ abnehmen und nehme $b = 94{,}67^{mm}$ constant auf die ganze Armlänge, im letzteren Falle wird man $D = h_1$, $D = 127^{mm}$ machen, also $h = h_1$ und dafür aber die Dicke b vom Wellenmittel gegen den Kurbelzapfen hin auf $\frac{4}{5}b$ abnehmen lassen.

24. Es sind die Querschnittsdimensionen einer zweifach gekröpften Welle nach folgenden Angaben zu berechnen (siehe Fig. 166): Mittelst der zwei Kröpfungen in den Punkten m und n der Welle, in welchen zwei Schubstangen eingreifen, werden zwei Arbeitsmaschinen bewegt, welche so angeordnet sind, dass nicht beide Kurbelzapfen gleichzeitig durch die Kräfte P und Q beansprucht werden, sondern, dass einmal die Kraft $P = 3500^{Kg}$, und einmal die Kraft $Q = 2500^{Kg}$ wirkt, zu welchem Zwecke die Kurbelzapfen um 180° gegen einander verdreht angeordnet sind. Der Hub der Kurbeln ist: $R_1 = 350^{mm}$, $R_2 = 300^{mm}$.

Die Entfernung der Lagermittel von einander ist $l = 1200^{mm}$; die Entfernung der beiden Kurbelzapfenmittel ist $l_2 = 600^{mm}$, die Entfernung je eines Lagermittels vom nächsten Kurbelzapfenmittel ist $l_1 = l_3 = 300^{mm}$.

Auflösung. Berechnung des Durchmessers d der Welle im Punkte e. Dieser Zapfen ist nur ein einfacher Tragzapfen, indem er die vom Kurbelzapfendruck P herrührende Lagerreaction aufzunehmen hat; somit ist

$$d = 1,13\sqrt{P_1},$$

wenn P_1 den Lagerdruck im Punkte e bedeutet. Die Kraft P_1 findet man aus der Momentengleichung

$$„P_1\, l = P(l - l_3)“ \text{ mit } P_1 = \frac{P(l - l_3)}{l} = \frac{3500\,(1200 - 300)}{1200},$$

oder $P_1 = 2625^{Kg}$, hiermit erhält man:

$$d = 1,13\sqrt{2625} = 57,895, \text{ und rund } d = 58^{mm}.$$

Die Länge dieses Zapfens ist $l' = 1,5 \,.\, 58 = 87^{mm}$.

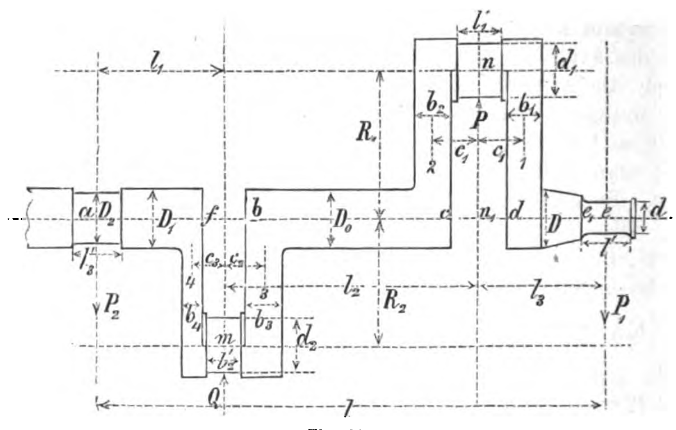


Fig. 166.

Streng genommen fällt der Durchmesser d etwas kleiner als 58^{mm} aus, denn: Wir haben bei der Berechnung des Lagerdruckes P_1 angenommen, dass die ganze Welle nur die Länge l habe, in a und e unterstützt und in n, respective in n_1 durch P^{Kg} auf Biegung beansprucht sei, allein, da die Welle links von a noch durch andere Kräfte auf Biegung beansprucht wird, so ist sie in a als fest eingespannt zu betrachten; dann ist aber nach der diesem Falle entsprechenden Festigkeitstheorie (ein stabförmiger, prismatischer Körper in horizontaler Lage an einem Ende eingespannt, am anderen Ende unterstützt)

$$P_1 = \frac{Pa^2\,(3l - a)}{2\,l^3} = \frac{3500\,(900)^2\,(3\,.\,1200 - 900)}{2\,(1200)^3}$$

(hier ist $a = l_1 + l_2 = 900^{mm}$), oder $P_1 = 2214{,}84^{Kg}$, also kleiner, als früher.

Berechnung des Durchmessers D des Wellenstückes de_1 und des Durchmessers d_1 des Kurbelzapfens in n. Die ganze Welle ae ist im Punkte a als fest eingespannt und in e als unterstützt zu betrachten, aus denselben Gründen, welche in

Aufgabe 22 bei der einfach gekröpften Kurbelwelle angegeben sind. Die Durchmesser D und d_1 sind daher nach dem grössten, in der Welle herrschenden Biegungsmomente zu berechnen, wenn die Kraft P oder Q wirkt. Denken wir uns die Welle zwischen c und d gerade durchlaufend, so herrscht, wenn die Kraft P wirksam ist, in n_1 das grösste Biegungsmoment, denn: Nach der Festigkeitstheorie dieses Falles ist das Verhältniss der Absolutwerthe der Momente M_a und M_{n_1} in den Punkten a und n_1:

$$\frac{M_a}{M_{n_1}} = \frac{l\,(a + l_3)}{a\,(2\,a + 3\,l_3)}$$

kleiner als 1, wenn $\frac{l_3}{a} < \sqrt{\frac{1}{2}}$, wobei $a = l_1 + l_2$ ist; diese letztere Ungleichheit findet aber statt, denn es ist

$$\frac{l_3}{a} = \frac{300}{900} = \frac{1}{3} < \frac{1}{1{,}4142},$$

daher ist $\frac{M_a}{M_{n_1}}$ ein echter Bruch, somit $M_{n_1} > M_a$, da nur in den Punkten a und n_1 die grössten Biegungsmomente sein können, so ist erwiesen, dass in n_1 das absolut grösste Biegungsmoment herrscht; und zwar ist

$$M_{n_1} = \frac{P a^2 l_3\,(2\,a + 3\,l_3)}{2\,l^3} = \frac{3500\,(900)^2\,300\,(2\,.\,900 + 3\,.\,300)}{2\,(1200)^3},$$

oder $M_{n_1} = 664453$. Für den Punkt d der Welle ist das Moment allerdings noch um etwas kleiner, was aber nur einen sehr geringen Einfluss auf die Bestimmung von D ausübt und deshalb vernachlässigt werden kann. Wirkt die Kraft Q allein, so ist in n_1 das Biegungsmoment $P_1\,l_3$; der Lagerdruck in e ist:

$$P_1 = \frac{Q\,l_1^2\,[2\,l_1 + 3\,(l_3 + l_2)]}{2\,l^3} = \frac{2500\,(300)^2\,[2\,.\,300 + 3\,(300 + 600)]}{2\,(1200)^3},$$

oder $P_1 = 214{,}8^{Kg}$, hiermit wird $P_1\,l_3 = 214{,}8\,.\,300 = 64440$; betrachtet man die Welle in a nicht als fest eingespannt, so ist

$$P_1 = \frac{Q\,l_1}{l} = \frac{2500\,.\,300}{1200} = 625^{Kg}$$

und darnach das Moment in n_1: $P_1\,l_3 = 625\,.\,300 = 187500$; in diesen beiden Fällen ist aber das Moment in n_1 kleiner, als bei der Wirkung der Kraft P, daher ist das oben zuerst gefundene Moment $M_{n_1} = 664453$, entsprechend der Kraft P für die Berechnung von D zu benutzen. Für das Wellenstück $d\,e_1$ hat man aus der Festigkeitsgleichung

$$„\frac{\pi \mathfrak{S} D^3}{32} = M_{n_1}\text{“}:$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{32\, M_{n_1}}{\mathfrak{S}\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \,.\, 664453}{6 \,.\, 3{,}14}} = 104^{mm}.$$

Wenn die Kraft Q allein thätig ist, dann wirkt der Widerstand im Punkte m verdrehend auf den Zapfen in n ein, und zwar mit dem Torsionsmomente

$$M_{d\,(n)} = Q\,(R_1 + R_2) = 2500 \,.\, 650 = 1625000;$$

das Biegungsmoment ist dann, wie bereits ausgerechnet wurde, (die Welle in a und e unterstützt gedacht) $M_{b\,(n)} = 187500$, also das ideelle biegende Moment

$$M_{b\,(i)} = \frac{3}{8}\, M_b + \frac{5}{8}\sqrt{M_b^2 + M_d^2}, \text{ oder}$$

$$M_{b\,(i)} = \frac{3}{8} \,.\, 187500 + \frac{5}{8}\sqrt{(187500)^2 + (1625000)^2} = 1092676.$$

Aus der Gleichung $„\frac{\mathfrak{S}\pi d_1^3}{32} = M_{b\,(i)}\text{“}$ ist

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{32\, M_{b\,(i)}}{\pi\mathfrak{S}}} = \sqrt[3]{\frac{32 \,.\, 1092676}{3{,}14 \,.\, 6}} = 123^{mm};$$

die Länge l_1' dieses Zapfens ist aus dem directen Drucke P, welchem der Zapfen ausgesetzt ist, zu berechnen. Man findet

$$l_1' = 1{,}5 \,.\, 1{,}13\sqrt{P} = 1{,}5 \,.\, 1{,}13\sqrt{3500} = 1{,}5 \,.\, 67 = 100{,}5$$

und rund $l_1' = 101^{mm}$.

Berechnung des Durchmessers D_0 des Wellenstückes bc. Dieses Wellenstück wird durch das im Punkte n_1 herrschende Biegungsmoment $M_{n_1} = 664453$ und durch das Torsionsmoment $PR_1 = 3500 \,.\, 350 = 1225000$ beansprucht, ist daher aus dem ideellen Biegungsmomente

$$M_{b\,(i)} = \frac{3}{8}\, M_b + \frac{5}{8}\sqrt{M_b^2 + M_d^2}, \text{ oder}$$

$$M_{b\,(i)} = \frac{3}{8} \,.\, 664453 + \frac{5}{8}\sqrt{(664453)^2 + (1225000)^2} = 1120170$$

zu berechnen. Man erhält aus der Gleichung $„\frac{\mathfrak{S}\pi D_0^3}{32} = M_{b\,(i)}\text{“}$:

$$D_0 = \sqrt[3]{\frac{32\, M_{b\,(i)}}{\mathfrak{S}\pi}}, \text{ oder } D_0 = \sqrt[3]{\frac{32 \,.\, 1120170}{6 \,.\, 3{,}14}} = 124^{mm}.$$

Berechnung des Durchmessers d_2 des Kurbelzapfens im Punkte m. Dieser Zapfen wird, wenn die Kraft P wirkt, durch ein Biegungsmoment

$$M_b = P_2 l_1 = \frac{P l_3}{l} . l_1 = \frac{3500 . 300}{1200} . 300 = 875 . 300,$$

oder $M_b = 262500$ und durch ein Torsionsmoment

$$M_d = P(R_1 + R_2) = 3500 (350 + 300) = 2275000$$

beansprucht; P_2 ist der Lagerdruck in a, hierbei ist angenommen, dass die Welle a und e unterstützt ist. Dass in diesem Torsionsmoment der Arm die Länge $(R_1 + R_2)$ hat, rührt daher, dass der Zapfen d_2 bei seiner Bewegung während der Wirkung der Kraft P durch den von dieser Kraft herrührenden Widerstand verdreht wird. Es ist $P_2 l = P l_3$, woraus $P_2 = \frac{P l_3}{l} = \frac{3500 . 300}{1200} = 875^{Kg}$ folgt. Das ideelle biegende Moment $M_{b(i)}$, das aus den beiden Momenten M_b und M_d resultirt, ist:

$$M_{b(i)} = \frac{3}{8} . 262500 + \frac{5}{8} \sqrt{(262500)^2 + (2275000)^2} = 1529750.$$

Wirkt die Kraft Q, so wird der Zapfen d_2 nur durch das Biegungsmoment $P_2 l_1$ allein beansprucht, wobei P_2 den in diesem Falle in a vorhandenen Lagerdruck bedeutet (in a eine einfache Unterstützung gedacht). Aus der Gleichung „$P_2 l = Q (l_3 + l_2)$“ ist $P_2 = \frac{Q (l_3 + l_2)}{l}$, oder $P_2 = \frac{2500 (300 + 600)}{1200} = 1875$, daher das Moment $P_2 l_1 = 1875 . 300 = 562500$; da aber das resultirende Moment $M_{b(i)}$ noch grösser als dieses Biegungsmoment ist, so ist d_2 aus dem grösseren Momente $M_{b(i)}$ zu bestimmen. Man erhält aus der Gleichung

$$„\frac{\pi}{32} \mathfrak{S} d_2^3 = M_{b(i)}“:$$

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{32 M_{b(i)}}{\mathfrak{S} \pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 . 1529750}{6 . 3,14}} = 138^{mm}.$$

Die Länge l_2' dieses Zapfens wird: $l_2' = 1,5 . 1,13 \sqrt{2500} = 85^{mm}$, also entsprechend einer ideellen Zapfendicke $d_2' = 1,13 \sqrt{Q}$. Wird die Welle in a als fest eingespannt und in e als unterstützt betrachtet, was auch, streng genommen, das Richtige ist, so wird, wenn die Kraft P wirkt, der Kurbelzapfen d_2 beansprucht durch das Biegungsmoment $M_b = P l_2 - P_1 (l_2 + l_3)$ und durch das Torsionsmoment $M_d = P(R_1 + R_2)$; es ist aber nach der Festigkeitslehre:

$$P_1 = \frac{P(l_1 + l_2)^2 \left[3\,l - (l_1 + l_2)\right]}{2\,l^3}, \text{ oder}$$

$$P_1 = \frac{3500\,(300 + 600)^2 \left[3 \,.\, 1200 - (300 + 600)\right]}{2\,(1200)^3} = 2214{,}84^{Kg},$$

daher $M_b = 3500 \,.\, 600 - 2214{,}84\,(600 + 300) = 106644$; es ergibt sich also jetzt dieses Moment um $262500 - 106644 = 155856$ kleiner, als früher (bei der Annahme der einfachen Unterstützung der Welle in a und e). Aus diesem kleineren Biegungsmomente und dem Torsionsmomente $P(R_1 + R_2)$ resultirt $M_{b(i)} = 1431652{,}5$, womit sich der Durchmesser $d_2 = 134^{mm}$ ergibt, welches Mass zur Ausführung zu benutzen sein wird.

Berechnung des Durchmessers D_2 im Punkte a der Welle. Für die Berechnung dieses Durchmessers nehmen wir wieder an, dass die Welle in a fest eingespannt und in e unterstützt sei. Wirkt die Kraft P allein, so ist das den Querschnitt in a beanspruchende Biegungsmoment: $M_b = Pa - P_1\,l$, wobei $a = l_1 + l_2$ ist.

Es ist aber $P_1 = \frac{Pa^2\,(3\,l - a)}{2\,l^3}$, daher

$$M_b = Pa - \frac{Pa^2\,(3\,l - a)\,l}{2\,l^3} = \frac{2\,l^3 Pa - Pa^2 l\,(3\,l - a)}{2\,l^3}, \text{ oder}$$

$$M_b = \frac{Pa\left[2\,l^2 - a\,(3\,l - a)\right]}{2\,l^2} = \frac{Pa\,(l - a)\,(2\,l - a)}{2\,l^2};$$

die Zahlenwerthe eingesetzt:

$$M_b = \frac{3500 \,.\, 900\,(1200 - 900)\,(2 \,.\, 1200 - 900)}{2\,(1200)^2} = 492187{,}5.$$

Gleichzeitig mit diesem Biegungsmomente wirkt auf den Querschnitt in a auch ein Torsionsmoment $M_d = PR_1 = 3500 \,.\, 350$, oder $M_d = 1225000$. Wirkt die Kraft Q allein, so wird der Querschnitt in a beansprucht durch das Biegungsmoment

$$M'_b = \frac{Qa'\,(l - a')\,(2\,l - a')}{2\,l^2} = \frac{2500 \,.\, 300\,(1200 - 300)\,(2400 - 300)}{2\,(1200)^2},$$

oder $M'_b = 492187{,}5$, und durch das Drehmoment

$$M'_d = QR_2 = 2500 \,.\, 300 = 750000;$$

da also, wenn die Kraft Q wirkt, das Drehmoment kleiner ist. als bei der Wirkung der Kraft P, so ist der erstere Fall zur Querschnittsberechnung zu benutzen. Das aus M_b und M_d bei der Wirkung der Kraft P resultirende ideelle biegende Moment ist:

$$M_{b(i)} = \frac{3}{8} M_b + \frac{5}{8} \sqrt{M_b^2 + M_d^2}, \text{ oder}$$

$$M_{b(i)} = \frac{3}{8} . 492187,5 + \frac{5}{8} \sqrt{(492187,5)^2 + (1225000)^2}, \text{ oder}$$

$$M_{b(i)} = 1009682,5;$$

hiermit erhält man aus der Gleichung

$$„\frac{\mathfrak{S} \pi D_2^3}{32} = M_{b(i)}“:$$

$$D_2 = \sqrt[3]{\frac{32 M_{b(i)}}{\mathfrak{S} \pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 . 1009682,5}{6 . 3,14}} = 120^{mm}.$$

Die Länge l_2' dieser Lagerstelle wird gleich D_2 gemacht, und zwar aus denselben Gründen, welche in der vorigen Aufgabe bei Bestimmung der Länge des Halszapfens der einfach gekröpften Kurbelwelle angegeben sind; also $l_3' = 120^{mm}$.

Berechnung der Kurbelarme. Kurbelarm 2. Der Kurbelarm 2 wird durch das Biegungsmoment

$$M_b = PR_1 = 3500 . 350 = 1225000$$

und durch das Torsionsmoment $M_d = P_1 (l_3 + c_1) - Pc_1$ beansprucht, hierbei ist c_1 die Entfernung des Punktes n_1 von der Mitte des Armes, also der Hebelarm der verdrehenden Kraft P. Da die Dicke b_2 des Armes erst berechnet werden soll, so kennt man c_1 noch nicht; wir berechnen daher die vorläufige Armdicke aus dem Biegungsmomente allein und erhalten aus der Gleichung

$$„PR_1 = \frac{b_2 h_2^2 \mathfrak{S}}{6}“$$

(einen rechteckigen Armquerschnitt vorausgesetzt) die Armdicke

$$b_2 = \frac{6 PR_1}{\mathfrak{S} h_2^2},$$

die Armhöhe h_2 an der Welle ist gleich dem Durchmesser der Welle an dieser Stelle zu setzen, also $h_2 = D_0 = 124^{mm}$, hiermit erhält man, in die Gleichung für b_2 die Zahlenwerthe eingesetzt:

$$b = \frac{6 . 3500 . 350}{6 (124)^2} = 79,6$$

und abgerundet $b = 80^{mm}$.

Die Anlaufhöhe e_1 des Zapfens d_1 ist:

$$e_1 = 3 + 0,04 d_1 = 3 + 0,04 . 123 = 8^{mm}, \text{ daher}$$

$$c_1 = \frac{l_1'}{2} + 2 e_1 + \frac{b_2}{2} = \frac{101}{2} + 2 . 8 + \frac{80}{2} = 110^{mm}.$$

Wenn auch bei der Ausführung der Welle diese Dimension c_1 etwas grösser oder kleiner genommen werden sollte, so thut das der Berechnung von b_2 keinen Eintrag. Der Lagerdruck P_1 in e wurde bereits gefunden mit $P_1 = 2214{,}84^{Kg}$, die Zahlenwerthe in die Gleichung für M_d eingesetzt:

$$M_d = 2214{,}84\,(300 + 110) - 3500\,.\,110 = 523150, \text{ oder}$$

$$M_d = 3500\,.\,149{,}47 = 149{,}47\,P,$$

es wurde also die Zahl 523150 in die zwei Factoren $P = 3500$ und einen ideellen Arm $R_1'' = 149{,}47^{mm}$ zerlegt. Aus den Momenten M_b und M_d folgt das resultirende, ideelle biegende Moment:

$$P R_1' = \frac{3}{8} P R_1 + \frac{5}{8} \sqrt{P^2 R_1^2 + P^2 (R_1'')^2}, \text{ oder}$$

$$P R_1' = \frac{3}{8} P R_1 + \frac{5}{8} P \sqrt{R_1^2 + (R_1'')^2}, \text{ oder}$$

$$R_1' = \frac{3}{8} R_1 + \frac{5}{8} \sqrt{R_1^2 + (R_1'')^2},$$

die Zahlenwerthe eingesetzt:

$$R_1' = \frac{3}{8}\,.\,350 + \frac{5}{8} \sqrt{(350)^2 + (149{,}47)^2} = 369^{mm};$$

hiermit erhält man den corrigirten Werth der Armdicke

$$b_2 = \frac{6 P R_1'}{\mathfrak{S}\, h_2^2} = \frac{6\,.\,3500\,.\,369}{6\,.\,(124)^2} = 84^{mm}.$$

Die Höhe h_2' des Armes am Zapfen mache man gleich der Höhe h_2 des Armes an der Welle, also $h_2' = h_2 = D_0 = 124^{mm}$.

Der Kurbelarm 1 erhält des Aussehens wegen dieselben Dimensionen, wie der Arm 2, auf seine Festigkeit berechnet, würde er weit schwächer ausfallen, als Arm 2.

Berechnung des Kurbelarmes 3. Dieser Arm hat offenbar bei der Wirkung der Kraft P das grösste Biegungsmoment, nämlich

$$M_b = P (R_1 + R_2) = 3500\,(350 + 300) = 2275000$$

auszuhalten; gleichzeitig wird derselbe aber auch durch ein Drehmoment

$$M_d = P_1\,(l_3 + l_2 - c_2) - P\,(l_2 - c_2)$$

beansprucht. Da die Armdicke b_3 erst berechnet werden soll, so kann man die Entfernung c_2 des Kurbelzapfenmittels d_2 von der Mitte des Armes 3 noch nicht angeben; wir berechnen daher einen angenäherten Werth von b_3 aus dem Biegungsmomente allein und

erhalten aus der Gleichung „$P(R_1 + R_2) = \frac{b_3 h_3^2 \mathfrak{S}}{6}$" (einen rechteckigen Armquerschnitt vorausgesetzt):

$$b_3 = \frac{6 P(R_1 + R_2)}{h_3^2 \mathfrak{S}};$$

die Höhe h_3 des Armes, da wo sich dieser an den Zapfen d_2 anschliesst, nehmen wir $h_3 = d_2 + 2e_2$, die Anlaufhöhe e_2 am Zapfen d_2 ist:

$$e_2 = 3 + 0{,}04\, d_2 = 3 + 0{,}04 \,.\, 138 = 8{,}5^{mm},$$

hiermit erhält man

$$h_3 = 138 + 2 \,.\, 8{,}5 = 155^{mm};$$

diesen Werth von h_3 sowie die übrigen Zahlenwerthe in die Gleichung für b_3 eingesetzt:

$$b_3 = \frac{6 \,.\, 3500\,(350 + 300)}{(155)^2 \,.\, 6} = 94{,}79$$

und abgerundet $b_3 = 95^{mm}$. Mit diesem Werthe von b_3 erhält man:

$$c_2 = \frac{l_2'}{2} + 2e_2 + \frac{b_3}{2} = \frac{85}{2} + 2 \,.\, 8{,}5 + \frac{95}{2} = 110^{mm}.$$

Diesen Werth von c_2 in die Gleichung für M_d, sowie auch für die übrigen in derselben vorkommenden Buchstabengrössen die Zahlenwerthe eingesetzt:

$$M_d = 2215\,(300 + 600 - 110) - 3500\,(600 - 110) = 34850.$$

Die Lagerreaction $P_1 = 2215$ im Punkte e wurde bereits früher unter der Annahme ausgerechnet, dass die Welle in a fest eingespannt und in e unterstützt ist. Aus den Momenten M_b und M_d folgt, wenn wir $R_1 + R_2 = \rho$ setzen:

$$M_{b\,(i)} = P\rho' = \frac{3}{8} P\rho + \frac{5}{8}\sqrt{P^2\rho^2 + (M_d)^2};$$

es ist aber

$$M_d = 34850 = 3500 \,.\, 9{,}957 = 9{,}957\, P = \rho''\, P, \text{ daher}$$

$$M_{b\,(i)} = P\rho' = \frac{3}{8} P\rho + \frac{5}{8}\sqrt{P^2\rho^2 + P^2(\rho'')^2}, \text{ oder}$$

$$P\rho' = \frac{3}{8} P\rho + \frac{5}{8}\sqrt{P^2(\rho^2 + \rho''^2)}, \text{ oder}$$

$$\rho' = \frac{3}{8}\rho + \frac{5}{8}\sqrt{\rho^2 + \rho''^2};$$

die Zahlenwerthe eingesetzt:

$$\rho' = \frac{3}{8}(350 + 300) + \frac{5}{8}\sqrt{(350 + 300)^2 + (9{,}957)^2} = 650{,}07^{mm};$$

man sieht, dass hier das Drehmoment nur von sehr geringem Einflusse auf den Arm ρ ist, da der ideelle Arm ρ' nur um $0{,}07^{mm}$ grösser als ρ ist. Man erhält nun die Armdicke b_3:

$$b_3 = \frac{6 P \rho'}{h_3^2 \mathfrak{S}} = \frac{6 . 3500 . 650{,}07}{(155)^2 . 6} = 94{,}8^{mm}$$

und abgerundet $b_3 = 95^{mm}$.

Berechnung des Kurbelarmes 4. Dieser Arm wird durch das Biegungsmoment $M_b = Q R_2 = 2500 . 300 = 750000$ und durch das Torsionsmoment $M_d = P_1' (l_3 + l_2 + c_3) - Q c_3$ beansprucht; hierbei bedeuten: P_1' den Lagerdruck in e, wenn die Kraft Q allein wirkt, c_3 die Entfernung des Zapfenmittels d_2 von der Mitte des Armes 4. Da der Wellendurchmesser D_2 im Lagerhals a 120^{mm} ist, so wird der Durchmesser D_1 der unmittelbar angrenzenden Wellentheile um die doppelte Anlaufhöhe, also um $2 e_3$ grösser zu machen sein; es ist

$$e_3 = 3 + 0{,}04\, D_2 = 3 + 0{,}04 . 120 = 7{,}8, \text{ also}$$

$$2\, e_3 = 15{,}6 \text{ und rund } 2\, e_3 = 16^{mm}, \text{ daher}$$

$$D_1 = D_2 + 2\, e_3 = 120 + 16 = 136^{mm};$$

selbstverständlich kann man auch statt des Eindrehens des Lagerhalses einen Stellring zur Verhinderung der Verschiebung der Welle im Lager anwenden, wodurch dann das Wellenstück von a bis f durchaus $= D_2 = 120^{mm}$ wird. Die Armhöhe h_4 an der Welle ergibt sich nun $h_4 = D_1 = 136^{mm}$; hiermit erhält man aus der Gleichung „$Q R_2 = \frac{b_4 h_4^2 \mathfrak{S}}{6}$" die vorläufige Armdicke:

$$b_4 = \frac{6\, Q R_2}{h_4^2 \mathfrak{S}} = \frac{6 . 2500 . 300}{(136)^2 . 6} = 40{,}5^{mm}.$$

Die Anlaufhöhe e_2 des Zapfens d_2 wurde bereits mit $e_2 = 8{,}5^{mm}$ gefunden, daher

$$c_3 = \frac{l_2'}{2} + 2\, e_2 + \frac{b_4}{2} = \frac{85}{2} + 2 . 8{,}5 + \frac{40{,}5}{2} = 80^{mm}.$$

Der Lagerdruck P_1' wurde bereits mit $P_1' = 214{,}8$ und rund $P_1' = 215^{Kg}$ gefunden, daher

$$M_d = 215\,(300 + 600 + 80) - 2500 . 80, \text{ oder}$$

$$M_d = 10700;$$

wir setzen

$$M_d = 10700 = 2500 \,.\, 4{,}28, \text{ oder } M_d = 4{,}28\, Q = r\, Q,$$

d. h. also, wir haben das Drehmoment M_d in die zwei Factoren Q und den ideellen Arm $r = 4{,}28^{mm}$ zerlegt. Aus M_b und M_d resultirt, wie bereits früher erörtert wurde, der ideelle Arm

$$R_2' = \frac{3}{8} R_2 + \frac{5}{8} \sqrt{R_2^2 + r^2} = \frac{3}{8} \,.\, 300 + \frac{5}{8} \sqrt{(300)^2 + (4{,}28)^2},$$

oder $R_2' = 300{,}022^{mm}$, hiermit erhält man die Armdicke an der Welle:

$$b_4 = \frac{6\, Q\, R_2'}{h_4^2\, \mathfrak{S}} = \frac{6 \,.\, 2500 \,.\, 300{,}022}{(136)^2 \,.\, 6} = 40{,}552$$

und rund $b_4 = 41^{mm}$. Nimmt man jedoch die Armhöhe $h_4 = D_2 = 120^{mm}$, so wird die zugehörige Breite $b_4 = 52^{mm}$.

Die Herstellungsart der Welle wird bedingen, ob man den Kurbelarm 4 mit dieser Dicke von 41 resp. 52^{mm} oder stärker ausführen wird. Die Höhe h_4' des Armes am Zapfen d_2 wird man entweder gleich $h_4 = 136$, oder wegen der Gleichheit des Aussehens mit Kurbelarm 3 gleich $h_3 = 155^{mm}$ machen.

Die Anwendung der graphostatischen Methode zur Berechnung von Kurbeln und Kurbelaxen führt einfacher und schneller zum Ziele, als die analytische Methode. Da in dem Werke „Der Constructeur" von Reuleaux die Aufgaben über Kurbeln und gekröpfte Wellen graphostatisch sehr ausführlich und klar behandelt sind, so sei hier auf das genannte Werk verwiesen.

25. Es ist der stärkst beanspruchte Querschnitt des gusseisernen hohlen Gestelles einer Stossmaschine zu berechnen, wenn der von dem Widerstande des Werkzeuges herrührende Druck $P = 4500^{Kg}$ ist. (Siehe nebenstehende Figur.) Die Entfernung der Kraftrichtung von dem Schwerpunkte des stärkst beanspruchten Querschnittes ist $l = 750^{mm}$.

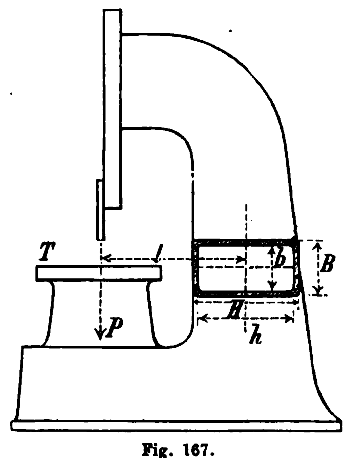


Fig. 167.

Auflösung. Die stärkste Beanspruchung des Gestelles findet ungefähr in der Höhe des Tisches T statt. Der Querschnitt des Gestelles sei an dieser Stelle ein hohles Rechteck; wir nehmen die Dimensionen desselben vorläufig wie folgt an: $B = 270^{mm}$, $H = 400^{mm}$, $b = 210^{mm}$, $h = 340^{mm}$.

Das Gestell ist in Folge der excentrisch wirkenden Kraft P auf seine zusammengesetzte Festigkeit beansprucht. Nach der Lehre vom excentrischen Zuge oder Drucke ist die Tragkraft

$$P = \frac{\mathfrak{S} f J}{J + acf} = \frac{\mathfrak{S} f}{1 + \frac{acf}{J}} = \frac{\mathfrak{S} f}{1 + \frac{af}{Z}},$$

diese Gleichung nach $\mathfrak{S}$ aufgelöst:

$$\mathfrak{S} = \frac{PZ + Paf}{fZ},$$

und da $Pa = M$, oder wegen $a = l$ auch $Pl = M$, gleich dem Biegungsmomente ist, so hat man auch:

$$\mathfrak{S} = \frac{PZ + Mf}{fZ} = \frac{P}{f} + \frac{M}{Z}.$$

Wir berechnen aus den gegebenen und angenommenen Daten diese beiden Quotienten und erfahren dadurch den Werth von $\mathfrak{S}$; kommt dieser zu gross oder zu klein heraus, so machen wir bei den Querschnittsdimensionen andere Annahmen.

$$\text{Es ist } Z = \frac{J}{c} = \frac{1}{12}\left(\frac{270\,(400)^3 - 210\,(340)^3}{200}\right),$$

$$Z = 3760900.$$

Der Flächeninhalt f des Querschnittes ist:

$$f = BH - bh = 270 \,.\, 400 - 210 \,.\, 340 = 36600,$$

das Maximalmoment, welches das Gestell beansprucht, ist:

$$M = Pl = 4500 \,.\, 750 = 3375000;$$

hiermit erhält man:

$$\mathfrak{S} = \frac{3375000}{3760900} + \frac{4500}{36600} = 1{,}02^{Kg},$$

eine Beanspruchung, die offenbar eine genügende Sicherheit gegen Bruch gewährt. Diese Art der Berechnung der Querschnittsdimensionen durch directe Annahme derselben und nachherige probeweise Ausrechnung der Beanspruchung $\mathfrak{S}$ (die ja keinen ganz genau bestimmten Werth darzustellen braucht) ist viel einfacher und führt in den meisten Fällen schneller zum Ziele, als die directe Auflösung einer Gleichung dritten oder vierten Grades, die man hier aus der Gleichung für die Tragkraft P durch Annahme von Verhältnisswerthen zwischen den Unbekannten B, H, b und h erhalten hätte.

26. Es ist für eine Lochmaschine eine schmiedeiserne Axe nach folgenden Angaben zu berechnen: Die Axe ist in den Punkten A und B (siehe die folgende Figur) gelagert, trägt im Punkte C eine

Belastung $P_2 = 800^{Kg}$, herrührend von Rädern; im Punkte D hat die Axe an einem um $e = 40^{mm}$ excentrisch gegen die Axe stehenden Zapfen einen aufwärts gerichteten Druck von $P_4 = 2500^{Kg}$ auszuhalten. Die Entfernung der Lagermittel ist 400^{mm}; die Entfernung des Angriffspunktes der Kraft P_2 vom Punkte A ist 150^{mm}, die Entfernung des Angriffspunktes der Kraft P_4 vom Punkte B ist 120^{mm}.

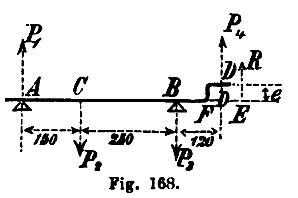


Fig. 168.

Auflösung. Es handelt sich zunächst um die Bestimmung der Lagerdrücke P_1 und P_3 in den Punkten A und B. Zu diesem Zwecke setzen wir die Kräfte P_2 und P_4 zu einer Resultirenden zusammen; diese greift im Punkte E an und hat eine Grösse:

$$R = P_4 - P_2, \text{ oder } R = 2500 - 800 = 1700^{Kg}.$$

Die Entfernung DE (die man hier zur Rechnung aber nicht braucht) findet man aus der Gleichung:

$$800 \,.\, 370 = 1700\, DE, \text{ woraus}$$

$$DE = 174{,}117^{mm} \text{ folgt.}$$

Die Kraft R zerlegen wir wieder in die parallelen Componenten P_1' und P_3' (siehe die folgende Figur), angreifend in den Punkten A und B. Zur Herstellung des Gleichgewichtes, resp. zur Aufnahme dieser Kräfte dienen die Unterstützungen (Lager) in A und B, stellen also zwei Kräfte dar, welche den Kräften P_1' und P_3' entgegenwirken und dadurch das Gleichgewicht herstellen; es wirkt also die Kraft P_1 nach aufwärts, die Kraft P_3 nach abwärts. Für das Gleichgewicht findet die Gleichung statt:

Fig. 169.

$$400\, P_1 = 2500 \,.\, 120 + 800 \,.\, 250, \text{ woraus}$$

$$P_1 = \frac{2500 \,.\, 120 + 800 \,.\, 250}{400} = 1250^{Kg}$$

folgt; es ist ferner

$$P_3 = R + P_1 = 1700 + 1250, \text{ oder } P_3 = 2950^{Kg}.$$

Im Punkte C findet das Biegungsmoment statt:

$$M_b = 1250 \,.\, 150 = 187500,$$

im Punkte B ist das Biegungsmoment:

$$M_b' = 2500 \,.\, 120 = 300000;$$

vom Punkte C angefangen ist die Axe bis zum Punkte F auf Torsion beansprucht durch das Drehmoment:

$$M_d = 2500 \,.\, 40 = 100000,$$

weil in C die Kraft in die Axe eingeleitet und bei D wieder abgegeben wird; es ist also im Punkte C ein resultirendes ideelles, biegendes Moment:

$$M_{b\,(i)} = \frac{3}{8}\,M_b + \frac{5}{8}\sqrt{M_b^2 + M_d^2}, \text{ oder,}$$

weil $M_b > M_d$ ist, kann man angenähert setzen:

$$M_{b\,(i)} = M_b + \frac{M_d}{4} = 187500 + \frac{100000}{4}, \text{ oder}$$

$$M_{b\,(i)} = 212500.$$

Im Punkte B ist das resultirende, ideelle, biegende Moment

$$M'_{b\,(i)} = 300000 + \frac{100000}{4} = 325000.$$

Hiernach bestimmen sich die Durchmesser der Axe, wie folgt: (Siehe die folgende Figur.) Der Durchmesser d_1 des Tragzapfens in A findet sich aus der Gleichung:

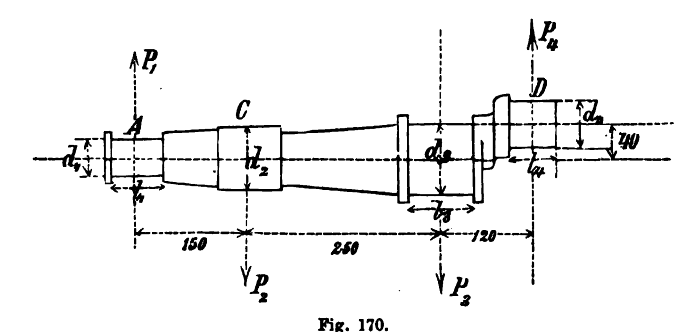


Fig. 170.

$$\frac{P_1\,l_1}{2} = \frac{\mathfrak{S}\,\pi\,d_1^3}{32} \text{ mit } d_1 = \sqrt{\frac{16\,P_1}{\pi\,\mathfrak{S}}\left(\frac{l_1}{d_1}\right)},$$

wir setzen $\mathfrak{S} = 4$, $\dfrac{l_1}{d_1} = 1{,}4$, dann ist

$$d_1 = 1{,}33\sqrt{P_1} = 1{,}33\sqrt{1250} = 47^{mm},$$

$$l_1 = 1{,}14 \,.\, 47 = 66^{mm}.$$

Der Durchmesser d_2 des Axkopfes in C findet sich aus der Gleichung:

$$M_{b\,(i)} = \frac{\mathfrak{S}\,\pi\,d_2^3}{32} \text{ mit } d_2 = \sqrt[3]{\frac{32\,M_{b\,(i)}}{\mathfrak{S}\,\pi}},$$

oder die Zahlenwerthe eingesetzt:

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{32 \,.\, 212500}{4 \,.\, 3{,}14}} = 81^{mm}.$$

Der Durchmesser d_3 im Halslager findet sich aus der Gleichung:

$$M'_{b\,(i)} = \frac{\mathfrak{S}\,\pi\,d_3^3}{32} \text{ mit } d_3 = \sqrt[3]{\frac{32\,M'_{b\,(i)}}{\mathfrak{S}\,\pi}}, \text{ oder}$$

$$d_3 = \sqrt[3]{\frac{32 \,.\, 325000}{4 \,.\, 3{,}14}} = 93^{mm}, \quad l_3 = d_3 = 93^{mm}.$$

Der Durchmesser d_4 des excentrischen Zapfens in D ist:

$$d_4 = \sqrt{\frac{16\,P_4}{\mathfrak{S}\,\pi}\left(\frac{l_4}{d_4}\right)},$$

wir setzen $l_4 = d_4$, $\mathfrak{S} = 4$, $P_4 = 2500$ ein und erhalten

$$d_4 = \sqrt{\frac{16 \,.\, 2500}{4 \,.\, 3{,}14}} = 56^{mm}, \text{ also } l_4 = 56^{mm}.$$

27. Wie gross ist der Zugwiderstand Q, welcher vermittelst einer schmiedeisernen, flachgängigen Schraube in der Richtung ihrer Axe durch eine Kraft P überwunden werden kann, wenn diese Kraft an einem Hebelarm $R = 500^{mm}$ wirkt, der Halbmesser des Schraubenkernes $r = 50^{mm}$ ist und die Reibung in den Gewindegängen, sowie die durch die Kraft P hervorgebrachte Torsionswirkung auf die Schraube zu berücksichtigen ist; man fragt ferner: Wie gross ist die zur Ueberwindung des Widerstandes Q anzuwendende Kraft P?

Auflösung. Es ist zunächst einleuchtend, dass die Grösse des zu überwindenden Widerstandes abhängig sein wird von der Grösse der Querschnittsfläche des Schraubenkernes und von dem durch die Kraft P ausgeübten Torsionsmomente $M_d = PR$. Zur arithmetischen Darstellung dieser Abhängigkeit erscheint es also nöthig, eine Festigkeitsgleichung aufzustellen, welche die durch die Kraft P hervorgebrachte Zug- und Torsionswirkung (vorläufig ohne Berücksichtigung der Reibung) auf die Schraube, im Zusammenhange mit dem Querschnitte des Schraubenkernes darstellt, d. h. mit anderen Worten, es ist die Schraube auf ihre Zug- und Torsionsfestigkeit, also auf ihre zusammengesetzte Festigkeit zu berechnen. Da aber auch nach der Kraft P, welche den Widerstand Q mit Berücksichtigung der Reibung überwinden soll, gefragt wird, so erfordert dieser Theil der Aufgabe die Aufstellung einer Gleichgewichtsgleichung, in welcher der für die Schraube geltende Satz der Mechanik über das Gleichgewicht zwischen Kraft und Last dargestellt ist. Durch eine geeignete Verbindung obiger Festigkeits-

gleichung mit dieser Gleichgewichtsgleichung lassen sich die in der Aufgabe gefragten Grössen finden.

Aufstellung der Festigkeitsgleichung. Bezeichnet s die durch den Zug Q in jedem Querschnitte des Schraubenkernes hervorgebrachte Spannung pro Querschnittseinheit, t die durch die verdrehende Wirkung der Kraft P in der von der Schraubenaxe am weitesten entfernten Materialfaser hervorgebrachte Maximal-Torsions- oder Schubspannung pro Querschnittseinheit; so wird jede dieser beiden Spannungen eine Ausdehnung der Faser bewirken. Diese beiden Ausdehnungen vereinigen sich zu einer Ausdehnung, welche als die Wirkung einer einzigen, in der Richtung der Schraubenaxe die Schraube auf Zug beanspruchende Kraft gedacht werden kann, und als solche gleichförmig im ganzen Querschnitt vertheilt ist. Die durch diese Kraft in jeder Flächeneinheit des Querschnittes hervorgerufene Spannung heisse $\mathfrak{S}$; dann besteht nach Grashof zwischen den Spannungen s, t und der aus diesen beiden resultirenden einfachen Zugspannung $\mathfrak{S}$ folgende Relation:

$$\mathfrak{S} = \frac{3s}{8} + \frac{5}{8}\sqrt{s^2 + 4t^2} \; {}^{*}).$$

Die Zugspannung s, hervorgerufen durch die Kraft Q, findet sich aus der Gleichung: $Q = sf = s\pi r^2$, wenn r den Halbmesser des Schraubenkernes bedeutet; man erhält also: $s = \frac{Q}{\pi r^2}$. Die durch das Torsionsmoment M_d hervorgerufene Schubspannung t findet sich aus der Gleichung:

$$M_d = tZ = \frac{t\pi r^3}{2} \text{ mit } t = \frac{2M}{\pi r^3}.$$

(Der Zeiger von M wird weggelassen, weil nur dieses einzige Moment hier vorkommt.)

Die Werthe von s und t in obige Gleichung für $\mathfrak{S}$ eingesetzt, gibt:

$$\mathfrak{S} = \frac{3}{8} \cdot \frac{Q}{\pi r^2} + \frac{5}{8}\sqrt{\left(\frac{Q}{\pi r^2}\right)^2 + 4\left(\frac{2M}{\pi r^3}\right)^2}, \text{ oder}$$

$$\mathfrak{S} = \frac{3Q}{8\pi r^2} + \frac{5}{8}\sqrt{\frac{Q^2}{\pi^2 r^4} + \frac{16M^2}{\pi^2 r^6}}, \text{ oder}$$

$$\mathfrak{S} = \frac{3Q}{8\pi r^2} + \frac{5}{8}\sqrt{\left(\frac{Q}{\pi r^2}\right)^2\left(1 + \frac{16M^2}{\pi^2 r^6} \cdot \frac{\pi^2 r^4}{Q^2}\right)}, \text{ oder}$$

*) Die Ableitung dieser Formel wurde als zu weit führend weggelassen und kann dieselbe in der bezüglichen Festigkeitstheorie nachgelesen werden.

$$\mathfrak{S} = \frac{3Q}{8\pi r^2} + \frac{5}{8}\sqrt{\left(\frac{Q}{\pi r^2}\right)^2\left(1 + \frac{16 M^2}{r^2 Q^2}\right)}, \text{ oder}$$

$$\mathfrak{S} = \frac{Q}{\pi r^2}\left(\frac{3}{8} + \frac{5}{8}\sqrt{1 + \frac{16 M^2}{r^2 Q^2}}\right), \text{ oder}$$

$$\mathfrak{S} = \frac{Q}{\pi r^2}\left(\frac{3}{8} + \frac{5}{8}\sqrt{\frac{Q^2 r^2 + 16 M^2}{Q^2 r^2}}\right) \ldots\ldots (I)$$

Aufstellung der Gleichgewichtsgleichung. Bezeichnet h die Ganghöhe der Schraube, r_1 den äusseren Halbmesser der Schraube, r den Halbmesser des Schraubenkernes, ρ den mittleren Gewindehalbmesser, f den Reibungscoëfficienten, so ist

$$\rho = \frac{r_1 + r}{2};$$

wir machen die Annahme: $h = \frac{2 r_1}{5} = \frac{r}{2}$, also $r_1 = \frac{5h}{2}$ und $r = 2h$; hiermit erhält man

$$\rho = \frac{\frac{5h}{2} + 2h}{2} = \frac{9h}{4},$$

da aber $h = \frac{r}{2} = \frac{50}{2} = 25^{mm}$ ist, so hat man:

$$\rho = \frac{9 \cdot 25}{4} = 56{,}25^{mm}.$$

Bezeichnet α den mittleren Steigungswinkel der Schraube, so findet zwischen der Kraft P, am Hebelarm R wirkend, und der Last Q nach dem über die Schraube geltenden Satze aus der Mechanik über das Gleichgewicht zwischen Kraft und Last mit Berücksichtigung der Reibung die Gleichung statt:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\rho}{R} \cdot \frac{\operatorname{tang}\alpha + f}{1 - f \operatorname{tang}\alpha} \; ^{*)}.$$

Es ist bekanntlich der Reibungscoëfficient

$$f = \operatorname{tang}\alpha = \frac{h}{2\rho\pi} = \frac{25}{2 \cdot 56{,}25 \cdot 3{,}14} = 0{,}0707.$$

*) Die nicht hierher gehörige, ziemlich einfache Ableitung dieser Gleichung findet sich in jedem Lehrbuche der Mechanik bei der Berechnung der Reibungswiderstände eines auf einer schiefen Ebene sich bewegenden Körpers und Anwendung der erhaltenen Resultate auf die Schraube.

daher hat man auch:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\rho}{R} \cdot \frac{\frac{h}{2\rho\pi} + f}{1 - f \cdot \frac{h}{2\rho\pi}} = \frac{\rho}{R} \cdot \frac{h + 2\rho\pi f}{2\rho\pi - fh},$$

oder, da $PR = M$ ist, kann man auch schreiben:

$$M = Q\rho \cdot \frac{h + 2\rho\pi f}{2\rho\pi - fh} \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

Aus den zwei Gleichungen (I) und (II) können die beiden Unbekannten Q und M und hiermit auch aus der Gleichung „$M = PR$" der gefragte Werth von P berechnet werden.

Die Gleichung (I) nach M aufgelöst:

$$\frac{\mathfrak{S}\pi r^2}{Q} = \frac{3}{8} + \frac{5}{8}\sqrt{\frac{Q^2 r^2 + 16 M^2}{Q^2 r^2}}, \text{ oder}$$

$$\left\{\frac{\frac{\mathfrak{S}\pi r^2}{Q} - \frac{3}{8}}{\frac{5}{8}}\right\}^2 = \frac{Q^2 r^2 + 16 M^2}{Q^2 r^2}, \text{ oder}$$

$$\left(\frac{8\mathfrak{S}\pi r^2 - 3Q}{8Q} \cdot \frac{8}{5}\right)^2 Q^2 r^2 = Q^2 r^2 + 16 M^2, \text{ oder}$$

$$16 M^2 = \left(\frac{8\mathfrak{S}\pi r^2 - 3Q}{5Q}\right)^2 Q^2 r^2 - Q^2 r^2, \text{ hieraus ist}$$

$$M = \sqrt{\frac{\left(\frac{8\mathfrak{S}\pi r^2 - 3Q}{5Q}\right)^2 Q^2 r^2 - Q^2 r^2}{16}}, \text{ oder}$$

$$M = \frac{Qr}{4}\sqrt{\left(\frac{8\mathfrak{S}\pi r^2 - 3Q}{5Q}\right)^2 - 1}.$$

Die beiden Werthe von M (aus Gleichung (II) und dieser hier gefundene) einander gleich gesetzt, erhält man:

$$\frac{Qr}{4}\sqrt{\left(\frac{8\mathfrak{S}\pi r^2 - 3Q}{5Q}\right)^2 - 1} = Q\rho \cdot \frac{h + 2\rho\pi f}{2\rho\pi - fh},$$

die Werthe $\rho = \frac{9h}{4} = \frac{9}{4} \cdot \frac{r}{2} = \frac{9}{8} r$ und $h = \frac{r}{2}$ eingesetzt:

$$\frac{r}{4}\sqrt{\left(\frac{8\mathfrak{S}\pi r^2-3Q}{5Q}\right)^2-1}=\frac{9}{8}r.\frac{\frac{r}{2}+2.\frac{9}{8}r\pi f}{2.\frac{9}{8}r\pi-f\frac{r}{2}},\text{ oder}$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{8\mathfrak{S}\pi r^2-3Q}{5Q}\right)^2-1}=\frac{9}{8}.\frac{r(2+9\pi f)}{r(9\pi-2f)},\text{ oder}$$

$$\frac{2}{9}\sqrt{\left(\frac{8\mathfrak{S}\pi r^2-3Q}{5Q}\right)^2-1}=\frac{2+9\pi f}{9\pi-2f};$$

wir bezeichnen den rechten Theil dieser Gleichung der Abkürzung wegen mit dem Buchstaben c, setzen also $c=\frac{2+9\pi f}{9\pi-2f}$, man erhält dadurch:

$$\sqrt{\left(\frac{8\mathfrak{S}\pi r^2-3Q}{5Q}\right)^2-1}=\frac{9c}{2},\text{ oder}$$

$$\left(\frac{8\mathfrak{S}\pi r^2-3Q}{5Q}\right)^2-1=\frac{81c^2}{4},\text{ oder}$$

$$\frac{8\mathfrak{S}\pi r^2-3Q}{5Q}=\sqrt{\frac{81c^2}{4}+1};$$

wir setzen abermals der Abkürzung wegen den rechten Theil dieser Gleichung: $\sqrt{\frac{81c^2}{4}+1}=n$ und erhalten:

$$8\mathfrak{S}\pi r^2-3Q=5Qn,\text{ woraus}$$

$$Q(5n+3)=8\mathfrak{S}\pi r^2\text{ und }Q=\frac{8\mathfrak{S}\pi r^2}{5n+3}$$

folgt. Es ist der Werth von c, wenn man die Zahlenwerthe einsetzt:

$$c=\frac{2+9\pi f}{9\pi-2f}=\frac{2+9.3{,}14.0{,}0707}{9.3{,}14-2.0{,}0707},$$

oder $c=0{,}141472$, oder abgerundet $c=0{,}1415$, daher

$$n=\sqrt{\frac{81}{4}\left(\frac{2+9\pi f}{9\pi-2f}\right)^2+1}=\sqrt{1{,}40545}=1{,}185;$$

hiermit erhält man:

$$Q=\frac{8\mathfrak{S}\pi r^2}{5.1{,}185+3}=\frac{8.3.3{,}14(50)^2}{5.1{,}185+3}=21109^{Kg}.$$

In die Gleichung für M

$$„M = Q\rho \cdot \frac{h + 2\rho\pi f}{2\rho\pi - fh}“$$

die Zahlenwerthe eingesetzt:

$$M = 56{,}25\,Q \cdot \frac{25 + 2 \cdot 56{,}25 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}0707}{2 \cdot 56{,}25 \cdot 3{,}14 - 0{,}0707 \cdot 25}, \text{ oder}$$

$$M = 7{,}9578\,Q = 7{,}9578 \cdot 21109 = 167981{,}2,$$

woraus man die Kraft P, am Hebelarm R wirkend, mit

$$P = \frac{M}{R} = \frac{167981{,}2}{500} = 335{,}8^{Kg} \text{ erhält.}$$

Berichtigungen und Ergänzungen.

Seite	Zeile		statt	stehen
12	14	von oben soll statt	„in Formel“	stehen: „in die Formel“
15	9	„ „ „ „	„also das Gewicht“	stehen: „also angenähert das Gewicht“
17	1	„ unten „ „	„$l_1 + 0{,}5\,d$“	stehen: „l_1“
22	2	„ oben „ „	„der“	„ „die“
24	4	„ „ „ „	„$f \frac{d^2 \pi}{8}$“	„ „$f = \frac{d^2 \pi}{8}$“
30	4	„ unten „ „	„$s_1 = 20$ ein“	„ „$s_1 = 20$“

***Ergänzungen** zu den Beispielen 11, 12, 20 und 21 des ersten Abschnittes, von Seite 15 bis Seite 33.* Die in diesen Aufgaben vorkommenden, durch Zahlen ausgedrückten Beziehungen zwischen Gewicht, Tragkraft, Ketteneisen-Durchmesser, Trag- und Zerreisslänge der offenen Ringkette beruhen auf dem nur angenähert berechneten Gewichte der Kette pro laufenden Meter: $G_0 = \left(\frac{l_1 + 0{,}5\,d}{l}\right) f \gamma$, das wirkliche Gewicht der Kette ist aber wegen des Eisenverlustes durch Abbrand beim Schmieden kleiner, und zwar ist:

$$G_0 = \frac{l_1 f \gamma}{l} = \frac{10{,}85\, d^2 \pi \gamma}{14} = 0{,}018504\, d^2;$$

demgemäss erhält man auch: $G_0 = 0{,}001967\, P$, $P = 508{,}38\, G_0$, die Zerreisslänge $L_s = 3393{,}8^m$, die Traglänge $L_t = 509{,}07^m$, die Tragkraft P und den Durchmesser d des Ketteneisens in Beispiel 11: $P = 5083{,}8^{Kg}$, $d = 23^{mm}$, den Durchmesser d des Ketteneisens in Beispiel 12: $d = 18^{mm}$, in den Beispielen 20 und 21 die genaueren Proportionen:

$$G_1 : G_2 : G_3 = 1967 : 1120 : 1060,$$
$$d_1 : d_2 : d_3 = 7{,}348 : 16{,}9 : 30{,}7,$$
$$P_1 : P_2 : P_3 = 508 : 893 : 943.$$

Seite	Zeile		statt	stehen
43	9	von oben soll statt	„setzt man $\mathfrak{S}$“	stehen: „setzt man statt $\mathfrak{S}$“
44	2	„ „ „ „	„$\frac{x j}{\mathfrak{S}}$“	„ „$\frac{x \gamma}{\mathfrak{S}}$“
44	11	„ „ „ „	„$(l_1 = x)$“	„ „$(l_1 - x)$“
45	1	„ unten „ „	„$l\,n \left(\frac{f_1}{f}\right) = \frac{\gamma l}{\mathfrak{S}}$“	„ „$l\,n \left(\frac{f_1}{f_0}\right) = \frac{\gamma l_1}{\mathfrak{S}}$“
46	14	„ oben „ „	„$L_s - L_t \,.\, \frac{K}{\mathfrak{S}}$“	„ „$L_s = L_t \,.\, \frac{K}{\mathfrak{S}}$“

Seite	Zeile	
196	1	von unten soll statt „$Q_2 = o,1$" stehen: „$Q_1 = o,1$"
198	20	„ oben „ „ „$P_2 (s + a_2)$" „ „$P_2 (s + a_1)$"
199	5	„ „ „ „ „$\frac{L_2}{D_1}$" „ „$\frac{L_2}{D_2}$"
204	5 und 6	von unten soll statt „$Q_3\, a_3$" stehen: „$Q_3\, a_2$"
205	1	von unten soll statt „$\frac{P_1\, l_2}{2}$" stehen: „$\frac{P_1\, l_1}{2}$"
206	9	„ oben „ unter dem Wurzelzeichen statt „$a_1 - s_1$ (. . . ." stehen: „$a_1 + s_1$ (. . . ."
212		in Fig. 79 soll der Winkel statt mit „a" mit „α" bezeichnet sein und statt „c_1" soll stehen: „c'"
216	13	von oben soll statt „ausfallen" stehen: „ausgefallen"
219	14	„ unten „ „ „Exdpunkte" „ „Endpunkte"
219	9	„ „ „ „ „betragen" „ „betrage"
221	2	„ oben „ „ „$D\sqrt[3]{\frac{75}{2}}$" „ „$D_g\sqrt[3]{\frac{7,5}{2}}$"
221	17	„ unten „ statt „D_h" „ „D_h^2"
221	16	„ „ „ vor dem Wurzelzeichen statt „$D_h =$" stehen: „D_h"
224	9	„ „ „ „ „$\left(\frac{2}{3}R\right)^3 . \frac{R}{r}$" stehen: „$\left(\frac{2}{3}R\right)^2 . \frac{R}{3}$"
229	10	„ „ „ „ „$\alpha\, b^4\, \beta$" „ „$\alpha\, b^4\, \beta^3$"
229	10	„ „ „ „ „$b^4 (a - 1)$" „ „$b^4 (\alpha - 1)$"
232	3	„ oben „ „ „gleichmässig" stehen: „gleichmässig mit $P = 3000^{Kg}$"
232	1	„ unten „ „ „33,6" stehen: 34,6"
233	-	soll bei der Fig. 93 statt „b_2" stehen: „$2\, b$"
241	2	von oben soll statt „von" stehen: „aus"
244	9	„ unten „ „ „$\frac{l}{2} = e$" „ „$\frac{l}{2} - e$"
244	3	„ „ „ „ „$\frac{P l^2}{2 l}$" „ „$\frac{P e^2}{2 l}$"
245	1	„ oben „ „ „$\frac{P l}{2}$" „ „$\frac{P e}{2}$"
245	1	„ „ „ „ „d" „ „$e\, l$"
245	10	„ „ „ „ „$\frac{P l^2}{2 l \mathfrak{S}}$" „ „$\frac{P e^2}{2 l \mathfrak{S}}$"
265	8	„ „ „ „ „$\frac{\alpha_h^2\, \mathfrak{S}_h}{3}$" „ „$\frac{\alpha_h^2\, \mathfrak{S}_h}{3}$"
270	10	„ „ „ unter dem Wurzelzeichen statt „$r + a$" stehen: „$r - a$"
274		Fig. 119 fehlt in der Mitte der Länge die Richtungslinie der Kraft P: ↓ P
276	6	von oben soll unter dem Wurzelzeichen statt „$\frac{8000}{3}$" stehen „$\frac{80000}{3}$"

Seite	Zeile	
277	2	von oben soll statt „$24a^2b^3x\mathfrak{S}$“ stehen: „$24\alpha^2b^3x\mathfrak{S}$“
282	10	„ unten „ „ „$\frac{2000}{3}\ 666^2/_3{}^{mm}$“ „ „$\frac{2000}{3} = 666^2/_3{}^{mm}$“
287	9	„ „ „ im Zähler des Bruches statt „$b+a$“ stehen: „$b-a$“
287	8	„ „ „ statt „$(b-a)a^2$“ stehen: „$(b-a)h^2$“
287	7	„ „ „ „ „$(3a+b+a)$“ „ „$(3a+b-a)$“
298	12	„ oben „ „ „$\frac{\mathfrak{S}b}{b}$“ stehen: „$\frac{\mathfrak{S}b}{6}$“
300	1	„ unten „ im Nenner des Bruches statt „z“ stehen „lz“
305		Fig. 132 fehlt die Masslinie l der Länge des Balkens: ← ······ l ······ →
308	2	von oben soll statt „$(h-h_1)$“ stehen: „$(h-h_1)\,l$“
316	10	„ unten „ „ „$\frac{\mathfrak{S}h^2}{3}$“ „ „$\frac{\mathfrak{S}h^2\sqrt{bb_1}}{3}$“
317	1	„ „ „ „ „$\frac{q}{2}\,.\,z$“ „ „$\frac{ql}{2}\,.\,z$“
322	1	„ „ „ „ „(r_2-r_1)“ „ „$(r_2-r_1)z$“
323	5	„ oben „ „ „$(r_2-z_1)z$“ „ „$(r_2-r_1)z$“
328		Fig. 136 soll statt „L_1“ stehen: „L“
328	5	von unten soll statt „D_3^0“ stehen: „D_0^3“
331	16	„ „ „ „ „$\sqrt{\frac{16000}{12}}\,.\,1,4$“ „ „$\sqrt{\frac{16000}{12}\,.\,1,4}$“
337	5	„ oben „ „ „$\beta^2(\alpha+9)$“ „ „$\beta^3(\alpha+9)$“
337	12	„ „ „ „ „$8b_1^4n^3$“ „ „$8b_1^4n^2$“
341	6	„ „ „ „ „Ebh^3“ „ „$E(nb)h^3$“
341	7	„ „ „ „ „$\mathfrak{S}bh^2$“ „ „$\mathfrak{S}(nb)h^2$“
341	6	„ unten „ „ „L“ „ „l“
346	7	„ oben ist im Kopfe der Tabelle an die Stelle von „d“ zu setzen: „t“ und an die Stelle von „t“ zu setzen: „d“
351	2	von oben soll statt „$\sqrt[3]{\frac{16M}{\alpha\mathfrak{S}}}$“ stehen: „$\sqrt[3]{\frac{16M}{\pi\mathfrak{S}}}$“
366	4	„ unten „ „ „kreisförmig“ stehen: „kreisringförmig“
371	9	„ oben „ „ „$4,31\sqrt[3]{PR}$“ „ „$4,31\sqrt[4]{PR}$“
394	1	„ „ „ „ „R_1 nur“ „ „R_1 und nur“
394	1	„ unten „ „ „244“ „ „24,4“
400	1	„ oben „ „ „$\frac{\pi^3d^4E}{64\,l^4n}$“ „ „$\frac{\pi^3d^4E}{64\,l^2n}$“
406	10, 11, 12	von oben soll in den Brüchen $\frac{\delta}{l}$ und $\frac{l}{\delta}$ statt „l“ stehen: „l_1“
409	3	von oben soll statt „0,59 . 1,191 = 0,7027“ stehen: „0,59 $(1,191)^3$ = 0,997“
409	4	„ „ „ „ „0,7027“ stehen: „0,997“, und statt „39,35“ soll stehen: „55,8“
409	5	„ „ „ „ „40“ stehen: „56“
417	3	„ „ „ „ „$2\mu^2$“ stehen: „$2\mu^3$“ und statt „nl^3“ soll stehen: „nl^2“

Seite	Zeile	
425	4	von unten soll statt „$\left(\frac{4}{4}\right)^3$“ stehen: „$\left(\frac{4}{5}\right)^3$“
428	4	„ oben „ „ „$\sqrt{\frac{5000}{5}}$“ stehen: „$\sqrt{\frac{5000}{6}}$“
431		Fig. 160 soll die durch „P“ bezeichnete Strecke durch „p“ bezeichnet sein.
443	14	von oben soll statt „$\overline{d\,d'} + \overline{d\,d_0}$“ stehen: „$\overline{d\,d'} = \overline{d\,d_0}$“
449	1	„ unten „ „ „Richtunglinie“ stehen: „Richtungslinie“
455	4	„ oben „ „ „$b = \frac{6\,P\,R}{\mathfrak{S}\,h^2}$ eingesetzt“ stehen: „$b = \frac{6\,P\,R}{\mathfrak{S}\,h^2}$ an die Stelle von R eingesetzt“.

Druck von Wilhelm Köhler, Wien, VI. Mollardgasse 41.

